Μεταθετική Άλγεβρα
Ασκήσεις 1
Παράδοση μέχρι 13/11

1. Θεωρούμε τα ιδεώδη $I=\langle m\rangle, J=\langle n\rangle$ του $\mathbb{Z}$, όπου τουλάχιστον ένας από τους m,n δεν είναι μηδέν. Αποδείξτε ότι $I+J=\langle d\rangle$, όπου $d=\mu\kappa\delta(m,n)$. Βρείτε ανάλογες παραστάσεις για τα $I\cap J$, IJ.
2.
   a. Έστω $\phi: R\to S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων όπου ο S είναι ακεραία περιοχή. Αποδείξτε ότι το $\ker\phi$ είναι πρώτο ιδεώδες.
   b. Ποια από τα επόμενα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]$ είναι μεγιστικά; $\langle x-3\rangle, \langle x^2-3\rangle, \langle x^2-4\rangle$
3. Αποδείξτε ότι κάθε ομομορφισμός δακτυλίων στις παρακάτω περιπτώσεις είναι αναγκαστικά η ταυτοτική απεικόνιση.
   a. $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$
   b. $\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$
   c. $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *Υπόδειξη:* Εξετάστε αν κάθε ομομορφισμός διατηρεί τη διάταξη.

   Δώστε ένα παράδειγμα ισομορφισμού $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ διάφορου της ταυτοτικής απεικόνισης.
4. Αποδείξτε ότι η περιοχή $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]=\left\{a+b\sqrt{-3}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ δεν είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης. *Υπόδειξη:* $2\times 2=\left(1+\sqrt{-3}\right)\left(1-\sqrt{-3}\right)$
5. Βρείτε το $m\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\mathbb{Z}\left[i\right]/\langle 1+3i\rangle\simeq\mathbb{Z}_m$.
6. Έστω I ένα μη τετριμμένο ιδεώδες του $\mathbb{Z}\left[i\right]$. Αποδείξτε ότι στο δακτύλιο $\mathbb{Z}\left[i\right]/I$ τα μεγιστικά και τα πρώτα ιδεώδη ταυτίζονται. *Υπόδειξη:* Το πηλίκο είναι πεπερασμένος δακτύλιος