

Μεταπτυχιακή Άλγεβρα II

Ασκήσεις 3

Προθεσμία 17/5.

1. Έστω $f : R \rightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων και M ένα S -πρότυπο. Το M γίνεται R -πρότυπο αν ορίσουμε $rm = f(r)m$, $r \in R$, $m \in M$.
Βρείτε μοναδικό παράδειγμα που δείχνει ότι όλες από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένες.

1. Αν το M είναι απλό S -πρότυπο, τότε είναι απλό R -πρότυπο.
2. Αν το M είναι προβολικό S -πρότυπο, τότε είναι προβολικό R -πρότυπο.
3. Αν το M είναι ημιαπλό S -πρότυπο, τότε είναι ημιαπλό R -πρότυπο.

2. (Οι άνω τριγωνικοί πίνακες δεν είναι γενικά ημιαπλοί δακτύλιοι).

Έστω $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$. Αποδείξτε ότι ο δακτύλιος R δεν είναι ημιαπλός.

Υπόδειξη: Ένας τρόπος είναι να θέσουμε $M = \mathbb{C}^2$ με εξωτερικό πολλαπλασιασμό τον πολλαπλασιασμό πινάκων $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cy \end{pmatrix}$. Έστω L το υποπρότυπο του M που παράγεται από το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Τότε η ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow M/L \rightarrow 0$ δεν διασπάται.

3. Το $\mathbb{Z}$ -πρότυπο $\mathbb{Z}_n$ είναι ημιαπλό αν και μόνο αν το n δεν διαιρείται με το τετράγωνο ακεραίου >1 .

4. Αποδείξτε ότι κάθε μη μηδενική επιμορφική εικόνα ημιαπλού δακτυλίου είναι ημιαπλός.

Υπόδειξη: Ίσως είναι χρήσιμη η παρατήρηση ότι κάθε αμφίπλευρο ιδεώδες του $R_1 \times \dots \times R_s$ έχει τη μορφή $I_1 \times \dots \times I_s$, όπου για κάθε k , το I_k είναι αμφίπλευρο ιδεώδες του R_k , σε συνδυασμό με το 1^ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων.

5. Αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο ημιαπλό R -πρότυπο, τότε ο δακτύλιος $\text{End}_R(M)$ είναι ημιαπλός.

Υπόδειξη: Υπολογίστε τον $\text{End}_R(M)$.

6. i) Να βρεθούν όλοι οι ημιαπλοί δακτύλιοι το κέντρο των οποίων είναι σώμα.

ii) Αποδείξτε ότι το κέντρο της $\mathbb{C}[S_3]$ έχει διάσταση 3, όπου S_3 είναι η ομάδα μεταθέσεων 3 συμβόλων.

iii) Έστω G μια ομάδα τάξης 10 για την οποία η άλγεβρα $\mathbb{C}[G]$ έχει τουλάχιστον 8 ανά δύο μη ισόμορφα απλά πρότυπα. Αποδείξτε ότι $G \simeq \mathbb{Z}_{10}$.

Οι ασκήσεις 2, 4, 5, 6 είναι από τις σημειώσεις του Κεφ2.