

Γραμμική Άλγεβρα II

Υποδείξεις/Απαντήσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

Παράγραφος 2.2

1. i) Δεν είναι διαγωνίσιμη αφού δεν έχει ιδιοτιμές. ii) Είναι διαγωνίσιμη αφού έχει 2 διακεκριμένες ιδιοτιμές. Έχουμε $\dim V(1) = \dim V(2) = 1$. iii) Είναι διαγωνίσιμη γιατί $\dim V(1) + \dim V(2) = 2 + 1 = 3$.

2. i) Δεν είναι διαγωνίσιμος γιατί έχει μόνο μια (πραγματική) ιδιοτιμή και $\dim V(3) = 1 \neq 3$. ii) Είναι διαγωνίσιμος αφού έχει 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές. Μια

βάση από ιδιοδιανύσματα είναι $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ iii) είναι διαγωνίσιμος αφού έχει 2

διακεκριμένες ιδιοτιμές. Μια βάση από ιδιοδιανύσματα είναι $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ iv) είναι

διαγωνίσιμος αφού $\dim V(0) + \dim V(1) = 2 + 1 = 3$. Μια βάση από ιδιοδιανύσματα

είναι $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3. Έχουμε $V(-1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, $V(1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ οπότε βλέπουμε ότι

$\dim V(-1) + \dim V(1) = 1 + 2 = 3$ και άρα ο P είναι διαγωνίσιμος. Μια επιλογή για τον

P είναι $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\dim V(3) = 2, \dim V(5) = 1$.

5. Ο πρώτος είναι διαγωνίσιμος αφού έχει 4 διακεκριμένες ιδιοτιμές, ενώ ο δεύτερος δεν είναι αφού $\dim V(0) + \dim V(\sqrt{2}) + \dim V(-\sqrt{2}) = 3 \neq 4$.

6. Βλ. Εφαρμογή 2.2.7.1. Απάντηση $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 2 \times 5^n - 2(-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 2 \times 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}$.

8. Τυπογραφικό λάθος: Ζητάμε 2 και όχι 4 πίνακες. (Μια ιδιοτιμή είναι το 0). Βλ

Εφαρμογή 2.2.7.2. Απάντηση $B = \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

10. Για κάθε a υπάρχουν διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές.

13. Ο πίνακας της f ως προς τη δεδομένη βάση είναι διαγώνιος.

15. Είναι 1 (βλ. Άσκηση 12 της παραγράφου 2.1)

16. i) όχι, ii) $\dim V(-1) = 2, \dim V(i) = \dim V(-i) = 1$

MM

17. Χρησιμοποιήστε την υπόδειξη του βιβλίου και το γεγονός ότι κάθε ιδιόχωρος της f είναι μονοδιάστατος για να αποδείξετε ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα της f είναι ιδιοδιάνυσμα της g .
19. Θεωρείστε ένωση βάσεων.
21. Βλ. άσκηση 15 παράγραφος 2.1