

Γραμμική Άλγεβρα II

Υποδείξεις/Απαντήσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

Παράγραφος 2.3

1. Βλ. Παράδειγμα 3, σελίδα 81. Έχουμε $\chi_A(x) = -(x-2)(x-3)^2$. Ο A δεν είναι διαγωνίσιμος καθώς $\dim V(2) + \dim V(3) = 2 \neq 3$.

2. Και η άλλη ιδιοτιμή είναι πραγματική οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.3.4.

3.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Ναι. Αν ο A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_\nu \end{pmatrix}, \text{ τότε ο } A^2 \text{ είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα της μορφής}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & * & & * \\ 0 & \lambda_2^2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_\nu^2 \end{pmatrix}.$$

Σημείωση. Ισχύει ανάλογο αποτέλεσμα όπου στη θέση του A^2 έχουμε $\phi(A)$, όπου $\phi(x) \in \mathbb{C}[x]$. Τότε $\chi_{\phi(A)}(x) = (-1)^\nu (x - \phi(\lambda_1)) \dots (x - \phi(\lambda_\nu))$.

6. Εφαρμόστε το Θεώρημα 2.3.5 στις f_1, f_2 και θεωρήστε την ένωση των δυο βάσεων.

7. Έστω $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu\}$ μια διατεταγμένη βάση του V τέτοια ώστε ο αντίστοιχος πίνακας της f είναι άνω τριγωνικός (υπόψη ότι έχουμε $F = \mathbb{C}$). Για τους υπόχωρους $W_i = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_i \rangle$, $i = 1, \dots, \nu$, έχουμε $f(W_i) \subseteq W_i$.

10. Έστω ότι $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu \in \mathbb{C}$ είναι οι ιδιοτιμές του $A \in \mathbb{C}^{\nu \times \nu}$. Τότε $\text{Tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_\nu$.

Από $A^\nu = I$, έπεται ότι $\lambda_i^\nu = 1$ για κάθε i και επομένως το μέτρο κάθε λ_i είναι ίσο με 1.

1. Το ζητούμενο προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα.