

Δακτύλιοι και Πρότυπα Ασκήσεις 1

1. Αποδείξτε το $2\mathbb{Z}$ είναι ένα υποπρότυπο του $\mathbb{Z}$ που είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Z}$. Αληθεύει ότι οι δακτύλιοι $2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ είναι ισόμορφοι;
2. Έστω $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Το $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{R}$ και επιπλέον είναι ένα $\mathbb{Z}$ -πρότυπο ως προς την απεικόνιση $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \ni (n, a + b\sqrt{2}) \mapsto na + nb\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
 - a. Αποδείξτε ότι τα $\mathbb{Z}$ -πρότυπα $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ και $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ είναι ισόμορφα.
 - b. Εξηγήστε γιατί οι δακτύλιοι $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ και $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ δεν είναι ισόμορφοι.
 - c. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \ni a + b\sqrt{2} \mapsto a + b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ είναι ομομορφισμός $\mathbb{Z}$ -προτύπων αλλά όχι ομομορφισμός $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ -προτύπων.
3. (Ένα σημαντικό παράδειγμα) Έστω V ένας k -διανυσματικός χώρος, όπου το k είναι σώμα. Έστω $\alpha : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $f = f_0 + f_1x + \dots + f_nx^n \in k[x]$ είναι ένα πολυώνυμο, τότε με $f(a)$ συμβολίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $f_01_V + f_1\alpha + \dots + f_n\alpha^n$.
 - a. Αποδείξτε ότι $((fg)(\alpha))(v) = f(\alpha)(g(\alpha)(v))$ για κάθε $v \in V$, $f, g \in k[x]$.
 - b. Αποδείξτε ότι το V είναι ένα $k[x]$ -πρότυπο ως προς $k[x] \times V \rightarrow V$, $(f, v) \mapsto fv = f(\alpha)(v)$.
 - c. Αποδείξτε ότι ένας υπόχωρος U του V είναι $k[x]$ -υποπρότυπο του V αν και μόνο αν $\alpha(U) \subseteq U$.
4. Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.
5. Έστω M_1, M_2, N_1, N_2 πρότυπα πάνω από ένα δακτύλιο R .
 - a. Αποδείξτε ότι αν $M_1 \simeq N_1$ και $M_2 \simeq N_2$, τότε $M_1 \oplus M_2 \simeq N_1 \oplus N_2$.
 - b. Εξετάστε αν ισχύει το αντίστροφο του a.
6. Έστω M ένα R -πρότυπο και $f : M \rightarrow M$ ένας ομομορφισμός R -προτύπων τέτοιος ώστε $f^2 = f$. Αποδείξτε ότι $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ (εσωτερικό ευθύ άθροισμα). Υπόδειξη: Για κάθε $m \in M$, θεωρείστε τη σχέση $m = (m - f(m)) + f(m)$ και παρατηρήστε ότι $m - f(m) \in \ker f$.

Προθεσμία 19/10

Σημείωση: Η συνεργασία φοιτητών στην επίλυση των ασκήσεων επιτρέπεται Σε περίπτωση που έχετε λάβει βοήθεια, αυτό θα πρέπει να αναγράφεται στην αρχή του γραπτού σας με μια δήλωση όπως 'στην άσκηση τάδε είχα βοήθεια από τον δεινά'.