

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι
Σεπτέμβριος 2006

Συνοπτικές ενδεικτικές λύσεις

- 1) α. Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη στα a, b, c τέτοια ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

$$x - y + 2z = a$$

$$2x - 3y + z = b$$

$$3x - y + cz = 1$$

$$x + 2y + (c - 1)z = 1 - b.$$

- β. Έστω ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθούν οι τιμές του k ώστε το σύνολο $\{v_1, kv_2 + v_3, kv_1 + v_2 + kv_3\}$ να είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Λύση

α Μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στον επαυξημένο πίνακα παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & -c+12 & -1+7a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ οπότε η ζητούμενη συνθήκη είναι}$$

$$-c + 12 = -1 + 7a - 2b = 0.$$

β (Βλ. άσκηση 7 στο <http://edu.eap.gr/pli/pli12/yliko/edygrkef5t.zip>) Η ορίζουσα που

$$\text{αντιστοιχεί στο δεύτερο σύνολο είναι } \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} = k^2 - 1. \text{ Συνεπώς η απάντηση}$$

είναι $k \neq \pm 1$.

- 2) Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε $|u| = |v| = 1$ και η γωνία τους είναι $\frac{\pi}{4}$.

- a. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των $u + 2v$, $u - v$.
b. Να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου που παράγεται από τα $u, v, u + 2v$, $u - v$.

Λύση

α Βλ. άσκηση 12 στο <http://edu.eap.gr/pli/pli12/yliko/edygrkef5t.zip>

β Η διάσταση είναι 2 γιατί τα u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ως μη μηδενικά και μη συγγραμμικά από την υπόθεση) και τα $u + 2v, u - v$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u, v .

3) Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Να βρεθεί ένας ορθομοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε ο $U^{-1}AU$ είναι διαγώνιος.
- Να βρεθούν δυο διαφορετικοί πίνακες X τέτοιοι ώστε $X^2 = A$.

Λύση

a Ο A είναι συμμετρικός. Συνεπώς υπάρχει U με τις ζητούμενες ιδιότητες. Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του A και τα κανονικοποιούμε (Gramm-Schmidt δεν χρειάζεται)

οπότε $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. (βλ. Βιβλίο Τόμος Β, σελίδα 62-63). Έχουμε $A = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^{-1}$, οπότε μπορούμε

να θεωρήσουμε $X = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} U^{-1}$, $X = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} U^{-1}$.

- 4) Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα στοιχεία $(1,1,-1), (2,1,0), (4,3,-2), (8,5,-3)$.
- Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του V .
 - Να βρεθεί υπόχωρος U τέτοιος ώστε $U + V = \mathbb{R}^3$.

Λύση

a Βλέπε άσκηση 6 του <http://edu.eap.gr/pli/pli12/yliko/edygrkef7t.zip> Η ζητούμενη διάσταση είναι 3.

b Από το a έπεται ότι $V = \mathbb{R}^3$ και συνεπώς ως U μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε υπόχωρο!

- 5) a. Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τέτοιος ώστε για κάθε j , $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$. Αποδείξτε ότι

υπάρχει μη μηδενικό $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, τέτοιο ώστε $AX = X$.

- b. Εξετάστε αν υπάρχει επί γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Δώστε ένα παράδειγμα 1-1 γραμμικής απεικόνισης $\mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Λύση

a Αρκεί να δειχθεί ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του A . Προσθέτοντας στην πρώτη γραμμή του πίνακα $A - I$ κάθε άλλη γραμμή, προκύπτει πίνακας του οποίου η πρώτη γραμμή είναι η μηδενική. Άρα $\det(A - I) = 0$.

- b. Δεν υπάρχει επί γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ αφού $\dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = 4 < 9 = \dim \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Παράδειγμα $\mathbb{R}^{2 \times 2} \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Απαντήστε και στα 5 θέματα. Αυτά είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.
Καλή επιτυχία.