

Δακτύλιοι και Πρότυπα Ασκήσεις 3

1. Υπενθυμίζουμε ότι το I^o Κύριο Θεώρημα λέει:
Αν M είναι ένα πεπερασμένο παραγόμενο R -πρότυπο, όπου R ΠΚΙ, τότε $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$ (εσωτερικό ευθύ άθροισμα υποπροτύπων), όπου κάθε M_i είναι κυκλικό και $d_1 \mid d_2 \dots \mid d_s$, όπου $\text{ann} M_i = (d_i)$.
Έστω ότι έχουμε δυο αναλύσεις $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$, $M = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ της παραπάνω μορφής. Δείξτε με συγκεκριμένο παράδειγμα ότι η ακόλουθη πρόταση είναι λανθασμένη: Υπάρχει μετάθεση, σ , των $1, \dots, s$ τέτοια ώστε $M_{\sigma(i)} = N_i$ για κάθε i .
Υπόδειξη: $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
2. Θεωρούμε τους ομομορφισμούς $\mathbb{Z}$ -προτύπων $f: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $g: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ με αντίστοιχους πίνακες τους $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 48 \\ 20 & 80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ ως προς τις συνήθεις βάσεις.
Εξετάστε αν τα $\mathbb{Z}$ -πρότυπα $\mathbb{Z}^2 / \text{Im } f, \mathbb{Z}^2 / \text{Im } g$ είναι ισόμορφα.
3. Να βρεθεί μια κανονική μορφή Smith του πίνακα $\begin{pmatrix} 2x & x^2 + 1 \\ x^2 + 1 & x^3 - 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}[x])$.
4. Στη διατύπωση της κανονικής μορφής Smith υπάρχει η υπόθεση ότι ο R είναι ΠΚΙ. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι η υπόθεση αυτή είναι απαραίτητη.
Αποδείξτε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}[x])$ δεν είναι ισοδύναμος με διαγώνιο πίνακα.
Υπόδειξη: Εξετάστε τα ιδεώδη $J_i(A)$ του $\mathbb{Z}[x]$.
5. Ξέρουμε ότι κάθε πεπερασμένο παραγόμενο, ελεύθερο στρέψης πρότυπο πάνω από ΠΚΙ είναι ελεύθερο. Δείξτε με παράδειγμα ότι η υπόθεση ΠΚΙ είναι απαραίτητη.
Υπόδειξη: Βλ. τις Ασκήσεις 2.
6. Έστω R ΠΚΙ και M ένα κυκλικό R -πρότυπο στρέψης.
 - a. Αποδείξτε ότι το M έχει πεπερασμένο πλήθος υποπροτύπων και βρείτε μια περιγραφή τους.
 - b. Αποδείξτε ότι κάθε πηλίκo του M είναι ισόμορφο με υποπρότυπο του M .

Προθεσμία 5/12

Σημείωση: Η συνεργασία φοιτητών στην επίλυση των ασκήσεων επιτρέπεται. Σε περίπτωση που έχετε λάβει βοήθεια, αυτό θα πρέπει να αναγράφεται στην αρχή του γραπτού σας με μια δήλωση όπως 'στην άσκηση τάδε είχα βοήθεια από τον δεινα'.