Μεταπτυχιακή Άλγεβρα ΙΙ
Ασκήσεις 5
Προθεσμία 25/6.

1. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός k-αλγεβρών $M_m(k)\underset{k}{\otimes}M_n(k)\cong M_{mn}(k)$.

Υπόδειξη: Ένας τρόπος είναι να θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$\Phi: End_k(V)\underset{k}{\otimes}End_k(W)\to End_k\left(V\underset{k}{\otimes}W\right),\ \Phi(f\otimes g)(v\otimes w)=f(v)\otimes g(w),$$

όπου $V=k^m, W=k^n,\ f\in End_k(V),\ g\in End_k(W),\ v\in V,\ w\in W$

2. α) Για κάθε χαρακτήρα χ αβελιανής ομάδας ισχύει $<\chi,\chi>\geq\chi(1)$.

β) Αληθεύει το β) για κάθε μη αβελιανή ομάδα;

3. Έστω χ ανάγωγος χαρακτήρας της G βαθμού n.

α) Για κάθε $g\in G$ ισχύει $|\chi(g)|\leq n$.

β) Ισχύει $n^2\leq[G:C(G)]$.

4. α) Έστω χ ο ανάγωγος χαρακτήρας της S_3 βαθμού 2. Βρείτε την ανάλυση του χ^2 σε $\mathbb{N}$-γραμμικό συνδυασμό των αναγώγων χαρακτήρων της S_3 υπολογίζοντας τα $\langle\chi,\chi_i\rangle$.

β) Αν το $g\in G$ έχει τάξη 2, τότε για κάθε χαρακτήρα χ έχουμε $\chi(g)\in\mathbb{Z}$ και $\chi(g)\equiv\chi(1)\bmod 2$.

5. Παρακάτω δίνεται ένα τμήμα του πίνακα χαρακτήρων μιας ομάδας τάξης 10 για την οποία ξέρουμε ότι έχει 4 κλάσεις συζυγίας με αντιπροσώπους g_i. Να βρεθεί ο υπόλοιπος πίνακας.

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
$\lvert C(g_i)\rvert$	10	5	5	2
χ_1	1	1	1	1
χ_2	2	α	β	0

όπου $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, b=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Υπόδειξη: Αφού συμπληρώστε την πρώτη στήλη, η άσκηση 4β) ίσως χρησιμεύσει για την τέταρτη στήλη.