Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Απαντήσεις/Υποδείξεις Επιλεγμένων Ασκήσεων
Παράγραφος 4.2

1) Ο A είναι Ερμιτιανός και όχι μοναδιαίος. Ο B είναι Ερμιτιανός και μοναδιαίος. Ο C είναι μοναδιαίος. Ο C είναι Ερμιτιανός αν και μόνο αν $\sigma\upsilon\nu\theta = 0$.

2) Έχουμε $Av = \lambda v \Leftrightarrow \overline{A}\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$ και επομένως το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν το $\overline{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του $\overline{A}$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι $A^*, \overline{A}$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αυτό ισχύει, γιατί ξέρουμε ότι ανάστροφοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

3)i) Έστω ότι ο A είναι μοναδιαίος. Τότε έχουμε

$$AA^* = I \Rightarrow A\left(\overline{A}\right)^t = I \Rightarrow \overline{A}\left(\overline{\overline{A}^t}\right) = \overline{I} = I \Rightarrow \overline{A}\left(\overline{\left(\overline{A}\right)}\right)^t = I \Rightarrow \overline{A}\left(\overline{A}\right)^* = I$$

και άρα ο $\overline{A}$ είναι μοναδιαίος. Όμοια αποδεικνύεται ότι οι A^t, A^{-1} είναι μοναδιαίοι.

ii) Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος, κάθε ιδιοτιμή του είναι μη μηδενική. Έχουμε $Av = \lambda v \Rightarrow A^{-1}A = A^{-1}\lambda v \Rightarrow A^{-1}v = \dfrac{1}{\lambda}v \Rightarrow A^*v = \dfrac{1}{\lambda}v \Rightarrow A^t\overline{v} = \dfrac{1}{\overline{\lambda}}\overline{v}.$ Συνεπώς, αν το λ είναι ιδιοτιμή του A, τότε το $\dfrac{1}{\overline{\lambda}}$ είναι ιδιοτιμή του A^t. Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι ανάστροφοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

iii) Ξέρουμε ότι $\det A$ είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών του A και, εφόσον ο A είναι μοναδιαίος, κάθε ιδιοτιμή του A έχει μέτρο 1. Άρα $\left|\det A\right| = 1$.

4) Σωστό, Λάθος, Σωστό.

5) i) Έστω λ μια ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v. Τότε έχουμε $\left\langle Av, v\right\rangle = \left\langle v, A^*v\right\rangle \Rightarrow \lambda\left\langle v, v\right\rangle = -\overline{\lambda}\left\langle v, v\right\rangle \Rightarrow \lambda = -\overline{\lambda}.$

ii) Αν ο πίνακας $I + A = A - (-1)I$ ήταν μη αντιστρέψιμος, τότε το -1 θα ήταν ιδιοτιμή του A, που είναι άτοπο από το προηγούμενο υποερώτημα..

iii) Αρκεί να δείξουμε ότι $(I-A)(I+A)^{-1}\left((I+A)^{-1}\right)^*(I-A)^* = I.$ Επειδή έχουμε

$$(I-A)^* = I + A,\ \left((I+A)^{-1}\right)^* = \left((I+A)^*\right)^{-1} = \left(I-A\right)^{-1}$$

αρκεί να δείξουμε ότι $(I-A)(I+A)^{-1}\left(I-A\right)^{-1}(I+A) = I$ ή ισοδύναμα $(I+A)(I-A) = (I-A)(I+A)$. Η τελευταία σχέση επαληθεύεται με έναν άμεσο υπολογισμό.

9) Το ζητούμενο έπεται από τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\left\langle u, v\right\rangle}{|u||v|}$, την Πρόταση 4.2.4 και το Πόρισμα 4.2.5.Το αντίστροφο δεν ισχύει. Ένα αντιπαράδειγμα είναι ο $2I$.

10) Έστω ότι το k είναι άρτιος, $k = 2m.$ Εφαρμόζοντας πολλές φορές το Λήμμα 4.3.2 1) παίρνουμε $0 = \left\langle A^{2m}x, x\right\rangle = \left\langle A^m x, A^m x\right\rangle$ και άρα $A^m x = 0.$

Έστω τώρα ότι το k είναι τυχαίο. Επειδή $2^k \geq k$, έχουμε $A^{2^k}x = 0.$ Από την ειδική περίπτωση που είδαμε πριν παίρνουμε $A^{2^{k-1}}x = 0.$ Συνεχίζοντας έτσι (ή επαγωγικά) παίρνουμε τελικά $A^{2^0}x = 0 \Rightarrow Ax = 0.$

Σημείωση: Μια άλλη άμεση λύση μπορεί να δοθεί βασιζόμενη στο γεγονός ότι οι Ερμιτιανοί πίνακες είναι διαγωνίσιμοι (βλ. επόμενη παράγραφο).