

Θέμα 1

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος $AX=0$ και η διάσταση του χώρου των λύσεων.
2. Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με αντίστοιχο πίνακα τον A ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί μια βάση της εικόνας της f .
3. Εξετάστε αν ο πίνακας $B^{-1}AB^3$ είναι αντιστρέψιμος, όπου B είναι ένας αντιστρέψιμος 3×3 πραγματικός πίνακας.
4. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A .
5. Εξετάστε αν ο A είναι διαγωνίσιμος πίνακας.

Λύση

1. Μετά από τρεις γραμμοπράξεις ο A παίρνει τη μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, οπότε οι

λύσεις είναι $\left\{ z(-1, \frac{-1}{3}, 1) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$ και η ζητούμενη διάσταση είναι 1.

2. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $\dim \ker f = 1$ και άρα $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$. Συνεπώς αρκεί να βρεθούν 2 γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A , πχ οι πρώτες 2.
3. Δεν είναι αντιστρέψιμος αφού $\det B^{-1}AB^3 = \det B^{-1} \det A \det B^3 = 0$.
4. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $x(x+2)^2$, οι ιδιοτιμές είναι 0, -2 και οι

ιδιόχωροι είναι $V(0) = \left\{ x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$, $V(-2) = \left\{ x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

5. Τα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (πχ η ορίζουσά τους δεν είναι 0) και συνεπώς ο A είναι διαγωνίσιμος.

Θέμα 2

Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$v_1 = (1, 1, -1, -1), v_2 = (1, 2, 3, -1), v_3 = (4, 7, 8, -4).$$

1. Εξετάστε αν $(5, 9, 11, -5) \in V$.
2. Να βρεθεί η διάσταση του V .
3. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του V .
4. Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^4$ που είναι κάθετο προς κάθε διάνυσμα του V .
5. Έστω $U = \{(x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Δείξτε ότι $\dim V + \dim U = \dim(U + V)$.

Λύση

1. Εξετάζουμε αν υπάρχουν $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(5, 9, 11, -5) = x\nu_1 + y\nu_2 + z\nu_3$,

$$\text{δηλαδή αν υπάρχει λύση του συστήματος } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 8 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Εργαζόμενοι με τον επαυξημένο πίνακα βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ από την οποία συμπεραίνουμε ότι υπάρχει λύση.}$$

2. Τα ν_1, ν_2, ν_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι, το ομογενές σύστημα που

$$\text{προκύπτει από } x\nu_1 + y\nu_2 + z\nu_3 = 0 \text{ έχει πίνακα συντελεστών τον } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 8 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

και είδαμε από στον υπολογισμό του προηγούμενου υποερωτήματος ότι η

$$\text{κλιμακωτή μορφή του είναι } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τα ν_1, ν_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα $\dim V = 2$.

3. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt στη βάση $\{\nu_1, \nu_2\}$

$$\text{και βρίσκουμε τη βάση } \left\{ \frac{u_1}{|u_1|}, \frac{u_2}{|u_2|} \right\}, \text{ όπου } u_1 = (1, 1, -1, -1), u_2 = \frac{1}{4}(3, 7, 13, -3).$$

4. Αρκεί να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα (x, y, z, w) κάθετο και στο ν_1 και στο ν_2 . Λαμβάνοντας εσωτερικά γινόμενα, ζητάμε μη μηδενική λύση του συστήματος

$$x + y - z - w = 0$$

$$x + 2y + 3z - w = 0. \text{ Μια τέτοια λύση είναι η } (5, -4, 1, 0).$$

5. Αρκεί να δειχτεί ότι $U \cap V = \{0\}$. Έστω $(x, y, 0, 0) \in V$. Τότε υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$x = \lambda + \mu$$

$$y = \lambda + 2\mu$$

$$\text{τέτοια ώστε } (x, y, 0, 0) = \lambda\nu_1 + \mu\nu_2, \text{ οπότε } \begin{matrix} 0 = -\lambda + 3\mu \\ 0 = -\lambda - \mu \end{matrix} \text{ από το οποίο έπεται ότι}$$

$$0 = -\lambda - \mu$$

$$x = y = 0.$$
