

Κεφάλαιο 4

Θεωρήματα Δομής

Σ' αυτό το κεφάλαιο θ' αποδείξουμε τα Θεωρήματα Δομής για πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα, όπου R ακέραια περιοχή κυρίων ιδεωδών, (α.π.κ.ι).

4.1 Ανάλυση σε άθροισμα περιοδικού και ελεύθερου, ανάλυση περιοδικού σε άθροισμα των p -συνιστωσών του

Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο. Να υπενθυμίσουμε ότι ένα στοιχείο $m_0 \in M$ λέγεται περιοδικό αν $\exists r \in R$ με $r \neq 0$ και $rm_0 = 0$ και ένα στοιχείο $m_1 \in M$ λέγεται ελεύθερο στρέψης αν $m_1 \neq 0$ και η σχέση $rm_1 = 0$ συνεπάγεται ότι $r = 0$.

Ξέρουμε ότι αν $T_M = \{m \in M \mid m \text{ περιοδικό στοιχείο του } M\}$ τότε $T_M \leq M$ και M/T_M είναι ελεύθερο στρέψης.

Ένα R πρότυπο N λέγεται περιοδικό R -πρότυπο αν κάθε στοιχείο του είναι περιοδικό δηλαδή $N = T_N$. Ένα R -πρότυπο K λέγεται ελεύθερο στρέψης R -πρότυπο αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του K είναι ελεύθερο στρέψης.

Π.χ. $\mathbb{Q}$ είναι ελεύθερο στρέψης $\mathbb{Z}$ -πρότυπο

$\mathbb{Z}_n$ είναι περιοδικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο

$\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_n$ δεν είναι ούτε περιοδικό ούτε ελεύθερο στρέψης $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

4.1.1 Πρόταση. *Αν N είναι ένα πεπερασμένο παραγόμενο R -πρότυπο το οποίο είναι ελεύθερο στρέψης τότε το N είναι ένα ελεύθερο R -πρότυπο.*

Απόδειξη. Έστω $N = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Τότε κάθε $k+1$ -στοιχεία του N είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πράγματι έστω $F \xrightarrow{\pi} M$ ένας R -επιμορφισμός με F ελεύθερο διάστασης k και έστω $y_1, \dots, y_{k+1} \in M$ τότε $\exists a_1, \dots, a_{k+1} \in F$ με $\pi(a_i) = y_i$. Επειδή F ελεύθερο διάστασης k έπεται ότι τα $a_1, \dots, a_{k+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα άρα $\exists (r_1, \dots, r_{k+1}) \neq (0, \dots, 0)$ με $r_1 a_1 + \dots + r_{k+1} a_{k+1} = 0$, άρα $r_1 y_1 + \dots + r_{k+1} y_{k+1} = 0$. Συνεπώς τα $y_1, \dots, y_{k+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έστω λοιπόν ρ το μέγιστο πλήθος γραμμικά αναξαρτήτων στοιχείων του N . Σύμφωνα με τα προηγούμενα $\rho \leq k$. Θεωρούμε ρ γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του N , έστω $z_1, z_2, \dots, z_\rho$. Για κάθε x_i , $1 \leq i \leq k$ τα στοιχεία $x_i, z_1, \dots, z_\rho$ είναι γραμμικά εξαρτημένα άρα $\exists r_i \in R$ με $r_i \neq 0$ και $r_i x_i \in \langle z_1, \dots, z_\rho \rangle$.

Έστω $r = r_1 \cdots r_\rho$ τότε $r \neq 0$ επειδή R είναι ακέραια περιοχή και $rx_i \in \langle z_1, \dots, z_\rho \rangle \quad \forall \quad 1 \leq i \leq k$ και επειδή $N = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ έπεται ότι $rw \in \langle z_1, \dots, z_\rho \rangle \quad \forall \quad w \in N$. Θεωρούμε τον R -ομομορφισμό
$$N \xrightarrow{\theta_r} N$$

$$w \longmapsto rw$$

Επειδή το N είναι ελεύθερο στρέψης έπεται ότι ο θ_r είναι R -μονομορφισμός άρα $N \cong \text{Im} \theta_r$. Αλλά με βάση τα προηγούμενα $\text{Im} \theta_r \leq \langle z_1, \dots, z_\rho \rangle \leq N$ και επειδή $\langle z_1, \dots, z_\rho \rangle$ είναι ελεύθερο R -πρότυπο, ως υποπρότυπο ελεύθερου έπεται ότι και το $\text{Im} \theta_r$ είναι ελεύθερο R -πρότυπο ως υποπρότυπο ελεύθερου. Άρα $N \cong \text{Im} \theta_r$ είναι ελεύθερο R -πρότυπο.

4.1.2 Πρόταση. *Έστω M πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο και T_M το σύνολο των περιοδικών στοιχείων του M . Τότε*

- (1) $T_M \leq M$ και $M = T_M \oplus F$ όπου F ελεύθερο R -πρότυπο με $rkF = \text{το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του } M$.
- (2) Αν $M = T' \oplus F'$, όπου T' περιοδικό υποπρότυπο του M και F' ελεύθερο υποπρότυπο του M τότε $T_M = T'$ και $F' \cong F$.
- (3) Αν $M \cong T_1 \oplus F_1$ όπου T_1 περιοδικό R -πρότυπο και F_1 ελεύθερο τότε $T_1 \cong T_M$ και $F_1 \cong F$.

Η απόδειξη της Πρότασης αφήνεται ως άσκηση.

Το ακόλουθο Πόρισμα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης.

4.1.3 Πόρισμα. Έστω M, N πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα. Τότε $M \cong N$ αν και μόνο αν $T_M \cong T_N$ και το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του M ισούται με το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του N .

Αν M πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο τότε από την Πρόταση ... έπεται ότι και T_M είναι πεπερασμένα παραγόμενο R -πρότυπο. Έστω $T_M = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$. Επειδή w_i είναι ένα περιοδικό στοιχείο έπεται ότι $\exists r_i \in R$ με $r_i \neq 0$ και $r_i w_i = 0$, $1 \leq i \leq k$.

Συνεπώς αν $r = r_1 \cdots r_k$ τότε $r \neq 0$ και $rT_M = 0$.

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει μια ανάλυση του T_M ως ευθύ άθροισμα των “ p -συνιστωσών” του.

4.1.4 Πρόταση. Έστω N ένα περιοδικό R -πρότυπο και έστω ότι υπάρχει $d \in R$ με $d \neq 0$ και $dN = 0$. Αν $d = up_1^{\lambda_1} \cdots p_k^{\lambda_k}$, με u αντιστρέψιμο, και $p_1, \dots, p_k$ μη συντροφικούς πρώτους και $Np_i = \{x \in N \mid p_i^{\lambda_i} x = 0\}$, $1 \leq i \leq k$. Τότε

- (1) $Np_i = d_i N$ όπου $d_i = up_1^{\lambda_1} \cdots p_{i-1}^{\lambda_{i-1}} p_{i+1}^{\lambda_{i+1}} \cdots p_k^{\lambda_k}$, $1 \leq i \leq k$.
- (2) $N = Np_1 \oplus \cdots \oplus Np_k$.

Απόδειξη. (1) Προφανώς $d_i N \subseteq Np_i$. Έστω τώρα $x \in Np_i$ άρα $p_i^{\lambda_i} x = 0$. Επειδή $(d_i, p_i^{\lambda_i}) = 1$ έχουμε ότι $1 = r_i d_i + r'_i p_i^{\lambda_i}$ για κάποια $r_i, r'_i \in R$. Άρα $x = r_i d_i x + r'_i p_i^{\lambda_i} x$, συνεπώς $x = d_i r_i x \in d_i N$, άρα $Np_i = d_i N$.

(2) Επειδή $(d_1, \dots, d_k) = 1$ έπεται ότι $1 = \mu_1 d_1 + \dots + \mu_k d_k$ για κάποια $\mu_1, \dots, \mu_k \in R$.

Άρα αν $x \in N$ τότε $x = \mu_1 d_1 x + \mu_2 d_2 x + \dots + \mu_k d_k x$ άρα $N = Np_1 + \dots + Np_k$.

Έστω τώρα $w \in Np_\sigma \cap \sum_{i \neq \sigma} Np_i$. Προφανώς για κάθε $x \in N_j$ έχουμε ότι $d_i x = 0$ για $i \neq j$, άρα $d_\sigma w = 0$ αφού $w \in \sum_{i \neq \sigma} Np_i$ και $p_\sigma^{\lambda_\sigma} w = 0$ αφού $w \in Np_\sigma$. Αλλά $(p_\sigma^{\lambda_\sigma}, d_\sigma) = 1$ άρα $w = 0$. Συνεπώς $N = Np_i \oplus \dots \oplus Np_k$.

Παράδειγμα. Έστω το $\mathbb{Z}$ -πρότυπο $M = \mathbb{Z}_{12}$. Τότε $12M = 0$ και $M = M_2 \oplus M_3$ όπου

$$M_2 = 3M = 3 \mathbb{Z}_{12} = \langle [3]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$$

$$M_3 = 4M = 4 \mathbb{Z}_{12} = \langle [4]_{12} \rangle = \{[0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12}\}$$

4.1.5 Ορισμός. Έστω N ένα R -πρότυπο και p ένα πρώτο στοιχείο του R . Το υποσύνολο $Np = \{x \in N \mid p^\nu x = 0 \text{ για κάποιο } \nu \geq 0\}$ του N είναι ένα υποπρότυπο του N και λέγεται η p -συνιστώσα του N .

4.1.6 Θεώρημα πρωταρχικής ανάλυσης. Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο περιοδικό R -πρότυπο με $M \neq 0$. Τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος μη συντροφικών πρώτων στοιχείων του R , $p_1, \dots, p_k$ με $Mp_i \neq 0$ και $M = Mp_1 \oplus \dots \oplus Mp_k$.

Επιπλέον αν N είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο περιοδικό R -πρότυπο τότε $M \cong N$ αν και μόνο αν $Mp \cong Np$ για κάθε πρώτο στοιχείο p του R .

Η απόδειξη του θεωρήματος που αφήνεται ως άσκηση, στηρίζεται στην προηγούμενη πρόταση και στο ότι αν $\varphi: M \rightarrow N$ είναι ένας R -ομομορφισμός τότε $\varphi(Mp) \subseteq Np$ και αφήνεται ως άσκηση.

Θα δείξουμε ότι αν M είναι ένα πεπερασμένο παραγόμενο περιοδικό R -πρότυπο τότε κάθε p -συνιστώσα, Mp , του M , με $Mp \neq 0$ είναι ευθύ άθροισμα κυκλικών υποπροτύπων.

Πριν δείξουμε αυτό θα μελετήσουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες των κυκλικών R -προτύπων.

4.2 Κυκλικά Πρότυπα και μοναδικότητα ανάλυσης p -περιοδικού σε άθροισμα κυκλικών

Όπως ξέρουμε ένα R -πρότυπο M λέγεται κυκλικό R -πρότυπο αν παράγεται από ένα στοιχείο. Έστω $M = Rm_0$ και $\varphi: R \rightarrow M$
 $r \rightarrow rm_0$ τότε ο φ είναι ένας R -επιμορφισμός, άρα $R/\ker \varphi \cong M$. Επειδή ο R είναι α.π.κ.ι., $\ker \varphi = Rx_0$ και το στοιχείο x_0 του R είναι μοναδικό ως προς συντροφικότητα.

Τώρα το ιδεώδες $\ker \varphi = \{r \in R \mid rm_0 = 0\} = \{r \in R \mid rm = 0 \ \forall m \in M\}$ λέγεται ο μηδενιστής του M ή το ιδεώδες τάξης του M και συμβολίζεται με $o(M)$. Το δε στοιχείο x_0 του R , για την ακρίβεια η κλάση συντροφικότητας του x_0 , λέγεται η τάξη του M . Προφανώς $M \neq 0$ αν και μόνο αν η τάξη του M δεν είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R . Αν M είναι R -πρότυπο και $m_0 \in M$ τότε ορίζεται η τάξη του m_0 ως η τάξη του Rm_0 και συμβολίζεται με $o(m_0)$. Συνεπώς $o(m_0) = [d]$ αν και μόνο αν $dm_0 = 0$ και αν $rm_0 = 0$ τότε $d \mid r$. Για παράδειγμα η τάξη του $\mathbb{Z}$ -προτύπου $\mathbb{Z}_m$ είναι m , για την ακρίβεια είναι η κλάση συντροφικότητας $\{m, -m\}$. Η τάξη του $\mathbb{Q}[x]$ -

προτύπου $\mathbb{Q}[x]/\langle x+1 \rangle$ είναι $x+1$, για την ακρίβεια η κλάση συντροφικότητας $\{q(x+1) \mid q \in \mathbb{Q} \setminus (0)\}$.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι η τάξη ενός κυκλικού προτύπου το χαρακτηρίζει ως προς ισομορφισμό.

4.2.1 Πρόταση. Δύο κυκλικά R -πρότυπα M, N είναι ισόμορφα αν και μόνο αν έχουν την ίδια τάξη.

Απόδειξη. Έστω $\lambda: M \rightarrow N$ ένας R -ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι $o(M) = o(N)$. Έστω $r \in o(M)$ και $x \in N$. Τότε $\exists y \in M$ με $x = \varphi(y)$ και $rx = r\varphi(y) = \varphi(ry) = \varphi(0) = 0$ άρα $r \in o(N)$. Παρόμοια δείχνουμε ότι $o(N) \subseteq o(M)$ άρα $o(M) = o(N)$. Αν τώρα $o(M) = o(N)$ τότε $R/o(M) = R/o(N)$ συνεπώς $M \cong N$.

Σχόλιο. Εδώ ουσιαστικά δείξαμε ότι αν I, J ιδεώδη του R τότε $R/I, R/J$ είναι ισόμορφα ως R -πρότυπα αν και μόνο αν $I = J$.

Άσκηση. Να βρεθεί παράδειγμα δακτυλίου R , ιδεωδών I, J έτσι ώστε $R/I, R/J$ να είναι ισομόρφοι δακτύλιοι και $I \neq J$.

Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε υποπρότυπο κυκλικού είναι κυκλικό και κάθε πρότυπο πηλίκου κυκλικού είναι κυκλικό.

4.2.2 Πρόταση. Έστω $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ όπου A_i μη τετριμμένα κυκλικά R -πρότυπα τάξης r_i , $1 \leq i \leq k$ και $(r_i, r_j) = 1$ για κάθε i, j με $i \neq j$. Τότε το A είναι ένα κυκλικό R -πρότυπο τάξης $r = r_1 r_2 \cdots r_k$.

Απόδειξη. Έστω $A_i = Ra_i$, $1 \leq i \leq x$ και $a = a_1 + \dots + a_k$. Ισχυριζόμαστε ότι $A = Ra$ και η τάξη του Ra είναι r .

Πράγματι, $sa = 0 \Leftrightarrow sa_i = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq k \Leftrightarrow r_i \mid s \quad \forall \quad 1 \leq i \leq k$. Τώρα επειδή $(r_i, r_j) = 1$ για $i \neq j$ έπεται ότι $r \mid s$ συνεπώς $o(Ra) = Rr$.

Τώρα θα δείξουμε ότι $Ra = A$. Προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι $a_i \in Ra$ για κάθε $1 \leq i \leq k$.

Έστω $r'_i = r_1 \dots r_{i-1} r_{i+1} \dots r_k$ τότε $(r'_i, r_i) = 1$, άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ με $\lambda_1 r'_i + \lambda_2 r_i$ και συνεπώς $a_i = \lambda_1 r'_i a_i$, αλλά $r'_i a = r'_i (a_1 + \dots + a_k) = r'_i a_i$, άρα $a_i = \lambda_1 r'_i a_i = \lambda_1 r'_i a \in Ra$.

Στην επόμενη πρόταση βρίσκουμε τα υποπρότυπα ενός κυκλικού R -προτύπου τάξης p^ν , όπου p είναι ένα πρώτο στοιχείο του R .

4.2.3 Πρόταση. Έστω A ένα κυκλικό R -πρότυπο τάξης p^ν , όπου p πρώτο στοιχείο του R . Τότε τα υποπρότυπα του A είναι $0 = p^\nu A \subsetneq p^{\nu-1} A \subsetneq p^{\nu-2} A \subsetneq \dots \subsetneq pA \subsetneq A$.

Απόδειξη. Έστω ότι $A = Ra_0$ και $\begin{matrix} \varphi: R \rightarrow A \\ r \rightarrow ra_0 \end{matrix}$ τότε $\ker \varphi \subset p^\nu R$. Έστω $K \leq A$ τότε

$K = \varphi(\varphi^{-1}(K))$ όπου $\varphi^{-1}(K) = \{r \in R \mid \varphi(r) \in K\}$. Το $\varphi^{-1}(K)$ είναι ένα υποπρότυπο του R που περιέχει τον $\ker \varphi$. Επειδή $\varphi^{-1}(K)$ είναι ένα υποπρότυπο του R έπεται ότι $\varphi^{-1}(K) = dR$ για κάποιο $d \in R$ και επειδή $\ker \varphi \subseteq \varphi^{-1}(K)$ έπεται ότι $p^\nu R \subseteq dR$. Συνεπώς $d \mid p^\nu$, άρα $d = p^\mu$, $\mu \leq \nu$ και επομένως $K = \varphi(\varphi^{-1}(K)) = \varphi(p^\mu R) = p^\mu A$.

Μένει να δείξουμε ότι αν $\mu \neq \mu'$ τότε $p^\mu A \neq p^{\mu'} A$. Επειδή $p^\mu A$ είναι κυκλικό R -πρότυπο με $p^\mu A = R(p^\mu a_0)$, αρκεί να δείξουμε ότι η τάξη του $p^\mu A$ είναι διαφορετική από την τάξη του $p^{\mu'} A$. Αλλά η τάξη του $p^\mu A$ είναι $p^{\nu-\mu}$.

Ένα άμεσο συμπέρασμα είναι το ακόλουθο

4.2.4 Πόρισμα. Έστω A κυκλικό R -πρότυπο τάξης p^v , όπου p πρώτο στοιχείο του R . Αν $A = B \oplus \Gamma$ τότε $B = 0$ ή $\Gamma = 0$.

Ασκήσεις 4.2

1. Έστω A κυκλικό R -πρότυπο τάξης p^v , p πρώτο. Τότε κάθε υποπρότυπο και πρότυπο πηλίκου του A είναι τάξης p^λ για κάποιο λ .
2. Έστω $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ όπου A_i κυκλικά R -πρότυπα τάξης p^{λ_i} , p πρώτο στοιχείο του R και $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$. Αν $a \in A$ τέτοιο ώστε $p^{\lambda_1 - \mu} a = 0$, όπου $0 \leq \mu \leq \lambda_1$ τότε να δειχθεί ότι $a = p^\mu a'$ για κάποιο $a' \in A$.

4.3 Ανάλυση p -περιοδικού σε άθροισμα κυκλικών και Θεωρήματος Δομής

4.3.1 Ορισμός. Ένα R -πρότυπο M λέγεται p -περιοδικό, όπου p ένα πρώτο στοιχείο του R , αν για κάθε $x \in M$, $p^\lambda x = 0$ για κάποιο λ .

Θα δείξουμε ότι αν ένα p -περιοδικό R -πρότυπο αναλύεται ως ευθύ άθροισμα πεπερασμένου πλήθους κυκλικών τότε η ανάλυση είναι μοναδική ως προς το πλήθος και τις τάξεις των μη μηδενικών κυκλικών. Γι' αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα.

4.3.2 Λήμμα. Έστω M ένα p -περιοδικό R -πρότυπο, όπου p πρώτο στοιχείο του R και $M(p) = \{x \in M \mid px = 0\}$.

- (1) Αν $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ τότε $M(p) = M_1(p) \oplus \dots \oplus M_k(p)$ και $M/M(p) \cong M_1/M_1(p) \oplus \dots \oplus M_k/M_k(p)$
- (2) Αν $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ όπου M_i μη τετριμμένα κυκλικά R -πρότυπα, $1 \leq i \leq k$, τότε $k = \dim_{R/pR} M(p)$.

Απόδειξη. Είναι προφανές από άσκηση ότι το $M(p)$ είναι ένα R/pR -πρότυπο και επειδή p είναι ένα πρώτο στοιχείο του R έπεται ότι R/pR είναι ένα σώμα άρα $M(p)$ είναι ένας R/pR -διανυσματικός χώρος.

Η (1) είναι άμεση και η (2) έπεται από την (1) και το ότι αν M_i είναι κυκλικό, τότε είναι κυκλικό τάξης p^{λ_i} , για κάποιο λ_i .

Τώρα $M_i(p) = p^{\lambda_i-1}M_i$, το οποίο είναι κυκλικό τάξης p , άρα $M_i(p) \cong R/pR$.

4.3.3 Θεώρημα. Έστω $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_\kappa = A'_1 \oplus \dots \oplus A'_\lambda$ όπου A_i κυκλικά τάξης p^{v_i} με $1 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_\kappa$ και A'_i κυκλικά τάξης p^{μ_j} με $1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_\lambda$. Τότε $\kappa = \lambda$ και $v_i = \mu_i \ \forall \ 1 \leq i \leq \kappa$.

Απόδειξη. Από (2) του προηγούμενου λήμματος έπεται ότι $\kappa = \lambda = \dim_{R/pR} A(p)$. Θα δείξουμε ότι $v_i = \mu_i$ με επαγωγή στο v_κ . Αν $v_\kappa = 1$ τότε $pA = 0$ άρα $v_1 = \dots = v_\kappa = 1 = \mu_1 = \dots = \mu_\kappa$. Έστω $v_\kappa > 1$. Θεωρούμε το R -πρότυπο $A/A(p)$. Από (1) του προηγούμενου λήμματος έχουμε ότι

$$A/A(p) \cong A_1/A_1(p) \oplus \dots \oplus A_\kappa/A_\kappa(p) \cong A'_1/A'_1(p) \oplus \dots \oplus A'_\kappa/A'_\kappa(p).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $A_i/A_i(p)$ (αντισ. $A'_i/A'_i(p)$) είναι κυκλικό τάξης p^{v_i-1} (αντι. p^{μ_i-1}) $1 \leq i \leq \kappa$.

Από το (2) του προηγούμενου λήμματος έπεται ότι το πλήθος των μηδενικών $A_i/A_i(p)$ ισούται με το πλήθος των μηδενικών $A'_i/A'_i(p)$ έστω T . Άρα $A_i/A_i(p) = 0$ για $1 \leq i \leq \tau$ και $A'_i/A'_i(p) = 0$, $1 \leq i \leq \tau$. Συνεπώς $v_1 = \dots = v_\tau = 1 = \mu_1 = \dots = \mu_\tau$ και

$$A_{\tau+1}/A_{\tau+1}(p) \oplus A_{\tau+2}/A_{\tau+2}(p) \oplus \dots \oplus A_\kappa/A_\kappa(p) \cong A'_{\tau+1}/A'_{\tau+1}(p) \oplus \dots \oplus A'_\kappa/A'_\kappa(p)$$

όπου $A_j/A_j(p)$ (αντισ. $A'_j/A'_j(p)$) είναι μη τετριμμένα κυκλικά τάξης p^{v_j-1} (αντισ. p^{μ_j-1}) $\tau+1 \leq j \leq \kappa$, άρα από υπόθεση επαγωγής $v_j-1 = \mu_j-1$, $\tau+1 \leq j \leq \kappa$. Συνεπώς $\mu_i = v_i \quad \forall \quad 1 \leq i \leq \kappa$.

4.3.4 Θεώρημα. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο p -περιοδικό R -πρότυπο αναλύεται ως ευθύ άθροισμα κυκλικών υποπροτύπων του.

Απόδειξη. Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο περιοδικό p -πρότυπο και $x_1, \dots, x_\kappa$ ένα σύνολο γεννητόρων του M με x_i τάξης p^{m_i} , $1 \leq i \leq \kappa$ και $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_\kappa$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο $\sum_{i=1}^\kappa m_i$ ότι υπάρχουν στοιχεία $y_1, \dots, y_\kappa$ του M με τάξη του y_i , p^{n_i} όπου $n_i \leq m_i$, $1 \leq i \leq \kappa$ και $M = Ry_1 \oplus Ry_2 \oplus \dots \oplus Ry_\kappa$. Να παρατηρήσουμε ότι αν $n_i = 0$ για κάποιο i τότε $Ry_i = 0$. Για $\sum_{i=1}^\kappa m_i = 0$ έπεται ότι $M = 0$.

Έστω $\sum_{i=1}^\kappa m_i > 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\kappa > 1$ και $m_1 > 0$. Έστω $M' = Rx_2 + \dots + Rx_\kappa$. Από υπόθεση επαγωγής επειδή

$\sum_{i=2}^{\kappa} m_i < \sum_{i=1}^{\kappa} m_i$, αφού $m_1 > 0$, υπάρχουν $y_2, \dots, y_{\kappa}$ στοιχεία του M' με τάξη του y_i ,

p^{n_i} όπου $n_i \leq m_i$, $2 \leq i \leq \kappa$ και $M' = Ry_2 \oplus \dots \oplus Ry_{\kappa}$.

Τώρα τα στοιχεία $x_1, y_2, \dots, y_{\kappa}$ παράγουν το M αφού $M = Rx_1 + M'$, και αν $n_{i_0} < m_{i_0}$ για κάποιο $i_0 \in \{2, \dots, \kappa\}$ τότε $m_1 + \sum_{i=2}^{\kappa} n_i < \sum_{i=1}^{\kappa} m_i$, άρα από υπόθεση επαγωγής θα είχαμε μια ανάλυση του M ως ευθύ άθροισμα κυκλικών.

Έστω λοιπόν ότι $m_i = n_i$, $i = 2, \dots, \kappa$. Έχουμε ότι $M = Rx_1 + M'$. Αν $Rx_1 \cap M' = \{0\}$ ή $Rx_1 \subseteq M'$ τότε έχουμε τελειώσει. Έστω ότι $Rx_1 \cap M' \neq \{0\}$, άρα $\exists r \in R$ με $rx_1 \in M'$ και $rx_1 \neq 0$, και έστω ότι $x_1 \notin M'$. Ψάχνουμε να βρούμε ένα $y_1 \in M$ τέτοιο ώστε $rx_1 + M' = Ry_1 + M'$ και αν $ry_1 \in M'$ τότε $ry_1 = 0$. Επειδή η τάξη του $x_1 + M^1 \in M/M'$ είναι p^{γ} με $\gamma \leq m_1$ και επειδή $x_1 \notin M'$, $\gamma > 0$.

Άρα $rx_1 \in M' \Leftrightarrow p^{\gamma} \mid r$.

Έστω $m' = p^{\gamma} x_1$, τότε $p^{m_1 - \gamma} m' = p^{m_1} x_1 = 0$ και επειδή $m_1 \leq m_2 = n_2$ έχουμε ότι $p^{n_2 - \gamma} m' = 0$. Αλλά $m' \in M' = Ry_2 \oplus \dots \oplus Ry_{\kappa}$ και η τάξη του y_i είναι p^{n_i} , $2 \leq i \leq \kappa$ και $n_2 \leq n_3 \leq \dots \leq n_{\kappa}$, άρα από Άσκηση 4.2, 2 $m' = p^{\gamma} y$ για κάποιο $y \in M'$.

Έστω τώρα $y_1 = x_1 - y$. Προφανώς $Ry_1 + M' = Rx_1 + M' = M$. Θα δείξουμε ότι $Ry_1 \cap M' = \{0\}$. Αν $w \in Ry_1 \cap M'$ τότε $w = r_1 y_1$ για κάποιο $r_1 \in R$. Τότε $r_1 x_1 = r_1 (y_1 + y) = r_1 y_1 + r_1 y \in M'$, άρα $p^{\gamma} \mid r_1$, αλλά $p^{\gamma} y_1 = p^{\gamma} (x_1 - y) = p^{\gamma} x_1 - p^{\gamma} y = m' - m' = 0$. Συνεπώς $w = r_1 y_1 = 0$ και επομένως $Ry_1 \cap M' = \{0\}$ απ' αυτό έπεται ότι $M = Ry_1 \oplus M'$.

2^η Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.4. Για την απόδειξη αυτή θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα.

4.3.5 Λήμμα. Έστω A ένα R -πρότυπο με $p^v A = 0$ και $p^{v-1} A \neq 0$, όπου p ένα πρώτο στοιχείο του R . Αν $a_0 \in A$ με $p^{v-1} a_0 \neq 0$ και $A \neq Ra_0$ τότε

$$(1) \quad \exists \beta \in A \text{ με } \beta \neq 0 \text{ και } Ra_0 \cap R\beta = 0$$

$$(2) \quad \exists \Gamma \leq A \text{ με } A = Ra_0 \oplus \Gamma.$$

Απόδειξη. (1) Επειδή $A \neq Ra_0$, υπάρχει $c \in A \setminus Ra_0$. Επειδή $p^v c = 0 \in Ra_0$ και $p^0 c = c \notin Ra_0$ υπάρχει j μικρότερος θετικός με την ιδιότητα $p^j c \in Ra_0$ και $p^{j-1} c \notin Ra_0$.

Έστω $p^j c = r_1 a_0$ και έστω $r_1 = p^\kappa r$ όπου $(r, p) = 1$ και $\kappa \geq 0$. Τώρα $0 = p^v c = p^{v-j} p^j c = p^{v-j} p^\kappa r a_0$ και επειδή η τάξη του a_0 είναι p^v και $(r, p) = 1$ έπεται ότι $v - j + \kappa \geq v$, άρα $\kappa \geq j \geq 1$.

Έστω $\beta = p^{j-1} c - r p^{\kappa-1} a_0$, τότε $p\beta = 0$ και αν $Ra_0 \cap R\beta \neq 0$ και $s \in R$ με $s\beta \neq 0$ τότε έπεται ότι $(s, p) = 1$ άρα $1 = \lambda_1 s + \lambda_2 p$ και $\beta = \lambda_1 s\beta + \lambda_2 p\beta$. Συνεπώς $\beta = \lambda_1 s\beta \in Ra_0$. Άρα $p^{j-1} c \in Ra_0$ το οποίο είναι άτοπο από την επιλογή του j , άρα $Ra_0 \cap R\beta = 0$.

(2) Έστω $S = \{A \leq A \mid A \neq 0 \text{ και } A \cap Ra_0 = 0\}$ από (1) $S \neq \emptyset$ και από το Λήμμα Zorn έπεται ότι το S έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω Γ .

Τώρα $p^v \left(\frac{A}{\Gamma} \right) = 0$ και $p^{v-1} (a_0 + \Gamma) \neq 0$. Αν $\frac{A}{\Gamma} \neq R(a_0 + \Gamma)$ τότε από (1) υπάρχει $\beta_0 + \Gamma \neq 0$ με $R(a_0 + \Gamma) \cap R(\beta_0 + \Gamma) = 0$, άρα $Ra_0 \cap R\beta_0 + \Gamma = 0$, επειδή $Ra_0 \cap \Gamma = 0$. Αλλά $\Gamma \subsetneq R\beta_0 + \Gamma$ και $Ra_0 \cap R\beta_0 + \Gamma = 0$ άτοπο, επειδή Γ μεγιστικό στοιχείο του S . Άρα $\frac{A}{\Gamma} = R(a_0 + \Gamma) \Rightarrow A = Ra_0 + \Gamma$ και επειδή $Ra_0 \cap \Gamma = 0$ έπεται ότι $A = Ra_0 \oplus \Gamma$.

Απόδειξη Θεωρήματος 4.3.4. Έστω $M = \langle x_1, \dots, x_\kappa \rangle$ με $x_i \neq 0$. Θα δείξουμε το Θεώρημα με επαγωγή στο κ . Για $\kappa = 1$ είναι άμεσο.

Έστω $\kappa > 1$ και έστω ότι η τάξη του x_i να είναι p^{λ_i} με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\kappa$. Τότε $p^{\lambda_1}M = 0$ και $p^{\lambda_1-1}x_1 \neq 0$, άρα από προηγούμενο Λήμμα $M = Rx_1 \oplus M'$. Έστω

$$\begin{aligned} \pi : M &\rightarrow M/Rx_1 \cong M' \\ w &\rightarrow w + Rx_1 \end{aligned}$$

ο φυσικός επιμορφισμός. Προφανώς

$$M/Rx_1 = \langle \pi(x_1), \dots, \pi(x_\kappa) \rangle = \langle \pi(x_2), \dots, \pi(x_\kappa) \rangle$$

άρα από υπόθεση επαγωγής το M' είναι ευθύ άθροισμα κυκλικών, συνεπώς το M αναλύεται ως ευθύ άθροισμα κυκλικών.

4.3.6 Θεώρημα. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενο p -περιοδικό R -πρότυπο αναλύεται ως ευθύ άθροισμα πεπερασμένου πλήθους κυκλικών προτύπων και η ανάλυση αυτή είναι μοναδική ως προς το πλήθος και τις τάξεις των (μη μηδενικών) κυκλικών προτύπων.

Απόδειξη. Το Θεώρημα 4.3.4 μας δίνει την ανάλυση και το Θεώρημα 4.3.3 την μοναδικότητα.

Συμβολισμός. Αν $r_0 \in R$ τότε το κυκλικό R -πρότυπο R/r_0R το συμβολίζουμε με Cr_0 .

Έστω M, N πεπερασμένα παραγόμενα p -περιοδικά R -πρότυπα. Τότε από το Θεώρημα ... υπάρχει μια ακολουθία δυνάμεων του p , $p^{\lambda_1}, \dots, p^{\lambda_\kappa}$ έτσι ώστε $M \cong Cp^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus Cp^{\lambda_\kappa}$ με $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_\kappa$ και μια ακολουθία, $p^{\mu_1}, \dots, p^{\mu_\sigma}$ έτσι ώστε $N \cong Cp^{\mu_1} \oplus \dots \oplus Cp^{\mu_\sigma}$ με $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_\sigma$.

Επειδή ένας R -ισομορφισμός διατηρεί την ανάλυση σε ευθύ άθροισμα, από το Θεώρημα 4.3.3 παίρνουμε ότι

4.3.7 Θεώρημα. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε ότι $M \cong N$ αν και μόνο αν $\kappa = \sigma$ και η ακολουθία $p^{\lambda_1}, \dots, p^{\lambda_\kappa}$ ισούται με την ακολουθία $p^{\mu_1}, \dots, p^{\mu_\kappa}$.

Έστω τώρα A, B πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα. Από τα Θεωρήματα 4.1.2 (1), 4.1.6 και 4.3.4 έπεται ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων στοιχείων του R , $p_1, \dots, p_\kappa$ και για κάθε πρώτο p_i μια πεπερασμένη ακολουθία δυνάμεων του, $p_i^{\lambda_{i1}} \dots p_i^{\lambda_{i\rho_i}}$ έτσι ώστε

$$A \cong \underbrace{R \oplus \dots \oplus R}_{w_A - \text{φορές}} \oplus Cp_1^{\lambda_{i1}} \oplus \dots \oplus Cp_1^{\lambda_{i\rho_1}} \oplus \dots \oplus Cp_\kappa^{\lambda_{\kappa 1}} \oplus \dots \oplus Cp_\kappa^{\lambda_{\kappa \rho_\kappa}}$$

όπου $w_A \equiv$ το μέγιστο πλήθος γραμμικών ανεξάρτητων στοιχείων του A .

Παρόμοια για το B υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία πρώτων στοιχείων του R $q_1, \dots, q_\tau$ και για κάθε πρώτο q_j για πεπερασμένη ακολουθία δυνάμεων του $q_i^{\sigma_{i1}}, \dots, q_i^{\sigma_{i\mu_i}}$ έτσι ώστε

$$B \cong \underbrace{R \oplus \dots \oplus R}_{w_B - \text{φορές}} \oplus Cq_1^{\sigma_{11}} \oplus \dots \oplus Cq_1^{\sigma_{1\mu_1}} \oplus \dots \oplus Cq_\tau^{\sigma_{\tau 1}} \oplus \dots \oplus Cq_\tau^{\sigma_{\tau \mu_\tau}}$$

όπου $w_B \equiv$ το μέγιστο πλήθος γραμμικών ανεξάρτητων στοιχείων του B .

Από τα Θεωρήματα 4.1.2 (3), 4.1.6 και 4.3.7 έπεται ότι

4.3.8 Θεώρημα (Θεώρημα Δομής I). Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε ότι $A \cong B$ αν και μόνο αν $w_A = w_B$, $\{p_1, \dots, p_\kappa\} = \{q_1, \dots, q_\tau\}$ και για κάθε i , $1 \leq i \leq \kappa$, αν $p_i = q_{z(i)}$, τότε $\rho_i = \mu_{z(i)}$ και η ακολουθία $p_i^{\lambda_{i1}}, p_i^{\lambda_{i2}}, \dots, p_i^{\lambda_{i\rho_i}}$ ισούται με την ακολουθία $q_{z(i)}^{\sigma_{z(i)1}}, \dots, q_{z(i)}^{\sigma_{z(i)\mu_{z(i)}}}$.

4.3.9 Ορισμός. Τα στοιχεία του R : $p_1^{\lambda_{11}}, \dots, p_1^{\lambda_{1\rho_1}}, p_2^{\lambda_{21}}, \dots, p_2^{\lambda_{2\rho_2}}, \dots, p_\kappa^{\lambda_{\kappa 1}}, \dots, p_\kappa^{\lambda_{\kappa \rho_\kappa}}$ λέγονται οι στοιχειώδεις διαιρέτες του T_A .

Συνεπώς το Θεώρημα Δομής I λέει ότι αν A, B είναι πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα τότε $A \cong B$ αν και μόνο αν $w_A = w_B$ και οι στοιχειώδεις διαιρέτες του T_A είναι οι ίδιοι με τους στοιχειώδεις διαιρέτες του T_B .

Το ακόλουθο θεώρημα, εκφράζει τη μοναδικότητα ως προς το πλήθος και τις τάξεις, της ανάλυσης ενός πεπερασμένα παραγόμενου περιοδικού R -προτύπου σε ευθύ άθροισμα μη μηδενικών κυκλικών, με διαφορετικό τρόπο.

4.3.10 Θεώρημα (Θεώρημα Δομής II). Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο περιοδικό R -πρότυπο. Τότε υπάρχουν $d_1, \dots, d_\nu$ στοιχεία του R με $d_i \neq 0$, d_i μη αντιστρέψιμα, $1 \leq i \leq \nu$, $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\nu$ και $M \cong Cd_1 \oplus \dots \oplus Cd_\nu$.

Επιπλέον αν $M \cong Cr_1 \oplus \dots \oplus Cr_\mu$ και $r_i \neq 0$, r_i μη αντιστρέψιμα, $1 \leq i \leq \mu$ και $r_1 \mid r_2 \mid \dots \mid r_\mu$ τότε $\mu = \nu$ και $Cr_i = Cd_i$, $1 \leq i \leq \mu$.

Απόδειξη. Επειδή M είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο περιοδικό R -πρότυπο υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων στοιχείων $p_1, \dots, p_\kappa$ του R με $Mp_i \neq \{0\}$ και $M = Mp_1 \oplus \dots \oplus Mp_\kappa$. Τώρα από το Θεώρημα 4.3.4 κάθε Mp_i είναι ευθύ άθροισμα κυκλικών.

Αν ν_i είναι το πλήθος των μη μηδενικών κυκλικών όρων που εμφανίζεται στην ανάλυση του Mp_i , $1 \leq i \leq \kappa$ έστω $\nu = \max\{\nu_i, 1 \leq i \leq \kappa\}$. Τότε

$$Mp_1 = M_{11} \oplus \dots \oplus M_{1\nu}$$

$$Mp_2 = M_{21} \oplus \dots \oplus M_{2\nu}$$

$$\vdots$$

$$Mp_\kappa = M_{\kappa 1} \oplus \dots \oplus M_{\kappa \nu}$$

όπου $M_{ij} \cong Cp_i^{\lambda_{ij}}$ και $\lambda_{i1} \leq \lambda_{i2} \leq \dots \leq \lambda_{i\nu}$, $1 \leq i \leq \kappa$.

Μερικά από τα M_{ij} μπορεί να είναι 0 δηλαδή $\lambda_{ij} = 0$, απλά τα θεωρούμε στην αρχή ώστε να έχουμε το ίδιο πλήθος όρων σε κάθε ανάλυση. Προφανώς για κάθε $j \in \{1, \dots, \nu\}$ υπάρχει $i \in \{1, \dots, \kappa\}$ με $M_{ij} \neq 0$.

Έστω τώρα $M_j = M_{1j} \oplus \dots \oplus M_{\kappa j}$. Τότε $M = Mp_1 \oplus \dots \oplus Mp_\kappa = M_1 \oplus \dots \oplus M_\nu$.

Από την Πρόταση 4.2.3 $M_j \cong Cd_j$ όπου $d_j = p_1^{\lambda_{1j}} p_2^{\lambda_{2j}} \cdots p_\kappa^{\lambda_{\kappa j}}$ και επειδή $\lambda_{i1} \leq \lambda_{i2} \leq \cdots \leq \lambda_{i\nu}$, $1 \leq i \leq \kappa$ έχουμε ότι $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\nu$. Επιπλέον από την επιλογή του ν έπεται ότι $d_i \neq 0$ και d_i μη αντιστρέψιμα, $1 \leq i \leq \nu$.

Έστω τώρα ότι $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_\mu$ όπου $N_i \cong Cr_i$, r_i μη αντιστρέψιμα, $r_i \neq 0$, $1 \leq i \leq \mu$ και $r_1 \mid r_2 \mid \dots \mid r_\mu$.

Έστω $p_1, \dots, p_\tau$ οι μη συντροφικοί πρώτοι που εμφανίζονται στις αναλύσεις σε γινόμενο πρώτων των d_ν και r_μ . Αν

$$\begin{aligned} d_1 &= p_1^{a_{11}} \cdots p_\tau^{a_{1\tau}} & \text{και} & & r_1 &= p_1^{\beta_{11}} \cdots p_\tau^{\beta_{1\tau}} \\ \vdots & & & & \vdots & \\ d_\nu &= p_1^{a_{\nu 1}} \cdots p_\tau^{a_{\nu \tau}} & & & r_\mu &= p_1^{\beta_{\mu 1}} \cdots p_\tau^{\beta_{\mu \tau}} \end{aligned}$$

τότε επειδή

$$Cd_i \cong \bigoplus_{j=1}^{\tau} Cp_j^{a_{ij}} \quad \text{και} \quad Cr_j \cong \bigoplus_{i=1}^{\tau} Cp_i^{\beta_{ji}}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_1 \oplus \cdots \oplus M_\nu &= M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_\mu \\ Cd_1 \oplus \cdots \oplus Cd_\nu &= Cr_1 \oplus \cdots \oplus Cr_\mu \\ \bigoplus_{i=1}^{\nu} \bigoplus_{j=1}^{\tau} Cp_j^{a_{ij}} &= \bigoplus_{j=1}^{\mu} \bigoplus_{i=1}^{\tau} Cp_i^{\beta_{ji}}. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.1.6 έχουμε ότι

$$Cp_i^{a_{1i}} \oplus Cp_i^{a_{2i}} \oplus \cdots \oplus Cp_i^{a_{\nu i}} \cong Cp_i^{\beta_{1i}} \oplus \cdots \oplus Cp_i^{\beta_{\mu i}} \quad (*)$$

για κάθε $1 \leq i \leq \tau$.

Επειδή d_1 είναι $\neq 0$ και μη αντιστρέψιμο υπάρχει τουλάχιστον ένα πρώτο στοιχείο στην ανάλυσή του, δηλαδή κάποιο από τα a_{1i} είναι $\neq 0$. Έστω π.χ. ότι $a_{11} \neq 0$. Επειδή $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\nu$ έχουμε ότι $0 < a_{11} \leq a_{21} \leq \cdots \leq a_{\nu 1}$ άρα από το Θεώρημα 4.3.3 έπεται ότι η δεξιά πλευρά της (*) έχει ν μη μηδενικούς όρους για $i = 1$ άρα $\nu \leq \mu$.

Παρόμοια επειδή και r_1 είναι $\neq 0$ και μη αντιστρέψιμο καταλήγουμε ότι $\mu \leq \nu$ άρα $\mu = \nu$. Συνεπώς η (*) γίνεται

$$Cp_i^{a_{1i}} \oplus \dots \oplus Cp_i^{a_{\nu i}} \cong Cp_i^{\beta_{1i}} \oplus \dots \oplus Cp_i^{\beta_{\nu i}}, \quad 1 \leq i \leq \tau$$

και

$$a_{1i} \leq a_{2i} \leq \dots \leq a_{\nu i}$$

$$\beta_{1i} \leq \beta_{2i} \leq \dots \leq \beta_{\nu i}.$$

Άρα από το Θεώρημα 4.3.3 $a_{ij} = \beta_{ij}$ για κάθε i, j . Συνεπώς $[d_i] = [r_i] \quad \forall 1 \leq i \leq \tau$.

4.3.11 Ορισμός. Τα στοιχεία $d_1, \dots, d_\nu$ του R λέγονται οι αναλλοίωτοι παράγοντες του M .

Συνεπώς το Θεώρημα Δομής II λέει ότι αν A, B είναι πεπερασμένα παραγόμενα R -πρότυπα, τότε $A \cong B$ αν και μόνο αν $w_A = w_B$ και οι αναλλοίωτοι παράγοντες του T_A είναι οι ίδιοι με τους αναλλοίωτους παράγοντες του T_B .

Παραδείγματα.

1. Έστω η αβελιανή ομάδα $A = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{54}$. Να βρεθούν οι στοιχειώδεις διαιρέτες και οι αναλλοίωτοι παράγοντες της A .

Έχουμε ότι $\mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ $\mathbb{Z}_{36} \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9$ $\mathbb{Z}_{54} \cong \mathbb{Z}_{3^3} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Άρα $A \cong A_2 \oplus A_3 \oplus A_5 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^3} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{5^2}$

άρα οι στοιχειώδεις διαιρέτες είναι $2, 2^2, 3, 3^2, 5, 5, 5^2$ και οι αναλλοίωτοι παράγοντες

$$\begin{array}{ll} 2 & 2^2 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & d_1 = 3 \cdot 5 \\ 5 & 5 & 5^2 & d_2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ & & & d_3 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \end{array}$$

2. Πόσες ανά δύο μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες υπάρχουν τάξης p^5 .

Από το Θεώρημα Δομής I (στοιχειώδεις διαιρέτες) έπεται ότι υπάρχουν τόσες μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης p^5 όσες και ακολουθίες $p^{\lambda_1}, p^{\lambda_2}, \dots, p^{\lambda_k}$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 5$, άρα $\mathbb{Z}p^5$, $\mathbb{Z}p^4 \oplus \mathbb{Z}p$, $\mathbb{Z}p^3 \oplus \mathbb{Z}p^2$, $\mathbb{Z}p^3 \oplus \mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}p$, $\mathbb{Z}p^2 \oplus \mathbb{Z}p^2 \oplus \mathbb{Z}p$, $\mathbb{Z}p^2 \oplus \mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}p$, $\mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}p \oplus \mathbb{Z}p$.

3. Πόσες ανά δύο μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες υπάρχουν τάξης $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Υπάρχουν 2 επιλογές για τις 2-συνιστώσες 2^2
 $2, 2$
 3^3
 Υπάρχουν 3 επιλογές για τις 3-συνιστώσες $\rightarrow 3^2, 3$
 $3, 3, 3$

Υπάρχει 1 επιλογή για τις 5 συνιστώσες $\rightarrow 5$

Άρα υπάρχουν $2 \cdot 3 \cdot 1$ μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Ασκήσεις 4.3

1. Πόσες ανά δύο μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες υπάρχουν τάξης 126.
2. Ποιοι είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες και οι στοιχειώδεις διαιρέτες της $A = \mathbb{Z}_{23} \oplus \mathbb{Z}_{45} \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{39}$.
3. Έστω A αβελιανή ομάδα με $|A| = n$ και $\mu | n$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $K \leq A$ με τάξη της K να είναι μ .
4. Να δειχθεί ότι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα A δεν είναι κυκλική αν και μόνο αν υπάρχει $K \leq A$ με $K \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ για κάποιο πρώτο p .
5. Ποιοι είναι οι αναλλοίωτοι παράγοντες της $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$.

6. Έστω A ελεύθερη αβελιανή διάστασης λ και $B \leq A$. Ναδειχθεί ότι A/B είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν η B είναι ελεύθερη διάστασης λ .
7. Έστω A αβελιανή με αναλλοίωτους παράγοντες $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_\rho$. Ναδειχθεί ότι η A δεν μπορεί να παραχθεί από λιγότερα από ρ στοιχεία.
8. Έστω A πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα και $f: A \rightarrow A$ ένας επιμορφισμός. Ναδειχθεί ότι η f ένας ισομορφισμός.