Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Απαντήσεις/Υποδείξεις Επιλεγμένων Ασκήσεων
Παράγραφος 4.1

2) Ένα διάνυσμα $x=(x_1,x_2,x_3)$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $u=(1,2,-1), v=(2,3,3)$ αν και μόνο αν $\langle x,u\rangle=\langle x,v\rangle=0$ δηλαδή αν και μόνο αν

$x_1+2x_2-x_3=0$

$2x_1+3x_2+3x_3=0$

από όπου βρίσκουμε $x=(-9x_3,5x_3,x_3),\ x_3\in\mathbb{R}$.

4) i)
$$|u+v|^2+|u-v|^2=\langle u+v,u+v\rangle+\langle u-v,u-v\rangle=$$
$$\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle+\langle u,u\rangle-\langle u,v\rangle-\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle=$$
$$2\langle u,u\rangle+2\langle u,u\rangle=2|u|^2+2|v|^2.$$

Η γεωμετρική ερμηνεία είναι ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του.
Η απόδειξη του ii) είναι παρόμοια.

5) Σημείωση: στην εκφώνηση υπάρχει τυπογραφικό λάθος. Το τρίτο διάνυσμα στη δεύτερη βάση είναι το $(1,0,1)$.

Οι απαντήσεις είναι αντίστοιχα

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1).$$

6) Παρατηρήστε ότι τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Μια βάση του υπόχωρου αποτελούν τα πρώτα δυο διανύσματα. Εφαρμόζοντας σε αυτά τη μέθοδο Gram-Schmidt βρίσκουμε $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1),\frac{1}{\sqrt{210}}(13,-4,-5)$.

7) Προκύπτει η ίδια βάση.

8) Πρώτα επεκτείνετε τα δοσμένα διανύσματα σε βάση του $\mathbb{R}^3$ και μετά εφαρμόστε τη μέθοδο των Gram-Schmidt.

9) Εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Shwarz στα διανύσματα $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $(1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n})$.