

Γραμμική Άλγεβρα II

Υποδείξεις/Απαντήσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

Παράγραφος 3.1

1. i) $x^2 - 4x + 3$, ii) $(x-1)^2$, iii) $x^2 - 4x + 4$
2. i) $x^2 - 2$, ii) $(x-2)^3$, iii) $x^2 - 1$
3. i) Αν η f είναι ισομορφισμός, τότε $\chi_f(0) \neq 0$ (Πρόταση 2.1.15) και άρα $m_f(0) \neq 0$ (Πόρισμα 3.1.3). (ii) Όπως στο Παράδειγμα 2(i) σελίδα 88.
4. Η f είναι διαγωνίσιμη από το Πόρισμα 2.2.9 οπότε το ζητούμενο έπεται από το Πόρισμα 3.1.10
5. $\chi_A(x) = -(x-3)^3$, $m_A(x) = (x-3)^3$, $\chi_B(x) = -(x-3)^3$, $m_B(x) = x-3$. Δεν είναι όμοιοι αφού έχουν διαφορετικά ελάχιστα πολυώνυμα.
6. $\chi_A(x) = -(x-1)(x-2)$, $m_A(x) = (x-1)(x-2)$, $\chi_B(x) = -(x-2)^3$, $m_B(x) = (x-2)^2$. Δεν είναι όμοιοι αφού έχουν, πχ, διαφορετικές ιδιοτιμές.
7. Παρατηρούμε ότι αν $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $\phi(A) = 0 \Leftrightarrow \phi(A^t) = 0$. Από αυτό έπεται ότι $m_{A^t}(x) \mid m_A(x)$, $m_A(x) \mid m_{A^t}(x)$. Συνεπώς $m_A(x) = m_{A^t}(x)$.
8. Από την υπόθεση έπεται ότι $m_A(x) = x^t$ για κάποιο t . Άρα $\chi_A(x) = (-1)^t x^t$. Το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton.
9. παρόμοιο με το Παράδειγμα 2 στη σελίδα 88, αλλά εδώ έχουμε το ελάχιστο πολυώνυμο στη θέση του χαρακτηριστικού.
10. Έστω ότι $(\phi(x), m_A(x)) = 1$. Τότε $\phi(x)a(x) + m_A(x)b(x) = 1$ για κάποια $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.6. Άρα $\phi(A)a(A) = I$ και ο $\phi(A)$ είναι αντιστρέψιμος. Αντίστροφα, έστω ότι ο $\phi(A)$ είναι αντιστρέψιμος. Έστω $p(x)$ με $\deg p(x) \geq 1$, ένας κοινός παράγοντας των $\phi(x), m_A(x)$. Τότε έχουμε $\phi(x) = p(x)c(x)$, $m_A(x) = p(x)d(x)$ για κάποια $c(x), d(x) \in \mathbb{F}[x]$. Από την πρώτη σχέση παίρνουμε ότι ο $p(A)$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε από τη δεύτερη παίρνουμε $d(A) = 0$. Τότε $m_A(x) \mid d(A)$, άτοπο.
11. Έπεται άμεσα από το Πόρισμα 3.1.4 και το Θεώρημα 3.1.6.
12. Αν B_i είναι βάση του V_i , τότε το $B_1 \cup B_2$ είναι βάση του V (Πόρισμα 2.2.16), οπότε το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 3.1.9.
13. Επεκτείνουμε το σύνολο $\{v_1, v_2\}$ σε βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$. Από τον ορισμό 3.1.13 έπεται ο αντίστοιχος πίνακας της γ_A είναι άνω τριγωνικός.