

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές των Θεωρημάτων Δομής

5.1 Μελέτη μιας γραμμικής απεικόνισης $\alpha: V \rightarrow V$ μέσω των Θεωρημάτων Δομής

Έστω F ένα σώμα, V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του F και $\alpha: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση.

Όπως ξέρουμε το V εφοδιάζεται με τη δομή ενός $F[x]$ -προτύπου μέσω της α ως

$$f(x) \cdot v = (f(\alpha))(v)$$

και αυτό το $F[x]$ -πρότυπο το συμβολίζουμε με V_α .

Να υπενθυμίσουμε ότι ένα υπόχωρος K του V είναι ένα $F[x]$ -υποπρότυπο του V_α αν και μόνο αν, ο K είναι α -αναλλοίωτος, δηλαδή $\alpha(K) \subseteq K$.

Πριν αρχίσουμε τη μελέτη του $F[x]$ -προτύπου V_α , ν' αναφέρουμε ένα γνωστό μας αποτέλεσμα.

5.1.1 Πρόταση. Υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\hat{v} = (v_1, \dots, v_\rho)$ του V τέτοια ώστε

$$(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_\kappa \end{pmatrix}, \quad A_i \in F^{v_i \times v_i} \quad 1 \leq i \leq \kappa$$

αν και μόνο αν $V = V_i \oplus \dots \oplus V_\kappa$, όπου V_i υπόχωροι του V τέτοιοι ώστε $\alpha(V_i) \subseteq V_i$, $1 \leq i \leq \kappa$.

Απόδειξη. Έστω $\hat{v} = (v_1, \dots, v_\rho)$ τέτοια ώστε $(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_\kappa \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})$,

$A_i \in F^{v_i \times v_i}$ $1 \leq i \leq \kappa$. Προφανώς $\rho = v_1 + \dots + v_\kappa$. Αν $V_i = \langle v_{v_{i-1}+1}, \dots, v_{v_{i-1}+v_i} \rangle$, $v_0 = 0$,

τότε από την (*) έχουμε ότι $\alpha(v_j) = \sum_{\kappa=1}^{\rho} a_{\kappa j} v_\kappa$ άρα $\alpha(v_j) \in V_i$ για κάθε $v_{i-1} + 1 \leq v_{i-1} + v_i$, συνεπώς $\alpha(V_i) \subseteq V_i$ και μάλιστα αν $\hat{v}_i = (v_{v_{i-1}+1}, \dots, v_{v_{i-1}+v_i})$ τότε $(\alpha|_{V_i} : \hat{v}_i, \hat{v}_i) = A_i$, $1 \leq i \leq \kappa$.

Αντίστροφα έστω ότι $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_\kappa$ όπου V_i υπόχωροι του V τέτοιοι ώστε $\alpha(V_i) \subseteq V_i$.

Έστω $d_i = \dim_F V_i$ και $\hat{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{id_i})$ μια διατεταγμένη βάση του V_i . Αν $\hat{v} = (v_{11}, \dots, v_{1d_1}, v_{21}, \dots, v_{2d_2}, \dots, v_{\kappa 1}, \dots, v_{\kappa d_\kappa})$ τότε $\hat{v}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V

και $(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_\kappa \end{pmatrix}$ όπου $A_i = (\alpha|_{V_i} : \hat{v}_i, \hat{v}_i) \in F^{d_i \times d_i}$.

Συνεπώς υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\hat{v}$ του V τέτοια ώστε

$(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_\kappa \end{pmatrix}$ αν και μόνο αν το $F[x]$ -πρότυπο V_α αναλύεται ως ευθύ

άθροισμα κ $F[x]$ -υποπροτύπων του.

5.1.2 Πρόταση. Το V_α είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο περιοδικό $F[x]$ -πρότυπο.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι το V_α είναι ένα περιοδικό $F[x]$ -πρότυπο. Έστω $v \in V_\alpha$. Θα βρούμε ένα $\varphi(x) \in F[x]$ με $\varphi(x) \neq 0$ και $\varphi(x) \cdot v = (\varphi(\alpha))(v) = 0$.

Πράγματι, επειδή $\dim_F V < \infty$, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος κ με $v, \alpha(v), \dots, \alpha^\kappa(v)$ να είναι F -γραμμικά εξαρτημένα. Άρα υπάρχει $(r_0, r_1, \dots, r_\kappa) \neq 0$, $r_i \in F$ και $r_0 v + r_1 \alpha(v) + \dots + r_\kappa \alpha^\kappa(v) = 0$.

Αν $\varphi(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_\kappa x^\kappa$ τότε $\varphi(x) \neq 0$ και $\varphi(x) \cdot v = \varphi(\alpha)(v) = 0$, άρα το V_α είναι ένα περιοδικό $F[x]$ -πρότυπο.

Τώρα αν $v_1, \dots, v_\nu$ μια βάση του V τότε το V ως F -πρότυπο παράγεται από το $\{v_1, \dots, v_\nu\}$ και επειδή $F \subseteq F[x]$ έπεται ότι το V_α ως $F[x]$ -πρότυπο παράγεται από το $\{v_1, \dots, v_\nu\}$.

Το θεώρημα δομής για πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα όπου R α.π.κ.ι μας λέει ότι κάθε τέτοιο πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα κυκλικών R -προτύπων.

Να εξετάσουμε τι σημαίνει το V_α να είναι κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο τάξης $\varphi(x)$. Έστω ότι $V_\alpha \neq 0$.

Επειδή V_α είναι κυκλικό, σημαίνει ότι υπάρχει $w \in V_\alpha$ με $V_\alpha = F[x]w = \{f(x)w \mid f(x) \in F[x]\} = \{f(\alpha)(w) \mid f(x) \in F[x]\}$ και $F[x] \rightarrow V_\alpha$ είναι ένας $F[x]$ -
 $f(x) \rightarrow f(\alpha)(w)$

επιμορφισμός άρα $V_\alpha \cong F[x]/I$ με $I = \varphi(x)F[x]$.

Επειδή $V_\alpha \neq 0$ και περιοδικό έπεται ότι $\varphi(x)$ είναι μη αντιστρέψιμο στοιχείο του $F[x]$ και $\varphi(x) \neq 0$ άρα είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ≥ 1 και επειδή η τάξη του V_α είναι $[\varphi(x)]$ χ.β.τ.γ. το θεωρούμε μονικό.

Επειδή $\varphi(x)$ είναι η τάξη του V_α έπεται ότι $\psi(x)V_\alpha = 0$ αν και μόνο αν $\varphi(x) \mid \psi(x)$. Συνεπώς $\psi(\alpha): V \rightarrow V$ είναι η μηδενική απεικόνιση αν και μόνο αν $\varphi(x) \mid \psi(x)$.

Άρα το $\varphi(x)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο της α , το οποίο συμβολίζουμε με $\min_\alpha(x)$. Συνεπώς, δείξαμε ότι

5.1.3 Πρόταση. Αν V_α είναι ένα κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο τότε η τάξη του $V_\alpha = \min_\alpha(x)$.

Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε ότι η διάσταση του V επί του F , αν V_α είναι ένα κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο, ισούται με το βαθμό της τάξης του V_α .

5.1.4 Πρόταση. Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του F και $\alpha: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν V_α είναι κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο τάξης $\varphi(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + x^\kappa$ και $V_\alpha = \langle w_0 \rangle$, τότε $w_0, \alpha(w_0), \dots, \alpha^{\kappa-1}(w_0)$ είναι μια βάση του V . Ιδιαίτερα, $\dim_F V = \deg \varphi(x)$.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι τα στοιχεία $w_0, \alpha(w_0), \dots, \alpha^{\kappa-1}(w_0)$ είναι F -γραμμικά ανεξάρτητα.

Πράγματι, έστω $\lambda_0 w_0 + \lambda_1 \alpha(w_0) + \dots + \lambda_{\kappa-1} \alpha^{\kappa-1}(w_0) = 0$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{\kappa-1} x^{\kappa-1} \in F[x]$ τότε $f(\alpha)(w_0) = 0$ δηλαδή $f(x)w_0 = 0$ άρα $\varphi(x) \mid f(x)$ άρα $f(x) = 0$, συνεπώς $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{\kappa-1} = 0$. Μένει να δείξουμε ότι τα στοιχεία $w_0, \alpha(w_0), \dots, \alpha^{\kappa-1}(w_0)$ παράγουν τον V .

Πράγματι, έστω $v \in V$. Επειδή $V_\alpha = \langle w_0 \rangle = F[x]w_0$, υπάρχει $\rho(x) \in F[x]$ με $v = \rho(x)w_0 = \rho(\alpha)(w_0)$. Τώρα $\rho(x) = q(x)\varphi(x) + r(x)$ όπου $r(x) = 0$ ή $\deg r(x) < \deg \varphi(x)$. Αν $v \neq 0$ τότε $r(x) \neq 0$, έστω $r(x) = \delta_0 + \delta_1 x + \dots + \delta_\sigma x^\sigma$, $\sigma < \kappa$ και $v = \rho(\alpha)(w_0) = r(\alpha)(w_0) = \delta_0 w_0 + \delta_1 \alpha(w_0) + \dots + \delta_\sigma \alpha^\sigma(w_0)$.

Στο επόμενο Πόρισμα βλέπουμε ότι ο πίνακας της α ως προς τη βάση του V που βρήκαμε έχει απλή μορφή.

5.1.5 Πόρισμα. Έστω V_α ένα κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο τάξης $\varphi(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + x^\kappa$ και $V_\alpha = \langle w \rangle$. Αν $\hat{w} = (w_0, \alpha(w_0), \dots, \alpha^{\kappa-1}(w_0))$ τότε

$$(\alpha : \hat{w}, \hat{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\gamma_0 \\ 1 & 0 & \vdots & -\gamma_1 \\ \vdots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma_{\kappa-1} \end{pmatrix}.$$

Η απόδειξή του αφήνεται ως άσκηση.

5.1.6 Ορισμός. Έστω $f(x) \in F[x]$ ένα μονικό πολυώνυμο, $f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_{\nu-1} x^{\nu-1} + x^\nu$, $\nu \geq 1$. Τότε ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\gamma_0 \\ 1 & 0 & \vdots & -\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma_{\kappa-1} \end{pmatrix} \in F^{\nu \times \nu}$$

λέγεται συνοδός πίνακας του $f(x)$ και συμβολίζεται με $\Sigma(f(x))$.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι το V_α είναι ένα κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο αν και μόνο αν υπάρχει μια διατεταγμένη βάση του V , ως προς την οποία, ο πίνακας της α είναι ο συνοδός πίνακας κάποιου πολυωνύμου.

5.1.7 Πρόταση. Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του F και $\alpha : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε το V_α είναι ένα κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο αν και μόνο αν υπάρχει $\hat{v}$ μια διατεταγμένη βάση του V και $\varphi(x) \in F[x]$ έτσι ώστε

$$(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \Sigma(\varphi(x)).$$

Επιπλέον, ισχύει ότι $\varphi(x) = \eta$ τάξη του $V_\alpha = \min_\alpha(x)$.

Απόδειξη. Δείξαμε πριν ότι, αν V_α είναι κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο τάξης $\varphi(x)$ τότε $\varphi(x) = \min_\alpha(x)$ και ότι Πρόταση , Πόρισμα , υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\hat{v}$ του V με $(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \Sigma(\varphi(x))$.

Έστω τώρα ότι υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\hat{v}$ του V με

$$(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma_0 \\ 1 & \vdots & -\gamma_1 \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 1 & -\gamma_{v-1} \end{pmatrix} \in F^{v \times v}$$

και $\varphi(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_{v-1} x^{v-1} + x^v \in F[x]$.

Αν $\hat{v} = (v_0, \dots, v_{v-1})$ τότε από την (*) έπεται ότι $v_1 = \alpha(v_0)$, $v_2 = \alpha(v_1) = \alpha^2(v_0)$, ..., $v_{v-1} = \alpha^{v-1}(v_0)$ άρα $V_\alpha = F[x]v_0$ δηλαδή το V_α είναι ένα κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο.

Τώρα $\alpha^v(v_0) = \alpha(\alpha^{v-1}(v_0)) = \alpha(v_{v-1}) \stackrel{\text{από την (*)}}{=} -\gamma_0 v_0 - \gamma_1 \alpha(v_0) - \dots - \gamma_{v-1} \alpha^{v-1}(v_0)$.

Συνεπώς $\varphi(\alpha)(v_0) = 0$ και $\varphi(\alpha)(v_i) = \varphi(\alpha)(\alpha^i(v_0)) = \alpha^i(\varphi(\alpha)(v_0)) = 0$, $i = 1, \dots, v-1$, άρα $\varphi(\alpha)$ είναι η μηδενική απεικόνιση στο V άρα $\varphi(x) |$ τάξη του V_α .

Αν τώρα τάξη του $V_\alpha = \sigma(x) = \delta_0 + \delta_1 x + \dots + \delta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + x^\kappa$ με $\kappa < v$, τότε $0 = \sigma(\alpha)(v_0) = \delta_0 v_0 + \delta_1 \alpha(v_0) + \dots + \delta_{\kappa-1} \alpha^{\kappa-1}(v_0) + \alpha^\kappa(v_0)$ το οποίο δεν ισχύει επειδή $v_0, v_1, \dots, v_\kappa$ είναι F -γραμμικά ανεξάρτητα, άρα $\kappa \geq v$ άρα $\varphi(x) =$ τάξη του V_α .

Το ακόλουθο θεώρημα έπεται από το Θεώρημα Δομής II και το χαρακτηρισμό των κυκλικών $F[x]$ -προτύπων που βρήκαμε.

5.1.8 Θεώρημα. Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του F και $\alpha : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\hat{v}$ του V με

$$(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \Sigma(d_v) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(d_\kappa) \end{pmatrix}, \text{ όπου } d_i \in F[x], 1 \leq i \leq \kappa \text{ και } d_1 | d_2 | \dots | d_\kappa.$$

Επιπλέον αν υπάρχει $\hat{u}$ διατεταγμένη βάση του V με

$$(\alpha : \hat{u}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} \Sigma(c_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(c_\rho) \end{pmatrix} \text{ με } c_j \in F[x], 1 \leq j \leq \kappa \text{ και } c_1 | c_2 | \dots | c_\rho$$

τότε $\rho = \kappa$ και $d_i = c_i$, $1 \leq i \leq \kappa$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το $F[x]$ -πρότυπο V_α . Επειδή το V_α είναι ένα πεπερασμένο παραγόμενο περιοδικό $F[x]$ -πρότυπο, από το Θεώρημα Δομής II έπεται ότι το V_α αναλύεται ως ευθύ άθροισμα

$$V_\alpha = W_1 \oplus \cdots \oplus W_\kappa$$

όπου W_i είναι κυκλικά $F[x]$ -υποπρότυπα του V_α τάξης d_i με d_i μη αντιστρέψιμο στοιχείο του $F[x]$ και $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_\kappa$.

Από την Πρόταση 5.1.1 και την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\hat{v}$ του V με

$$(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \Sigma(d_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(d_\kappa) \end{pmatrix}.$$

Έστω τώρα ότι υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\hat{u}$ του V με

$$(\alpha : \hat{u}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} \Sigma(c_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(c_\rho) \end{pmatrix}$$

και $c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_\rho$.

Τότε πάλι από την Πρόταση 5.1.1 και την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι

$$V_\alpha = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_\rho$$

όπου Z_i κυκλικό $F[x]$ -υποπρότυπο του V_α τάξης c_i .

Από το Θεώρημα Δομής II τώρα έπεται ότι $\rho = \kappa$ και $d_i = c_i$, $1 \leq i \leq \kappa$.

5.1.9 Πόρισμα. Έστω $A \in F^{v \times v}$. Τότε ο A είναι όμοιος προς μοναδικό πίνακα της μορφής

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \Sigma(d_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(d_\kappa) \end{pmatrix} \text{ με } d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_\kappa.$$

$H(*)$ λέγεται κανονική μορφή του A .

Απόδειξη. Έστω

$$\gamma_A : F^{v \times 1} \rightarrow F^{v \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}$$

$$\text{τότε } (\gamma_A : \hat{E}, \hat{E}) = A \text{ όπου } \hat{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{v} = (v_1, \dots, v_v)$ του $F^{v \times 1}$ έτσι ώστε

$$(\gamma_A : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \Sigma(d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \Sigma(d_\kappa) \end{pmatrix} \text{ με } d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\kappa,$$

άρα αν $S = (S^{(1)} \dots S^{(v)}) \in F^{v \times v}$ με $S^{(i)} = v_i$ τότε

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \Sigma(d_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(d_\kappa) \end{pmatrix}.$$

Αν τώρα υπάρχει $T \in F^{v \times v}$ με

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \Sigma(c_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(c_\rho) \end{pmatrix} \text{ και } c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_\rho$$

τότε αν $\hat{u} = (T^{(1)}, \dots, T^{(v)})$ έχουμε ότι

$$(\gamma_A : \hat{u}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} \Sigma(c_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(c_\rho) \end{pmatrix} \text{ με } c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_\rho.$$

Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι $\rho = \kappa$ και $c_i = d_i$, $1 \leq i \leq \kappa$.

Συνεπώς δείξαμε ότι:

Υπάρχει μια $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων ομοιότητας των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το F και των ακολουθιών μη σταθερών μονικών πολυωνύμων $d_1, d_2, \dots, d_\kappa$ επί του F που ικανοποιούν:

$$(1) \quad d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\kappa$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \deg d_i = n.$$

5.1.10 Παράδειγμα. Για να βρούμε το πλήθος των κλάσεων ομοιότητας των 3×3 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{Z}_p$ αρκεί να βρούμε το πλήθος των ακολουθιών μη σταθερών μονικών πολυωνύμων επί του $\mathbb{Z}_p$, $d_1, \dots, d_\kappa$ που ικανοποιούν

$$d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\kappa \text{ και } \sum_{i=1}^{\kappa} \deg d_i = 3. \quad (*)$$

Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (1) αν $\deg d_1 = 1$ τότε η $\deg d_2 = 1$ οπότε $\kappa = 3$ και $d_1 = d_2 = d_3$, η $\deg d_2 = 2$ οπότε $\kappa = 2$ και $d_2 = d_1(x + a)$.
- (2) Προφανώς δεν είναι δυνατόν $\deg d_1 = 2$ αφού τότε θα πρέπει $\kappa \geq 2$ και $\deg d_2 \geq 2$ άρα $\deg d_1 + \deg d_2 \geq 4$.

Άρα μένει και η περίπτωση:

- (3) $\deg d_1 = 3$ οπότε, τότε $\kappa = 1$.

Επειδή τώρα έχουμε p^i μονικά πολυώνυμα βαθμού i επί του $\mathbb{Z}_p$, η (1) μας δίνει $p + p^2$ και η (2) p^3 ακολουθίες της μορφής (*) άρα το πλήθος των κλάσεων ομοιότητας των 3×3 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{Z}_p$ είναι $p + p^2 + p^3$.

Η ακόλουθη πρόταση δίνει τη σχέση του χαρακτηριστικού και ελαχίστου πολυωνύμου της $\alpha: V \rightarrow V$ με τους αναλλοίωτους παράγοντες του $F[x]$ -προτύπου,

V_α . Ως άμεσα πορίσματα αυτής της σχέσης παίρνουμε το Θεώρημα Cayley-Hamilton καθώς και το ότι τα πολυώνυμα $\min_\alpha(x)$ και $\chi_\alpha(x)$ έχουν τους ίδιους ανάγωγους παράγοντες στην ανάλυσή τους.

5.1.11 Πρόταση. Έστω V διανυσματικός χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης και $\alpha: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $V_\alpha = W_1 \oplus \dots \oplus W_\kappa$ όπου W_i κυκλικά $F[x]$ -πρότυπα τάξης d_i με d_i μη σταθερά μονικά πολυώνυμα και $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\kappa$ τότε

$$(1) \quad \min_\alpha(x) = d_\kappa$$

$$(2) \quad \chi_\alpha(x) = d_1 d_2 \dots d_\kappa.$$

Απόδειξη. Επειδή $d_i \mid d_\kappa$ έπεται ότι $d_\kappa W_i = 0$ για κάθε i άρα $d_\kappa V_\alpha = 0$ δηλαδή $d_\kappa(\alpha)$ είναι η μηδενική απεικόνιση επί του V άρα $\min_\alpha(x) \mid d_\kappa$.

Τώρα $\min_\alpha(x) V_\alpha = 0$ άρα $\min_\alpha(x) W_\kappa = 0$ συνεπώς $d_\kappa \mid \min_\alpha(x)$. Άρα $d_\kappa, \min_\alpha(x)$ είναι συντροφικά και επειδή είναι μονικά έπεται ότι $d_\kappa = \min_\alpha(x)$.

Ξέρουμε ότι υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\hat{v}$ του V με

$$(\alpha: \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \Sigma(d_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(d_\kappa) \end{pmatrix}$$

$$\text{άρα } \chi_\alpha(x) = \chi_{\Sigma(d_1)}(x) \dots \chi_{\Sigma(d_\kappa)}(x).$$

Στην επόμενη Πρόταση θα δείξουμε ότι $\chi_{\Sigma(\varphi(x))}(x) = \varphi(x)$ για κάθε μονικό πολυώνυμο $\varphi(x)$ και με αυτό τελειώνει η απόδειξη της (2) της προηγούμενης πρότασης.

5.1.12 Πρόταση. Έστω $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{v-1} x^{v-1} + x^v \in F[x]$ τότε $\chi_{\Sigma(\varphi(x))}(x) = \varphi(x) = \min_{\Sigma(\varphi(x))}(x)$.

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $\min_{\Sigma(\varphi(x))}(x) = \varphi(x)$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι $\chi_{\Sigma(\varphi(x))}(x) = \varphi(x)$. Για $n=1$ $\varphi(x) = a_0 + x$ και $\Sigma(\varphi(x)) = (-a_0)$ άρα $\chi_{\Sigma(\varphi(x))}(x) = \det(x + a_0) = x + a_0$.

Έστω τώρα $n > 1$.

$$\chi_{\Sigma(\varphi(x))}(x) = \det |I_n x - \Sigma(\varphi(x))| = \det \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & & x & a_{n-2} \\ 0 & & & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix} =$$

αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή έχουμε

$$= x \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ -1 & \vdots & \vdots \\ 0 & x & \vdots \\ 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n-1} a_0 (-1)^{n-1} = x \chi_{\Sigma(\tilde{\varphi}(x))}(x) + a_0,$$

όπου $\tilde{\varphi}(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-2} + x^{n-1}$. Άρα από υπόθεση επαγωγής έχουμε ότι

$$\chi_{\Sigma(\tilde{\varphi}(x))}(x) = x(a_1 + a_2 x + x + \cdots + a_{n-1} x^{n-2} + x^{n-1}) + a_0 = \varphi(x).$$

Ως άμεσα πορίσματα παίρνουμε

5.1.13 Πόρισμα (Θεώρημα Cayley-Hamilton). Αν $\alpha: V \rightarrow V$ γραμμική (αντίστοιχα $A \in F^{n \times n}$) τότε $\min_\alpha(x) \mid \chi_\alpha(x)$ (αντίστοιχα $\min_A(x) \mid \chi_A(x)$).

5.1.14 Πόρισμα. Αν $\alpha: V \rightarrow V$ γραμμική (αντίσ. $A \in F^{n \times n}$) τότε τα πολυώνυμα $\min_\alpha(x)$ και $\chi_\alpha(x)$ έχουν τους ίδιους ανάγωγους παράγοντες στην ανάλυσή τους.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το ότι

$$\min_\alpha(x) \mid \chi_\alpha(x) \quad \text{και} \quad \chi_\alpha(x) = d_1 \cdots d_k \mid d_k \cdots d_k = \min_\alpha(x)^k.$$

Το Θεώρημα Δομής I (στοιχειώδεις διαιρέτες) μας δίνει ένα χαρακτηρισμό των κλάσεων ομοιότητας μέσω στοιχειωδών διαιρετών. Συγκεκριμένα:

5.1.15 Θεώρημα. Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του F και $\alpha: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{v}$ του V με

$$(\alpha: \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \Sigma(\varphi_1(x)) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(\varphi_\lambda(x)) \end{pmatrix} \quad (*)$$

όπου κάθε $\varphi_i(x)$ είναι δύναμη κάποιου ανάγωγου επί του F πολωνύμου.

Επιπλέον αν υπάρχει διατεταγμένη βάση $\hat{u}$ του V τέτοια ώστε

$$(\alpha: \hat{u}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} \Sigma(\psi_1(x)) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(\psi_\rho(x)) \end{pmatrix}$$

όπου κάθε $\psi_i(x)$ είναι δύναμη κάποιου ανάγωγου επί του F πολωνύμου τότε $\rho = \lambda$ και υπάρχει $\pi \in S_\rho$ με $\varphi_i(x) = \psi_{\sigma(i)}(x)$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Δομής I έπεται ότι το V_α αναλύεται ως ευθύ άθροισμα κυκλικών υποπροτύπων τάξης δύναμη πρώτου στοιχείου του $F[x]$. Επιπλέον μας λέει ότι η ανάλυση αυτή είναι μοναδική ως προς το πλήθος των όρων και της τάξης των μη μηδενικών κυκλικών υποπροτύπων.

Το θεώρημα τώρα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης και της Πρότασης ...

5.1.16 Πόρισμα. Κάθε πίνακας $A \in F^{v \times v}$ είναι όμοιος προς ένα πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} \Sigma(\varphi_1(x)) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \Sigma(\varphi_\lambda(x)) \end{pmatrix} \quad (*)$$

όπου κάθε $\varphi_i(x)$ είναι δύναμη ενός αναγωγίου επί του F πολωνύμου.

Επιπλέον, ο (*) είναι μοναδικός, ως προς μετάθεση των $\varphi_1(x), \dots, \varphi_\lambda(x)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από το προηγούμενο θεώρημα και το ότι ο πίνακας A είναι όμοιος προς ένα πίνακα B αν και μόνο αν υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\hat{u}$ του $F^{n \times 1}$ τέτοια ώστε $(\gamma_A : \hat{u}, \hat{u}) = B$.

5.1.17 Ορισμός. Τα στοιχεία $\varphi_1(x), \dots, \varphi_\lambda(x)$ του $F[x]$ λέγονται οι στοιχειώδεις διαιρέτες του A .

5.1.18 Πόρισμα. Έστω $A \in F^{n \times n}$. Τότε

$\chi_A(x) = \text{γινόμενο των στοιχειωδών διαιρετών του } A$

$\min_A(x) = \text{ε.κ.π. των στοιχειωδών διαιρετών του } A$.

Η απόδειξη αυτού του Πορίσματος αφήνεται ως άσκηση.

5.1.19 Παράδειγμα. Να εξετασθεί πόσες κλάσεις ομοιότητας υπάρχουν για πίνακες A με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ και τέτοιοι ώστε

$$(*) \quad \chi_A(x) = (x+1)^4(x+2)^3(x-2)^4$$

$$(**) \quad \min_A(x) = (x+1)^3(x+2)(x-2)^2.$$

Επιπλέον να βρεθεί ένας αντιπρόσωπος από κάθε κλάση ομοιότητας.

Ιη Λύση (μέσω αναλλοίωτων παραγόντων)

Ξέρουμε ότι υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων ομοιότητας για τους ανωτέρω πίνακες και των ακολουθιών $d_1, \dots, d_\kappa$ μη σταθερών μονικών πολυωνύμων επί του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\kappa$$

$$d_1 d_2 \dots d_\kappa = (x+1)^4(x+2)^3(x-2)^4$$

$$d_\kappa = (x+1)^3(x+2)(x-2)^2$$

άρα οι αναλλοίωτοι παράγοντες ενός τέτοιου πίνακα είναι

$$(1) \quad (x+2)(x-2) \mid (x+1)(x+2)(x-2) \mid (x+1)^3(x+2)(x-2)^2 \quad \text{ή}$$

$$(2) \quad (x+2) \mid (x+1)(x+2)(x-2)^2 \mid (x+1)^3(x+2)(x-2)^2$$

αν

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Sigma(x^2 - 4) & & \\ & \Sigma((x+1)(x^2 - 4)) & \\ & & \Sigma((x+1)^3(x+2)(x-2)^2) \end{pmatrix}$$

και

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Sigma(x+2) & & \\ & \Sigma((x+1)(x+2)(x-2)^2) & \\ & & \Sigma((x+1)^3(x+2)(x-2)^2) \end{pmatrix}$$

τότε ο Γ είναι ένας αντιπρόσωπος από την κλάση συζυγίας με αναλλοίωτους παράγοντες (1) και ο Δ ένας αντιπρόσωπος από την κλάση συζυγίας με αναλλοίωτους παράγοντες (2)

Συνεπώς Γ, Δ δεν είναι όμοιοι και κάθε πίνακας που έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το (*) και ελάχιστο πολυώνυμο το (**) είναι όμοιος προς Γ ή προς Δ .

2η Λύση (μέσω στοιχειωδών διαιρετών)

Επειδή το γινόμενο των στοιχειωδών διαιρετών ενός πίνακα είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των στοιχειωδών διαιρετών είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα, έπεται ότι στην περίπτωση αυτή, οι στοιχειώδεις διαιρέτες είναι

$$(1) \quad (x+1)^3, (x+1), (x+2), (x+2), (x+2), (x-2)^2, (x-2), (x-2) \text{ ή}$$

$$(2) \quad (x+1)^3, (x+1), (x+2), (x+2), (x+2), (x-2)^2, (x-2)^2.$$

Άρα κάθε πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το (*) και ελάχιστο πολυώνυμο το (**) είναι όμοιος προς ακριβώς ένα από τους Γ' και Δ' όπου

$$\begin{aligned}
\Gamma' &= \begin{pmatrix} \Sigma(x+1)^3 & & & & & & \\ & \Sigma(x+1) & & & & & \\ & & \Sigma(x+2) & & & & \\ & & & \Sigma(x+2) & & & \\ & & & & \Sigma(x+2) & & \\ & & & & & \Sigma(x-2)^2 & \\ & & & & & & \Sigma(x-2) \\ & & & & & & & \Sigma(x-2) \end{pmatrix} \\
\Delta' &= \begin{pmatrix} \Sigma(x+1)^3 & & & & & & \\ & \Sigma(x+1) & & & & & \\ & & \Sigma(x+2) & & & & \\ & & & \Sigma(x+2) & & & \\ & & & & \Sigma(x+2) & & \\ & & & & & \Sigma(x-2)^2 & \\ & & & & & & \Sigma(x-2)^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Είδαμε ότι κάθε πίνακας $A \in F^{v \times v}$ είναι όμοιος προς ένα πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} \Sigma(\varphi_1(x)) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \Sigma(\varphi_\kappa(x)) & \end{pmatrix} \quad (*)$$

όπου κάθε $\varphi_i(x)$ είναι δύναμη ενός αναγώγου επί του F πολυωνύμου, και ότι ο (*) είναι μοναδικός ως προς μετάθεση των $\varphi_i(x), \dots, \varphi_\kappa(x)$.

Στην περίπτωση που τα πολυώνυμα $\varphi_i(x)$ είναι δύναμη ενός πρωτοβάθμιου πολυωνύμου, π.χ. $\varphi_i(x) = (x - \lambda)^v$, τότε η επόμενη πρόταση μας δείχνει ότι ο $\Sigma(\varphi_i(x))$ είναι όμοιος προς κάποιον πίνακα $J_{\lambda, v}$ απλούστερης μορφής.

5.1.20 Πρόταση. Έστω V διανυσματικός χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης και $\alpha: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν V_α είναι ένα κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο τάξης

$(x - \lambda)^v$ και $V_\alpha = F[x]v_0$ τότε $v_0, (a - \lambda 1_V)(v_0), (a - \lambda 1_V)^2(v_0), \dots, (a - \lambda 1_V)^{v-1}(v_0)$ είναι μια βάση του V και αν $\hat{v} = (v_0, (a - \lambda 1_V)(v_0), \dots, (a - \lambda 1_V)^{v-1}(v_0))$ τότε

$$(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} = J_{\lambda, v} \in F^{v \times v}.$$

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι $\dim_F V = v$ άρα για να δείξουμε ότι τα $v_0, (a - \lambda 1_V)(v_0), \dots, (a - \lambda 1_V)^{v-1}(v_0)$ αποτελούν μια βάση του V αρκεί να δείξουμε ότι τα $v_0, (a - \lambda 1_V)(v_0), \dots, (a - \lambda 1_V)^{v-1}(v_0)$ είναι F -γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω ότι $\gamma_0 v_0 + \gamma_1 (a - \lambda 1_V)(v_0) + \dots + \gamma_{v-1} (a - \lambda 1_V)^{v-1}(v_0) = 0$ και έστω ότι υπάρχει κ τέτοιο ώστε $1 \leq \kappa \leq v-1$, $\gamma_\kappa \neq 0$ και $\gamma_i = 0$ για κάθε $i > \kappa$.

Αν $\psi(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x - \lambda) + \gamma_2(x - \lambda)^2 + \dots + \gamma_\kappa(x - \lambda)^\kappa$ τότε $\psi(x) \neq 0$ και $\psi(a)(v_0) = 0$ άρα $(x - \lambda)^v \mid \psi(x)$ αλλά $\deg \psi(x) = \kappa \leq v-1$ συνεπώς $\gamma_i = 0$ για κάθε $0 \leq i \leq \kappa$, άρα τα $v_0, (a - \lambda 1_V)(v_0), \dots, (a - \lambda 1_V)^{v-1}(v_0)$ είναι μια βάση του V .

Αν τώρα $v_i = (a - \lambda 1_V)^i(v_0)$, $1 \leq i \leq v-1$ τότε βλέπουμε ότι $v_i = (a - \lambda 1_V)(v_{i-1})$, $1 \leq i \leq v-1$ άρα $a(v_{i-1}) = \lambda v_{i-1} + v_i$, $1 \leq i \leq v-1$ και $(a - \lambda 1_V)(v_{v-1}) = (a - \lambda 1_V)^v(v_0) = 0$ δηλαδή $a(v_{v-1}) = \lambda v_{v-1}$ άρα αν $\hat{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{v-1})$ τότε

$$(\alpha : \hat{v}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} = J_{\lambda, v} \in F^{v \times v}.$$

5.1.21 Ορισμός. Ένας πίνακας της μορφής

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in F^{v \times v}$$

λέγεται στοιχειώδης πίνακας *Jordan* και συμβολίζεται με $J_{\lambda, v}$.

Από τις Προτάσεις 5.1.7 και 5.1.20 έπεται ότι οι πίνακες $\Sigma((x - \lambda)^v)$ και $J_{\lambda, v}$ είναι όμοιοι.

Αν τώρα $A \in F^{v \times v}$ και τα ανάγωγα επί του F πολυώνυμα είναι πρωτοβάθμια τότε ο A είναι όμοιος προς ένα πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_\sigma \end{pmatrix} \quad (*)$$

όπου A_i είναι στοιχειώδεις πίνακες *Jordan*.

Επιπλέον ο (*) είναι μοναδικός ως προς μετάθεση των στοιχειωδών πινάκων *Jordan* του $A_1, \dots, A_\sigma$ και καλείται κανονική μορφή *Jordan* του A .

5.1.22 Παράδειγμα. Έστω ένας πίνακας $A \in F^{5 \times 5}$ με $\min_A(x) = (x - 7)^3$. Οι στοιχειώδεις διαιρέτες του A είναι

(1) $(x - 7)^3, (x - 7)^2$ ή

(2) $(x - 7)^3, (x - 7), x - 7$,

άρα ο A είναι όμοιος προς ένα από τους

$$\begin{pmatrix} J_{7,3} & & \\ & J_{7,2} & \\ & & J_{7,1} \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} J_{7,3} & & \\ & J_{7,1} & \\ & & J_{7,1} \end{pmatrix} \text{ δηλαδή } \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & & \\ 1 & 7 & 0 & & \\ 0 & 1 & 7 & & \\ & & & 7 & 0 \\ & & & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & & \\ 1 & 7 & 0 & & \\ 0 & 1 & 7 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix}.$$

Ασκήσεις 5.1

1. Να βρεθεί το πλήθος των κλάσεων ομοιότητας των αντιστρέψιμων 3×3 πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{Z}_p$, p πρώτος. Επίσης να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος από κάθε κλάση.
2. Να βρεθούν οι δυνατές κανονικές μορφές Jordan για τους πίνακες $A \in F^{v \times v}$ με $\chi_A(x) = (x+3)^5(x-5)^3$ και $\min_A(x) = (x+3)^2(x-5)^2$.
3. Να βρεθεί το πλήθος των κλάσεων ομοιότητας των πινάκων $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ και $\min_A(x) = (x-2)^2(x-3)$. Επίσης να βρεθεί ένας αντιπρόσωπος από κάθε κλάση ομοιότητας.
4. Να βρεθεί ένας αντιπρόσωπος από κάθε κλάση ομοιότητας των πινάκων που ικανοποιούν
 - (i) $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ με $A^2 = A^3$
 - (ii) $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ με $A^2 = I$
 - (iii) $A \in \mathbb{Z}_p^{6 \times 6}$ με $A^2 = I$.
5. Είναι σωστό ή λάθος ότι αν έχεις 15 5×5 πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{R}$ και ελάχιστο πολυώνυμο $(x-2)^2(x-3)$ τότε δύο τουλάχιστον απ' αυτούς είναι όμοιοι;
6. Να βρεθούν δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με $\chi_A(x) = \chi_B(x)$, $\min_A(x) = \min_B(x)$ και A όχι όμοιος προς B .
7. Να δειχθεί ότι κάθε πίνακας $A \in F^{v \times v}$ είναι όμοιος προς τον ανάστροφό του.

8. Έστω V διανυσματικός χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης και $\alpha: V \rightarrow V$ για γραμμική απεικόνιση. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μια βάση του V από ιδιοδιανύσματα της α αν και μόνο αν $\min_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διακεκριμένων (Υπόδειξη. $\min_A(x)V_\alpha = 0$ και Θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης).
9. Ναδειχθεί ότι ένας πίνακας $A \in F^{n \times n}$ είναι όμοιος προς ένα πίνακα $B = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r \end{pmatrix} \in F^{n \times n}$ όπου N_i στοιχειώδεις πίνακες Jordan αν και μόνο αν το $\min_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων.
10. Έστω V διανυσματικός χώρος επί του F πεπερασμένης διάστασης και $\alpha: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Ναδειχθεί ότι V_α είναι κυκλικό $F[x]$ -πρότυπο αν και μόνο αν $\min_A(x) = \chi_A(x)$.
11. Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ πεπερασμένης διάστασης $\alpha: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Ναδειχθεί ότι $\exists$ διατεταγμένη βάση $\hat{v}$ του V με $(\alpha: \hat{v}, \hat{v})_{(*)} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_\rho \end{pmatrix}$ όπου A_i στοιχειώδεις πίνακες Jordan. Επιπλέον αν λ είναι μια ιδιοτιμή της α τότε η διάσταση του ιδιοχώρου V_λ της α ισούται με το πλήθος των $J_{\lambda, \nu}$ που εμφανίζονται στην $(*)$ για διάφορα ν .

5.2 Καθορισμός δομής μιας αβελιανής ομάδας μέσω μιας παράστασής της

Έστω A μια πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα και $\{a_1, \dots, a_\lambda\}$ ένα σύνολο γεννητόρων της.

Με το σύμβολο

$$(*) \quad A = \left\langle a_1, \dots, a_\lambda \mid \sum_{j=1}^{\lambda} r_{ji} a_j = 0, \quad i = 1, \dots, \kappa \right\rangle$$

όπου $r_{ji} \in \mathbb{Z}$ για κάθε j, i , εννοούμε ότι αν $F_\lambda = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{\lambda\text{-φορές}}$ και $\varepsilon_j = \underbrace{(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{j\text{-θέση}}$

τότε ο επιμορφισμός $F_\lambda \rightarrow A$ $1 \leq j \leq \lambda$ έχει πυρήνα την υποομάδα της F_λ που $\varepsilon_j \rightarrow a_j$

παράγεται από το σύνολο $\left\{ \sum_{j=1}^{\lambda} r_{ji} \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, \kappa \right\}$.

Συνεπώς $A \cong F_\lambda / N$ όπου $N = \left\langle \sum_{j=1}^{\lambda} r_{ji} \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, \kappa \right\rangle$.

Η (*) λέγεται μια παράσταση της A με γεννήτορες $a_1, \dots, a_\lambda$ και σχέσεις $\sum_{j=1}^{\lambda} r_{ji} a_j$, $i = 1, \dots, \kappa$.

5.2.1 Παράδειγμα. Έστω $\mathbb{Z}_6 = \langle [1]_6 \rangle$. Τότε ο επιμορφισμός $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ $1 \rightarrow [1]_6$ έχει

πυρήνα $\ker \pi = \langle 6 \rangle$ άρα $\mathbb{Z}_6 = \langle [1]_6 \mid 6[1]_6 = 0 \rangle$ είναι μια παράσταση του $\mathbb{Z}_6$ με γεννήτορα $[1]_6$ και σχέση $6[1]_6$, και $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z} / 6\mathbb{Z}$. Τώρα $\mathbb{Z}_6 = \langle [2]_6, [3]_6 \rangle$ και ο επιμορφισμός $\pi: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ με $\pi(\varepsilon_1) = [2]_6$ και $\pi(\varepsilon_2) = [3]_6$ έχει πυρήνα $\ker \pi = \langle 3\varepsilon_1, 2\varepsilon_2 \rangle$ άρα $\mathbb{Z}_6 = \langle [2]_6, [3]_6 \mid 3[2]_6 = 0 = 2[3]_6 \rangle$ και $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \langle (3,0), (0,2) \rangle$.

Προφανώς $B \cong \mathbb{Z}_6 \cong A$ όπου $B = \langle x \mid 6x = 0 \rangle$ και $A = \langle z, w \mid 3z = 0 = 2w \rangle$.

Έστω τώρα A μια πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα και

$$A = \left\langle a_1, \dots, a_\lambda \mid \sum_{j=1}^{\lambda} r_{ji} a_j = 0, \quad i = 1, \dots, \kappa \right\rangle$$

μια παράστασή της. Τότε $A \cong F_\lambda / N$ όπου $F_\lambda = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\lambda\text{-φορές}}$ και

$$N = \left\langle \sum_{j=1}^{\lambda} r_{ji} \varepsilon_j, i = 1, \dots, \kappa \right\rangle.$$

Έστω $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\lambda) \in F_\lambda \times \cdots \times F_\lambda$, $\bar{v} = \left(\sum_{j=1}^{\lambda} r_{j1} \varepsilon_j, \sum_{j=1}^{\lambda} r_{j2} \varepsilon_j, \dots, \sum_{j=1}^{\lambda} r_{j\kappa} \varepsilon_j \right) \in F_\lambda \times \cdots \times F_\lambda$

και $i : N \rightarrow F_\lambda$ η εμφύτευση.

Αν $\mathcal{A} = (r_{ji}) \in \mathbb{Z}^{\lambda \times \kappa}$ τότε $\mathcal{A} = (i : \bar{v}, \bar{\varepsilon})$. Τα στοιχεία $v_i = \sum_{j=1}^{\lambda} r_{ji} \varepsilon_j$, $i = 1, \dots, \kappa$ δεν

αποτελούν κατ' ανάγκη μια βάση του N αλλά ένα σύνολο γεννητόρων της N . Τα στοιχεία $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\lambda$ αποτελούν μια βάση του F_λ και επομένως $(i : \bar{v}, \bar{\varepsilon})$ ορίζεται μονοσήμαντα αφού κάθε στοιχείο της F_λ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\lambda$.

Τώρα ξέρουμε ότι για τον πίνακα $A = (r_{ji}) \in \mathbb{Z}^{\lambda \times \kappa}$ υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες X, Y με $(x_{ij}) = X \in \mathbb{Z}^{\lambda \times \lambda}$ και $(y_{ij}) = Y \in \mathbb{Z}^{\kappa \times \kappa}$ έτσι ώστε

$$XAY = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_\tau & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ με } \tau = \min\{\kappa, \lambda\} \text{ και } d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_\tau.$$

Έστω $\bar{\varepsilon}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_\lambda)$ η διατεταγμένη βάση του F_λ που ορίζεται ως $(1_{F_\lambda} : \bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}') = X$ και $\bar{v}' = (v'_1, \dots, v'_\kappa) \in F_\lambda \times \cdots \times F_\lambda$, όπου τα στοιχεία $v'_1, \dots, v'_\kappa$ ορίζονται “μέσω” του πίνακα $(1_N : \bar{v}', \bar{v}) = Y$ δηλαδή $v'_i = \sum_{j=1}^{\kappa} y_{ji} v_j$, $i = 1, \dots, \kappa$.

Παρατηρούμε ότι επειδή ο Y είναι αντιστρέψιμος $\langle v'_1, \dots, v'_\kappa \rangle = N$. Επιπλέον

$$(i: \bar{v}', \bar{\varepsilon}') = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_\tau & & \\ & & & 0 & \\ & O & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\tau, \quad \tau = \min\{\kappa, \lambda\}$$

και συνεπώς $v'_i = d_i \varepsilon'_i$, $1 \leq i \leq \tau$.

Προφανώς τα μη μηδενικά v'_i , $1 \leq i \leq \tau$ αποτελούν μια βάση του N αφού είναι $\mathbb{Z}$ -γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τη N .

Έστω ότι $r\kappa N = \rho$ τότε

$$F_\lambda / N = \mathbb{Z}\varepsilon'_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon'_\lambda / \mathbb{Z}d_1\varepsilon'_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}d_\rho\varepsilon'_\rho \cong Cd_1 \oplus Cd_2 \oplus \dots \oplus Cd_\rho \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{\lambda-\rho}.$$

Συνεπώς $A \cong Cd_1 \oplus \dots \oplus Cd_\rho \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{\lambda-\rho}$, άρα οι αναλλοίωτοι παράγοντες του T_A

είναι $d_\kappa, \dots, d_\rho$ όπου $\kappa \in \{1, \dots, \rho\}$, $d_\kappa \neq 1$ και $d_i = 1$ για $i < \kappa$. Επιπλέον αν $\pi: F_\lambda \rightarrow A$ ο επιμορφισμός με $\pi(\varepsilon_i) = a_i$ τότε $A = \pi(\varepsilon'_\kappa) \oplus \dots \oplus \pi(\varepsilon'_\rho) \oplus \dots \oplus \pi(\varepsilon'_\lambda)$ με $\pi(\varepsilon'_i) \cong Cd_i$, $1 \leq i \leq \rho$ και $\pi(\varepsilon'_i) \cong \mathbb{Z}$ για $\rho+1 \leq i \leq \lambda$.

Συνεπώς από μια παράσταση μιας πεπερασμένης παραγόμενης αβελιανής ομάδας A μπορούμε να καθορίσουμε πλήρως τη δομή της A .

Παραδείγματα.

1. $A = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid 3\alpha + 2\beta + 5\gamma = \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \rangle$. Να γραφεί η A ως ευθύ άθροισμα κυκλικών υποομάδων της.

$$\text{Έστω } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \rightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \rightarrow r_2 - 3r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 - 4r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 - r_2} \\
\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \rightarrow c_2 - 3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \rightarrow (-1)c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς υπάρχουν $X \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$, $Y \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ αντιστρέψιμοι με $XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{(*)}$.

Πράγματι για $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ και $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ έχουμε την (*). Αν τώρα

$\bar{\varepsilon}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3)$ με $X = (1_{\mathbb{Z}^3} : \bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}')$ τότε ξέρουμε ότι

$$A \cong \mathbb{Z}\varepsilon'_1 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon'_2 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon'_3 / \mathbb{Z}\varepsilon'_1 \oplus \mathbb{Z}7\varepsilon'_2 \text{ άρα } A \cong C_7 \oplus \mathbb{Z}.$$

Επιπλέον, αν $\pi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow A$ με $\pi(\varepsilon_1) = a$, $\pi(\varepsilon_2) = \beta$, $\pi(\varepsilon_3) = \gamma$ τότε $A = \pi(\varepsilon'_2) \oplus \pi(\varepsilon'_3)$ και $\pi(\varepsilon'_2) \cong C_7$, $\pi(\varepsilon'_3) \cong \mathbb{Z}$.

Τώρα $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και βέβαια $X^{-1} = (1_{\mathbb{Z}^3} : \bar{\varepsilon}', \bar{\varepsilon})$ άρα $\varepsilon'_2 = (0, 1, 1)$ και

$$\varepsilon'_3 = \varepsilon_3.$$

Συνεπώς $A = \langle \beta + \gamma \rangle \oplus \langle \gamma \rangle$ με $\langle \beta + \gamma \rangle \cong C_7$ και $\langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}$.

2. Έστω $A = \langle \alpha, \beta \mid 2\alpha + 4\beta = 0 = 4\alpha + 6\beta \rangle$. Να γραφεί η A ως ευθύ άθροισμα κυκλικών υποομάδων της.

Έστω $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ και

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \rightarrow c_2 - 2c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow (-1)r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Άρα αν $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ και $Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ τότε $XY = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Αν τώρα $\bar{\varepsilon}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$ με $X = (1_{\mathbb{Z}^2} : \bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}')$ τότε $A \cong \mathbb{Z}\varepsilon'_1 \oplus \mathbb{Z}\varepsilon'_2 / \mathbb{Z}2\varepsilon'_1 \oplus \mathbb{Z}2\varepsilon'_2$ άρα

$A \cong C_2 \oplus C_2$ και αν $\pi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow A$ με $\pi(\varepsilon_1) = a$, $\pi(\varepsilon_2) = \beta$, τότε $A = \pi(\varepsilon'_1) \oplus \pi(\varepsilon'_2)$.

Τώρα $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ και βέβαια $X^{-1} = (1_{\mathbb{Z}^2} : \bar{\varepsilon}', \bar{\varepsilon})$ άρα $\varepsilon'_1 = (1, 2)$ και

$\varepsilon'_2 = (0, -1)$ συνεπώς $A = \langle \alpha + 2\beta \rangle \oplus \langle -\beta \rangle$ και $\langle \alpha + 2\beta \rangle \cong \langle -\beta \rangle \cong C_2$.

Ασκήσεις 5.2

1. Να εξετασθεί αν οι ακόλουθες ομάδες A, B είναι ισόμορφες.
 $A = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 7\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \rangle$
 $B = \langle \beta_1, \beta_2 \mid 3\beta_1 + 6\beta_2 = 0 = 5\beta_1 + 4\beta_2 \rangle$.
2. Έστω N η υποομάδα της $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ που παράγεται από το $\{(3, 5, 7), (1, 2, 3), (4, 3, 1)\}$. Να βρεθεί μια βάση της N .
3. Να βρεθούν οι p -συνιστώσες των T_A όπου
 $A = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid 7\alpha + 5\beta + 2\gamma = 3\alpha + 3\beta = 13\alpha + 11\beta + 2\gamma = 0 \rangle$
και
 $A = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid -4\alpha + 2\beta + 6\gamma = -6\alpha + 2\beta + 6\gamma = 7\alpha + 4\beta + 15\gamma = 0 \rangle$.
4. Έστω $A = \langle \alpha, \beta \mid v_1\alpha + v_2\beta = 0 = \mu_1\alpha + \mu_2\beta \rangle$ $\mu_1, \mu_2, v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$. Αν $d = v_1\mu_2 - v_2\mu_1$ να περιγραφεί η δομή της A για
(i) $d = 0$
(ii) $d = 1$
(iii) $d = p$, όπου p πρώτος.