

## Γραμμική Άλγεβρα II

### Υποδείξεις/Απαντήσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

#### Παράγραφος 2.4

1. Βλ. Παραδείγματα 2-4, σελίδα 88-89. Απαντήσεις i)  $-43A - 190I$  ii)  $-5^{2003} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  iii)  $A^{-1} = -\frac{1}{5}A + \frac{2}{5}I$  iv)  $A^{-3} = \frac{1}{125}A - \frac{12}{125}I$ .
2. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε  $A^2 = A$ , οπότε το ζητούμενο προκύπτει με μια τετριμμένη επαγωγή.
3. Όπως η προηγούμενη άσκηση.
4. Η αντικατάσταση που πραγματοποιείται δεν έχει νόημα.
5. i) Για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  είναι το  $x^2 - 5x + 6$ . ii) Ως  $\phi(x)$  μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε πολλαπλάσιο του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του δεδομένου πίνακα.
6. i) Έχουμε  $\chi_A(x) = (-1)^n x^n$ , οπότε από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε  $A^n = 0$ , για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ , και άρα  $A^k = 0$  για κάθε  $k \geq n$ . ii) Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα έχουμε  $B^3 = B^4 = \dots = 0$ , και επομένως από το διωνυμικό ανάπτυγμα παίρνουμε

$$A^n = (I + B)^n = I + \binom{n}{1}B + \binom{n}{2}B^2 + \binom{n}{3}B^3 + \dots + B^n =$$

$$I + \binom{n}{1}B + \binom{n}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -n & 2n - \frac{3}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Σημείωση.* Το διωνυμικό ανάπτυγμα ισχύει αφού οι πίνακες  $I, B$  μετατίθενται.

7. Έχουμε
  - Ο  $A^2$  μηδενίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του, δηλαδή το  $x^2 - \text{Tr}(A^2)x + \det A^2$ .
  - Αν  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  είναι οι ιδιοτιμές του  $A$ , τότε οι ιδιοτιμές του  $A^2$  είναι οι  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$ . Άρα  $\text{Tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ ,  $\det A = \lambda_1^2 \lambda_2^2$
  - Ισχύουν οι σχέσεις
 
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = (\text{Tr}(A))^2 - 2\det A = a^2 - 2b,$$

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 = (\lambda_1 \lambda_2)^2 = (\det A)^2 = b^2.$$
8. Επειδή οι πίνακες μετατίθενται, ισχύει το διωνυμικό ανάπτυγμα. Επειδή  $AB = 0$ , παίρνουμε  $(A + B)^n = A^n + B^n$  για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ . Συνεπώς
 
$$\chi_A(A + B) = \chi_A(A) + \chi_A(B) - \chi_A(0)I =$$

$$\chi_A(B) - \chi_A(0)I = \chi_A(B) - \chi_A(0)I = \chi_A(B) - (\det A)I.$$