

Γραμμική Άλγεβρα II

Αύγουστος 2006

B

Σύντομες Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα 1Έστω $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.α) Υπολογίστε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ελάχιστο πολυώνυμο του B .β) Αφού βρείτε έναν πίνακα P τέτοιον ώστε ο $P^{-1}BP$ είναι διαγώνιος, υπολογίστε τον B^k , $k \geq 0$.**Λύση**α) Με πράξεις ρουτίνας βρίσκουμε:
ιδιοτιμές $-1, 2$ αντίστοιχοι ιδιόχωροι $V(-1) = \left\{ x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, $V(2) = \left\{ x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_B(x) = (x+1)(x-2)$.Από το Πόρισμα 3.1.4 και το Θεώρημα 3.1.6 έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m_B(x) = \chi_B(x) = (x+1)(x-2)$.β) Ως P μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (βλ. σελίδα 58 και Παραδείγματα2.2.6). Έχουμε $B^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1}$, δες την Εφαρμογή 2.2.7 στη σελίδα 60-61.Απάντηση $B^k = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^k + 2^{k+1} & 2(-1)^{k+1} + 2^{k+1} \\ (-1)^{k+1} + 2^k & 2(-1)^k + 2^k \end{pmatrix}$ **Θέμα 2**

α) Αποδείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Αληθεύει ότι αν δύο πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τότε είναι όμοιοι; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας είτε με απόδειξη είτε με αντιπαράδειγμα).

β) Έστω $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_B(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$.Αποδείξτε ότι $\det B = a_0$ και $\text{Tr} B = (-1)^{n-1} a_{n-1}$.**Λύση**α) Δες την Πρόταση 2.1.18. Ένα αντιπαράδειγμα είναι $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (βλ. και

Άσκηση 14 της παραγράφου 2.1).

β) Βλ. Πρόταση 2.1.15 και Πρόταση 2.1.17.

Θέμα 3Έστω $f: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου το V είναι ένας $\mathbb{F}$ -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης.

α) Αποδείξτε ότι αν $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ είναι δυο διακεκριμένες ιδιοτιμές της f , τότε

$$\dim(V(\lambda) + V(\mu)) = \dim V(\lambda) + \dim V(\mu).$$

β) Διατυπώσετε τον ορισμό της διαγωνίσιμης γραμμικής απεικόνισης. Αποδείξτε ότι αν ισχύει $f^3 - f = 0$, τότε η f είναι διαγωνίσιμη.

Λύση

α) Αρκεί ναδειχτεί ότι $V(\lambda) \cap V(\mu) = \{0\}$ και αυτό έπεται άμεσα από τους ορισμούς (βλ σελίδα 65, τέταρτη παράγραφος).

β) Από την υπόθεση έπεται ότι $m_f(x) \mid x(x-1)(x+1)$ και άρα το $m_f(x)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων μονικών πρωτοβάθμιων παραγόντων. Το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 3.2.2.

Θέμα 4

$$\text{Έστω } B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε ο B να είναι τριγωνίσιμος.

β) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε ο B να είναι διαγωνίσιμος.

Λύση

Έχουμε $\chi_B(x) = x^2 - 3x + 2 - \alpha$.

α) Από το Θεώρημα 2.3.4, ο B είναι τριγωνίσιμος αν και μόνο αν οι ρίζες του $\chi_B(x)$

είναι πραγματικές, δηλαδή αν και μόνο αν $\alpha \geq -\frac{1}{4}$.

β) Απάντηση $\alpha > -\frac{1}{4}$.

Πράγματι, αν $\alpha > -\frac{1}{4}$ τότε ο B έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα διαγωνοποιείται.

Αντίστροφα, αν ο B είναι διαγωνίσιμος, τότε είναι τριγωνίσιμος και άρα $\alpha \geq -\frac{1}{4}$.

Τέλος, για $\alpha = -\frac{1}{4}$ βλέπουμε με έναν άμεσο υπολογισμό ότι ο B έχει μοναδικό ιδιόχωρο διάστασης 1, οπότε για την τιμή αυτή ο B δεν είναι διαγωνίσιμος.

Θέμα 5

α) Αποδείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή Ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικός αριθμός.

β) Έστω $B = \begin{pmatrix} i & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{2 \times 1}$

αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του B αν και μόνο αν $\alpha = -1$.

Λύση

α) Δες το Θεώρημα 4.2.8.

β) Από το Θεώρημα 4.3.7, υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{2 \times 1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του B αν και μόνο αν $BB^* = B^*B$, δηλαδή (πράξεις πινάκων) αν και μόνο αν $\alpha = -1$.