

Δακτύλιοι και Πρότυπα
Ασκήσεις 4

1. Αν m, n είναι θετικοί ακέραιοι με $\mu\kappa\delta(m, n) > 1$, δείξτε ότι οι αναλλοίωτοι παράγοντες της αβελιανής ομάδας $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ είναι $d_1 = \mu\kappa\delta(m, n)$, $d_2 = \epsilon\kappa\pi(m, n)$.
2. Βρείτε τη δομή της αβελιανής ομάδας $M_{m \times n}(\mathbb{Z}_p)$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{Z}_p$, p πρώτος.
3. Μια διαμέριση ενός θετικού ακεραίου n είναι μια ακολουθία $n_1, \dots, n_s$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε $n_1 \geq \dots \geq n_s$ και $n_1 + \dots + n_s = n$. Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι το πλήθος των ανά δύο μη ισόμορφων αβελιανών ομάδων τάξης p^n είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του n .
4. Ξέρουμε ότι αν $\mu\kappa\delta(m, n) = 1$, τότε οι αβελιανές ομάδες $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_{mn}$ είναι ισόμορφες. Ας δούμε μια γενίκευση αυτού. Έστω R ΠΚΙ και M ένα R -πρότυπο τέτοιο ώστε $M = M_1 \oplus M_2$ (εσωτερικό ευθύ άθροισμα) όπου τα M_i είναι κυκλικά πρότυπα στρέψης και $\text{ann} M_i = (d_i)$. Δείξτε ότι αν κάθε $\mu\kappa\delta$ των d_1, d_2 είναι αντιστρέψιμο στοιχείο, τότε το M είναι κυκλικό και $\text{ann} M = (d_1 d_2)$.
5. Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν.
 - a. Για κάθε διαιρέτη d της $|G|$ υπάρχει στοιχείο της G τάξης d .
 - b. Για κάθε διαιρέτη d της $|G|$ υπάρχει υποομάδα της G τάξης d .
 - c. Υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός ομάδων $G \rightarrow \mathbb{Z}_p$, p πρώτος, αν και μόνο αν η πρωταρχική p συνιστώσα της G είναι μη τετριμμένη.
6. Μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι κυκλική αν και μόνο αν δεν περιέχει υποομάδα ισόμορφη με τη $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, όπου p πρώτος.

Προθεσμία: πριν την πρωτοχρονιά

Σημείωση: Η συνεργασία φοιτητών στην επίλυση των ασκήσεων επιτρέπεται. Σε περίπτωση που έχετε λάβει βοήθεια, αυτό θα πρέπει να αναγράφεται στην αρχή του γραπτού σας με μια δήλωση όπως 'στην άσκηση τάδε είχα βοήθεια από τον δεινά'.