

Γραμμική Άλγεβρα II

Υποδείξεις/Απαντήσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

Παράγραφος 1.3

2. Το 1 είναι ρίζα. Διαιρούμε το δεδομένο πολυώνυμο με το $x-1$ και βρίσκουμε τις ρίζες του πηλίκου.

3. Είναι επί αφού αν $c \in \mathbb{F}$, τότε $f_r(c) = c$. Δεν είναι 1-1. Έχουμε

$\dim \ker f_{4,r} = 5 - \dim \text{Im } f_{4,r} = 4$. Μια βάση του $\ker f_{4,r}$ είναι

$$\{x-r, (x-r)^2, (x-r)^3, (x-r)^4\}.$$

5. Αν $\phi(a) = \theta(a)$ για $m+1$ το πλήθος στοιχεία $a \in \mathbb{F}$, τότε το πολυώνυμο $\phi(x) - \theta(x)$ είναι το μηδενικό από την Πρόταση 1.3.3.

6. Το πηλίκο της διαίρεσης του $\phi(x)$ με το $x - \xi$ είναι (πράξεις ...) το

$$\pi(x) = x^2 + (\xi + 1)x + \xi^2 + \xi - 2. \text{ Έχουμε (πράξεις ...)}$$

$$\pi(\xi^2 - 2) = \xi(\xi^3 + \xi^2 - 2\xi - 1) = 0 \text{ επομένως το } \xi^2 - 2 \text{ είναι ρίζα του } \phi(x).$$

Και οι τρεις ρίζες του $\phi(x)$ είναι πραγματικές.

α τρόπος: Πράγματι, έχει μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$, γιατί $\phi(1)\phi(2) < 0$, και μια άλλη στο $(-1, 0)$, γιατί $\phi(-1)\phi(0) < 0$. Από την Πρόταση 1.3.7 και η τρίτη ρίζα είναι πραγματική.

β τρόπος: Μπορούμε να επιλέξουμε το ξ να είναι πραγματικός από την Πρόταση 1.3.8. Τότε και το $\xi^2 - 2$ είναι πραγματικός, οπότε και η τρίτη ρίζα είναι πραγματική από την Πρόταση 1.3.7.