24/10/2007

Δακτύλιοι και Πρότυπα
Ασκήσεις 2

1. Για κάθε πρώτο αριθμό p, αποδείξτε ότι το ιδεώδες (p,x) του $\mathbb{Z}[x]$ είναι μεγιστικό και όχι κύριο. Επιπλέον δείξτε ότι το (p,x) δεν είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}[x]$-πρότυπο.

2. Έστω R μια περιοχή. Να βρεθούν όλα τα R- υποπρότυπα $I, J \leq R$ τέτοια ώστε $R = I \oplus J$ (εσωτερικό ευθύ άθροισμα).

3. Έστω R μια ΠΚΙ και $p \in R$.
   a. Αποδείξτε ότι αν το p είναι ανάγωγο, τότε το ιδεώδες (p) είναι μεγιστικό.
   b. Έστω $p \neq 0$. Αποδείξτε ότι αν το ιδεώδες (p) είναι μεγιστικό, τότε το p είναι ανάγωγο.
   c. Δώστε ένα παράδειγμα που το (p) είναι μεγιστικό, χωρίς το p να είναι ανάγωγο.

4. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές.
   a. Ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{Z}[x]/(x^m)$ ως $\mathbb{Z}$ - πρότυπο είναι ελεύθερο τάξης m.
   b. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, F ένα ελεύθερο R -πρότυπο τάξης $n < \infty$ και $B = \{e_1, ..., e_n\}$ ένα υποσύνολο του F.
      i. Το B είναι μια βάση του F αν και μόνο αν το B είναι ‘γραμμικά ανεξάρτητο’ (δηλαδή κάθε φορά που έχουμε $r_1e_1 + ... + r_ne_n = 0, r_i \in R,$ τότε αναγκαστικά $r_1 = ... = r_n = 0$).
      ii. Το B είναι μια βάση του F αν και μόνο αν το B παράγει το F.

5. Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

6. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Από τη Γραμμική Άλγεβρα ξέρουμε ότι: αν το R είναι σώμα, τότε κάθε R-πρότυπο είναι ελεύθερο. Αποδείξτε το αντίστροφο.

Προθεσμία 9/11

Σημείωση: Η συνεργασία φοιτητών στην επίλυση των ασκήσεων επιτρέπεται Σε περίπτωση που έχετε λάβει βοήθεια, αυτό θα πρέπει να αναγράφεται στην αρχή του γραπτού σας με μια δήλωση όπως ‘στην άσκηση τάδε είχα βοήθεια από τον δείνα’.