Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Υποδείξεις/Απαντήσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

Παράγραφος 1.4

1. Πρώτα υπολογίστε τους πίνακες της f και μετά εφαρμόστε την Πρόταση 1.4.1.

2. i) Έχουμε $\phi(A)=\begin{pmatrix}\phi(\xi) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \phi(\xi)\end{pmatrix}$, ii) Έχουμε $\phi(A)=\begin{pmatrix}\phi(\xi_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \phi(\xi_m)\end{pmatrix}$

3. $\dim \mathbb{F}^{m\times m}=m^2 \Rightarrow I, A, A^2, ..., A^m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

4. Έστω $\phi(x)=a_m x^m+...+a_0$. Τότε

$$\left.\begin{matrix}\phi(\pi)=0\\ \pi^2=\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left(a_m+...+a_1\right)\pi+a_0 1_V=0\Rightarrow \left(a_m+...+a_1\right)\pi^2+a_0\pi=0\Rightarrow$$

$$a_0(1_V-\pi)=0\Rightarrow a_0=0\Rightarrow x\,\big|\,\phi(x).$$

Επίσης

$$\left.\begin{matrix}\left(a_m+...+a_1\right)\pi+a_0 1_V=0\\ a_0=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a_m+...+a_1=0=a_m+...+a_1+a_0\Rightarrow x-1\,\big|\,\phi(x).$$

5. Έχουμε $\left((-1)^{k-1}A^{k-1}+...+A^2-A+I\right)(A+I)=I$.

6. Αν $a_0\neq 0$, τότε

$$a_n f^n+...+a_1 f+a_0 1_V=0\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{-a_n}{a_0}f^{n-1}+...+\frac{-a_1}{a_0}1_V\right)=\left(\frac{-a_n}{a_0}f^{n-1}+...+\frac{-a_1}{a_0}1_V\right)f=1_V$$