Άλγεβρα ΙΙ
Ασκήσεις 5
Προθεσμία: 10/6

1. (Οι ανάγωγοι χαρακτήρες της διεδρικής ομάδας D_{2n}, όπου n άρτιος.) Έστω n ένας άρτιος θετικός ακέραιος. Θεωρούμε την ομάδα
$$G = D_{2n} = \left\langle a, b : a^n = b^2 = 1, ba = a^{-1}b \right\rangle$$
που έχει τάξη $2n$. Για κάθε $i = 1,\ldots,4$ ορίζονται αναπαραστάσεις $\rho_i : G \to GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ τέτοιες ώστε
$$\rho_1(a) = 1, \rho_1(b) = 1, \qquad \rho_2(a) = 1, \rho_2(b) = -1$$
$$\rho_3(a) = -1, \rho_3(b) = 1, \qquad \rho_4(a) = -1, \rho_4(b) = -1.$$
Έστω $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$. Δείξτε τα ακόλουθα.
    a. Για κάθε ακέραιο m ορίζεται αναπαράσταση $\sigma_m : G \to GL_2(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε $\sigma_m(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon^m & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-m} \end{pmatrix}$, $\sigma_m(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
    b. Οι σ_m, σ_{n-m} είναι ισοδύναμες.
    c. Οι $\sigma_0, \sigma_{n/2}$ δεν είναι ανάγωγες.
    d. Αν $0 < m < n/2$, τότε η σ_m είναι ανάγωγη. (Υπόδειξη: αν η σ_m δεν είναι ανάγωγη, τότε το αντίστοιχο πρότυπο έχει υποπρότυπο διάστασης 1).
    e. Αν χ_m είναι ο χαρακτήρας του σ_m, τότε οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G είναι $\rho_i\ (1 \le i \le 4), \chi_m\ (0 < m < n/2)$.

2. Έστω V ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος διάστασης $n+2$, όπου $n \ge 3$, με βάση $v_1,\ldots,v_n,e_1,e_{-1}$. Θεωρούμε το V ως $\mathbb{C}[S_n]$-πρότυπο με δράση που ορίζεται από $\sigma v_i = v_{\sigma(i)}$, $\sigma e_j = e_{sign(\sigma)j}$.
    a. Για $n = 3$ υπολογίστε το χαρακτήρα του V και την ανάλυση του σε άθροισμα αναγώγων χαρακτήρων της S_3.
    b. (προαιρετικό ερώτημα). Δείξτε ότι για κάθε $n \ge 3$ το V έχει ακριβώς 4 ανάγωγες συνιστώσες (όχι αναγκαστικά διακεκριμένες) στην ανάλυσή του σε άθροισμα απλών προτύπων.

3. Έστω G μια πεπερασμένη υποομάδα της $GL_n(\mathbb{C})$. Αποδείξτε ότι αν $\sum_{g\in G} Tr(g) = 0$, τότε $\sum_{g\in G} g = 0.$