# Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Υποδείξεις/Απαντήσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων

## Παράγραφος 1.2

1. $\theta(x) = \phi(x)\psi(x) = \left(c\phi(x)\right)\left(c^{-1}\psi(x)\right)$.

2. Αν $\pi(x) = b_m x^m + ... + b_0$, τότε $\phi(x) = c\pi(x) \Rightarrow m = n, a_i = cb_i$ για κάθε $i$.

3. Έχουμε $\phi_1(x)\big|\phi_2(x), \phi_2(x)\big|\phi_1(x) \Rightarrow \phi_1(x) = c\phi_2(x)$, όπου $c \in \mathbb{F}, c \neq 0$.

4. Έστω $d$, $D$ το αριστερό και δεξιό μέλος αντίστοιχα της αποδεικτέας ισότητας. Έχουμε $d\big|\phi_s(x)$ για κάθε $s$. Άρα $d\big|D$. Επίσης $D\big|\phi_s(x)$ για κάθε $s \neq i$. Αλλά $D\big|\phi_i(x) \Rightarrow D\big|\phi_j(x)$, οπότε $D\big|\phi_s(x)$ για κάθε $s$. Άρα $D\big|d$. Επειδή τα $d, D$ είναι μονικά πολυώνυμα, παίρνουμε $d = D$.

5. Έστω $d$, $D$ το αριστερό και δεξιό μέλος αντίστοιχα της αποδεικτέας ισότητας. Έχουμε $d\big|\theta(x), d\big|\phi(x) \Rightarrow d\big|\theta(x) + \mu(x)\phi(x) \Rightarrow d\big|D$.

Επίσης $D\big|\theta(x) + \mu(x)\phi(x), D\big|\phi(x) \Rightarrow D\big|\theta(x)$. Άρα $D\big|d$

6. Έστω $d = \mu\kappa\delta(\phi(x), p(x))$. Τότε $d\big|p(x) \Rightarrow d = 1$ ή $d = cp(x)$, όπου $c \in \mathbb{F}, c \neq 0$. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $p(x)\big|d$ και άρα $p(x)\big|\phi(x)$.

7. Από το Θεώρημα 1.2.6 έχουμε
$1 = a(x)\phi(x) + \beta(x)\theta(x) \Rightarrow \sigma(x) = a(x)\phi(x)\sigma(x) + \beta(x)\left(\theta(x)\sigma(x)\right)$. Επειδή $\phi(x)\big|\theta(x)\sigma(x)$, παίρνουμε $\phi(x)\big|a(x)\phi(x)\sigma(x) + \beta(x)\left(\theta(x)\sigma(x)\right)$, δηλαδή $\phi(x)\big|\sigma(x)$.

8. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο σχέσεις παίρνουμε
$\phi(x)\left(\pi_1(x) - \pi_2(x)\right) = \upsilon_2(x) - \upsilon_1(x)$. Θεωρώντας βαθμούς και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\phi(x) \neq 0$, παίρνουμε $\pi_1(x) - \pi_2(x) = 0$.

9. Ευκλείδειος αλγόριθμος. Δεν είναι μοναδικά.

10. Απάντηση $\phi(x) = \begin{cases} c(x^2+1)(x-1) \\ c(x^2+1)(x-2) \\ c(x^2+1)(x-1)(x-a), a \neq 2 \\ c(x^2+1)(x-2)(x-b), b \neq 1 \end{cases}$, όπου $c$ μη μηδενική σταθερά.

11. Αν $D = \mu\kappa\delta\left(\dfrac{\phi(x)}{d(x)}, \dfrac{\theta(x)}{d(x)}\right)$, τότε $Dd(x)\big|\phi(x),\ Dd(x)\big|\theta(x) \Rightarrow Dd(x)\big|d(x)$.

12. Για να δείξτε ότι $\phi(x)\theta(x)\big|\varepsilon\kappa\pi(\phi(x), \theta(x))$ εφαρμόστε την Πρόταση 1.2.10. Η σχέση $\varepsilon\kappa\pi(\phi(x), \theta(x))\big|\phi(x)\theta(x)$ είναι προφανής.

13. και 14. Αποδείξτε καθεμιά από τις 4 ισότητες δείχνοντας ότι κάθε μέλος διαιρεί το άλλο.

15. α τρόπος: Εφαρμόστε την Πρόταση 1.2.12, τον Ορισμό 1.2.13 και τη σχέση $\xi_i + \nu_i = \max\{\xi_i, \nu_i\} + \min\{\xi_i, \nu_i\}$.

β τρόπος: Αν τα $\phi(x), \theta(x)$ είναι σχετικά πρώτα, τότε η αποδεικτέα ισότητα ισχύει από την άσκηση 12. Στη γενική περίπτωση, εφαρμόστε τις ασκήσεις 11,13 για να δείξτε ότι

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\kappa\pi(\phi(x),\theta(x))\mu\kappa\delta(\phi(x),\theta(x)) = \\
&\varepsilon\kappa\pi(d\frac{\phi(x)}{d}, d\frac{\theta(x)}{d})\mu\kappa\delta(d\frac{\phi(x)}{d}, d\frac{\theta(x)}{d}) = \\
&d^2\frac{\phi(x)}{d}\frac{\theta(x)}{d} = \phi(x)\theta(x),
\end{aligned}$$

όπου $d = \mu\kappa\delta(\phi(x),\theta(x))$.

16. Αποδείξτε ότι το $p_1^{\mu_1}(x)\ldots p_m^{\mu_m}(x)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του Ορισμού 1.2.5. Για την ιδιότητα (iii) θα χρειαστείτε το Θεώρημα 1.2.1.

17. α τρόπος: Εφαρμόστε τον Ευκλείδειο αλγόριθμο για να βρείτε το μκδ και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την άσκηση 15.

β τρόπος: Αναλύστε τα πολυώνυμα σε γινόμενα αναγώγων και χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 1.2.13.

γ τρόπος: Έχουμε $\theta(x) = (x+3)(x-2)$ και επειδή οι –3, 2 δεν είναι ρίζες του $\phi(x)$, έχουμε $\varepsilon\kappa\pi(\phi(x),\theta(x)) = \phi(x)\theta(x)$.