Άλγεβρα ΙΙ
Ασκήσεις 4
Προθεσμία 28/5

1.

a. Έστω $x = a(1\otimes 1) + b(1\otimes i) + c(i\otimes 1) + d(i\otimes i) \in \mathbb{C}\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{C}$, όπου $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \neq 0$. Βρείτε μια ικανή συνθήκη ώστε το x να ανήκει σε ένα γνήσιο αμφίπλευρο ιδεώδες της $\mathbb{R}$-άλγεβρας $\mathbb{C}\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{C}$. Συνεπώς η $\mathbb{C}\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{C}$ δεν είναι απλή. (Σύγκρινε με το Θεώρημα 6.1.4).

b. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{C}\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{C}$ δεν είναι δακτύλιος διαίρεσης.

2. Έστω k ένα σώμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός k-αλγεβρών

$$M_m(k)\underset{k}{\otimes}M_n(k) \cong M_{mn}(k).$$

Υπόδειξη: Οι άλγεβρας $M_m(k)\underset{k}{\otimes}M_n(k), M_{mn}(k)$ είναι απλές. Ένας τρόπος απόδειξης είναι να θεωρήσουμε την απεικόνιση (καλά ορισμένη;)

$$\Phi : End_k(V)\underset{k}{\otimes}End_k(W) \to End_k\left(V\underset{k}{\otimes}W\right),\ \ \Phi(f\otimes g)(v\otimes w) = f(v)\otimes g(w).$$

3. Έστω k ένα σώμα. Αποδείξτε ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα των αυτομορφισμών της k-άλγεβρας $M_n(k)$ είναι ισόμορφη με τη $GL_n(k)/N$, όπου $N = \left\{diag(a,...,a) \in M_n(k) \middle| a \in k, a \neq 0\right\}$.

4.

a. Έστω k ένα σώμα και H,G δυο πεπερασμένες ομάδες. Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός k-αλγεβρών $k[H\times G] \simeq k[H]\underset{k}{\otimes}k[G]$.

b. Να βρεθεί το πλήθος των ανά δύο μη ισόμορφων απλών $\mathbb{C}[S_3\times G]$-προτύπων, όπου G αβελιανή ομάδα τάξης $n<\infty$.

5. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν.

a. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και P,Q δυο προβολικά R-πρότυπα. Τότε το $P\underset{R}{\otimes}Q$ είναι προβολικό R-πρότυπο.

b. Έστω k ένα σώμα και V ένας k χώρος με βάση $\{e_1,e_2,e_3\}$. Θεωρούμε το V ως αριστερό $k[S_3]$-πρότυπο με δράση $\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$ και δεξιό $k[S_3]$-πρότυπο με δράση $e_i\sigma = e_{\sigma^{-1}(i)}$, όπου $\sigma \in S_3$. Τότε το V είναι $(k[S_3],k[S_3])$ διπρότυπο.

Σημειώσεις ανανεωμένες υπάρχουν στην ιστοσελίδα http://users.uoa.gr/~mmaliak