Κεφάλαιο 3β

Ελεύθερα Πρότυπα (μέρος β)

Ο σκοπός μας εδώ είναι να αποδείξουμε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα.

3.3.6 Θεώρημα *Έστω R μια περιοχή κυρίων ιδεωδών, F ένα ελεύθερο R-πρότυπο τάξης* $s<\infty$ *και* $N \leq F$. *Τότε υπάρχει μια βάση* $\{f_1,...,f_s\}$ *του* F *και* $d_1,...,d_s \in R$ *τέτοια ώστε*

1. *τα μη μηδενικά στοιχεία του συνόλου* $\{d_1 f_1,...,d_s f_s\}$ *αποτελούν βάση του N*
2. $d_1 | d_2, d_2 | d_3, \ldots, d_{s-1} | d_s$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα θα εφαρμοστεί στα θεωρήματα δομής του Κεφαλαίου 4.

Από τις διάφορες αποδείξεις που υπάρχουν για το Θεώρημα 3.3.6, θα αναπτύξουμε εδώ μια που ουσιαστικά αποτελεί εφαρμογή της Γραμμικής Άλγεβρας και περιέχεται στο [H-H, Chapter 7]. Έχει δε το πλεονέκτημα ότι είναι εννοιολογικά απλή και το μειονέκτημα ότι είναι κάπως μακροσκελής και υπολογιστική.

Θα θεωρήσουμε γνωστές τις στοιχειώδεις ιδιότητες πινάκων (με στοιχεία από ένα μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα) και οριζουσών.

Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $A \in M_n(R)$. Ο A λέγεται **αντιστρέψιμος πίνακας** αν είναι αντιστράψιμο στοιχείο του δακτυλίου $M_n(R)$.

3.3.7 Λήμμα *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και* $A \in M_n(R)$. *Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το* $\det A$ *είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R.*

Απόδειξη Αν ο Α είναι αντιστρέψιμος, τότε από τη σχέση $AB = BA = I$ έπεται ότι $\det A \det B = \det B \det A = 1$ και άρα το $\det A$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R. Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα από τη σχέση $A(adjA) = (adjA)A = (\det A)I$, όπου $adjA$ είναι ο προσαρτημένος πίνακας του A. □

Για παράδειγμα, οι αντιστρέψιμοι πίνακες του $M_n(\mathbb{Z})$ είναι αυτοί που έχουν ορίζουσα ± 1.

Τώρα θα αναφερθούμε συνοπτικά σε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και στηλών πίνακα.

3.3.8 Ορισμός *Έστω* $A, B \in M_{m\times n}(R)$, *όπου R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Θα λέμε ότι ο B είναι ισοδύναμος με τον A αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι* $X \in M_m(R), Y \in M_n(R)$ *τέτοιοι ώστε*

$$B = XAY.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η σχέση που ορίζεται στο $M_{m\times n}(R)$ από ‘ $A \sim B \Leftrightarrow A$ είναι ισοδύναμος με το B ’ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Στη συνέχεια ορίζουμε πίνακες που παίζουν σημαντικό ρόλο στη μέλέτης της έννοιας της ισοδυναμίας. Για να μην είναι ο συμβολισμός πολύπλοκος, παραλείπουμε από αυτόν αναφορά στη διάσταση των πινάκων.

3.3.9 Ορισμός Έστω

1. F_{ij} ο πίνακας που προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα με εναλλαγή της γραμμής i με τη γραμμή j,
2. $G_i(u)$ ο διαγώνιος πίνακας $diag(1,...,1,u,1,...,1)$, όπου στη θέση i της διαγωνίου βρίσκεται το αντιστρέψιμο στοιχείο u του R
3. $H_{ij}(r)$ ο πίνακας που προκύπτει από τον μοναδιαίο αν προσθέσουμε r φορές τη γραμμή j στην γραμμή i, $i \neq j$
4. $\overline{H_{ij}}(r)$ ο πίνακας που προκύπτει από τον μοναδιαίο αν προσθέσουμε r φορές τη στήλη j στη στήλη i, $i \neq j$.

3.3.10 Παρατήρηση Επειδή $\det F_{ij} = -1,\ \det G_i(u) = u,\ \det H_{ij}(r) = \det \overline{H_{ij}}(r) = 1$, οι πίνακες $F_{ij},\ G_i(u),\ H_{ij}(r),\ \overline{H_{ij}}(r)$ είναι αντιστρέψιμοι.

Το γινόμενο καθενός από τους παραπάνω πίνακες με έναν πίνακα $A \in M_{m\times n}(R)$ περιγράφεται από το επόμενο αποτέλεσμα.

3.3.11 Λήμμα *Έστω* $A \in M_n(R)$. *Τότε ο πίνακας*

1. $F_{ij}A$ *προκύπτει από τον A αν εναλλάξουμε τις γραμμές i και j*
2. $G_i(u)A$ *προκύπτει από τον A αν πολλαπλασιάσουμε τη γραμμή i με το u*
3. $H_{ij}(r)A$ *προκύπτει από τον A αν προσθέσουμε r φορές τη γραμμή j στη γραμμή i*
4. AF_{ij} *προκύπτει από τον A αν εναλλάξουμε τις στήλες i και j*

5. $AG_i(u)$ *προκύπτει από τον A αν πολλαπλασιάσουμε τη στήλη i με το u*
6. $AH_{ij}(r)$ *προκύπτει από τον A αν προσθέσουμε r φορές τη στήλη j στη στήλη i.*

Απόδειξη Άσκηση □

Παρατήρηση Από το προηγούμενο Λήμμα και την Παρατήρηση 3.3.10 έπεται ότι αν σε ένα πίνακα $A \in M_{m\times n}(R)$ εφαρμόσουμε οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία από τους παρακάτω 'στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ή στηλών'

1. εναλλαγή δυο γραμμών (ή δυο στηλών)
2. πολλαπλασιασμός μιας γραμμής (ή στήλης) με αντιστρέψιμο στοιχείο του *R*
3. πρόσθεση *r* φορές της γραμμής *j* στη γραμμή *i* (ή της στήλης *j* στη στήλη *i*), $i \neq j$

τότε προκύπτει ένας πίνακας που είναι ισοδύναμος με τον *A*.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.3.6, θα δείξουμε το εξής αποτέλεσμα που παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

3.3.12 Θεώρημα (Κανονική Μορφή του Smith) *Κάθε $s\times t$ πίνακας με στοιχεία από μια περιχή κυρίων ιδεωδών είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής*[1] $diag(d_1,...,d_u)$, *όπου* $d_1|d_2, d_2|d_3,..., d_{u-1}|d_u$.

Απόδειξη Ορίζουμε μια συνάρτηση $\lambda : R-\{0\} \to \mathbb{N}$ από τις σχέσεις

$\lambda(u) = 0$ αν το *u* είναι αντιστρέψιμο

$\lambda(up_1...p_n) = n$ αν το *u* είναι αντιστρέψιμο και κάθε p_i είναι ανάγωγο.

Επειδή ο *R* είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης, η συνάρτηση λ είναι καλά ορισμένη. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(ab) = \lambda(a) + \lambda(b)$$

για κάθε $a,b \in R-\{0\}$.

Η ιδέα της απόδειξης είναι να αναγάγουμε τον *A* σε έναν ισοδύναμο πίνακα της μορφής

---

[1] Ο πίνακας $diag(d_1,...,d_u)$ είναι μεγέθους $s\times t$ και το στοιχείο στη θέση (i,j) είναι 0, αν $i \neq j$, και είναι το d_i αν $i = j$.

$$C=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C^* & \\ o & & & \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

όπου το d_1 διαιρεί κάθε στοιχείο του C^*. Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στον C^*, κοκ.

Η παραπάνω αναγωγή θα επιτευχθεί ως εξής. Θα δούμε ότι ο A είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής $(*)$ ή με έναν της μορφής $(**)$,

$$B, \text{ όπου } \lambda(b_{11})<\lambda(a_{11}). \qquad (**)$$

Αν εμφανιστεί η περίπτωση $(**)$, τότε επαναλαμβάνουμε την διαδικασία. Επειδή η συνάρτηση λ λαμβάνει τιμές στο $\mathbb{N}$, είναι φανερό ότι μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα εμφανιστεί η περίπτωση $(*)$.

Τώρα περιγράφουμε τον αλγόριθμο που επιτυγχάνει την αναγωγή στη μορφή $(*)$ ή $(**)$.

Έστω $A\neq 0$. Τότε ο A έχει ένα μη μηδενικό στοιχείο που μπορούμε να φέρουμε στη θέση (1,1) με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ή στηλών. Υποθέτουμε ότι $a_{11}\neq 0$.

<u>Περίπτωση 1</u>.

Έστω ότι υπάρχει στοιχείο a_{1j} στην πρώτη γραμμή του A τέτοιο ώστε το a_{11} δεν διαιρεί το a_{1j}. Εναλλάσοντας στήλες μπορούμε να υποθέσουμε ότι $j=2$. Έστω d ένας μκδ των a_{11},a_{12}. Τότε υπάρχουν $y_1,y_2\in R$ με $a_{11}=dy_1, a_{12}=dy_2$ και το 1 είναι ένας μκδ των y_1,y_2. Συνεπώς υπάρχουν $x_1,x_2\in R$ με

$$1=x_1y_1+x_2y_2.$$

Άρα $d=x_1a_{11}+x_2a_{12}$.

Από πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε ότι το στοιχείο του πίνακα

$$A\begin{pmatrix} x_1 & -y_2 & \\ x_2 & y_1 & \\ & & I_{t-2} \end{pmatrix}$$

στη θέση (1,1) είναι το $a_{11}x_1+a_{12}x_2=d$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(d)<\lambda(a_{11}).$$

Πράγματι, έχουμε $\lambda(a_{11})=\lambda(d)+\lambda(y_1)$ και $\lambda(y_1)\geq 1$ καθότι το a_{11} δεν διαιρεί το a_{12}.

Τέλος έχουμε ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} x_1 & -y_2 & \\ x_2 & y_1 & \\ & & I_{t-2} \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, αφού η ορίζουσά του είναι $x_1y_1 + x_2y_2 = 1$.

Συνεπώς είδαμε ότι στην Περίπτωση 1ο *A* είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα του οποίου το στοιχείο στη θέση (1,1) ικανοποιεί τη σχέση $(**)$.

Περίπτωση 2.

Έστω ότι υπάρχει στοιχείο a_{i1} στην πρώτη στήλη του *A* τέτοιο ώστε το a_{11} δεν διαιρεί το a_{i1}. Τότε συνεχίζουμε όπως πριν (με τη μόνη διαφορά ότι πολλαπλασιάζουμε τον *A* από τα *αριστερά* με κατάλληλο πίνακα).

Περίπτωση 3.

Έστω ότι το a_{11} διαιρεί καάθε στοιχείο της πρώτης γραμμής και κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του *A*. Τότε αφαιρώντας κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής από κάθε άλλη γραμμή και αφαιρώντας κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης στήλης από κάθε άλλη στήλη λαμβάνουμε έναν πίνακα της μορφής

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D^* & \\ o & & & \end{pmatrix}$$

Αν το a_{11} διαιρεί κάθε στοιχείο του πίνακα D^*, τότε έχουμε πετύχει την αναγωγή στη μορφή $(*)$. Διαφορετικά, υπάρχει ένα στοιχείο d_{ij} του D^* που δεν διαιρείται με το a_{11}. Στην περίπτωση αυτή προσθέτουμε στην πρώτη γραμμή του D τη γραμμή *i* του *D*. Τώρα είμαστε στην Περίπτωση 1 που είδαμε ότι οδηγεί στη μορφή $(**)$. □

Σημείωση Στην πράξη συμβαίνει συχνά να εφορμόζεται το παραπάνω θεώρημα όταν ο *R* είναι Ευκλείδεια περιοχή, πχ $R = \mathbb{Z}$ ή $R = F[x]$ (*F* σώμα). Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη Ευκλείδεια συνάρτηση αποφεύγοντας τη συνάρτηση λ. Τότε η περίπτωση 1 της προηγούμενης απόδειξης δύναται να απλουστευθεί με τη χρήση στοιχειδών μετασχηματισμών γραμμών ή στηλών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα Να βρεθεί μια κανονική μορφή Smith του πίνακα $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Με $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ (αντίστοιχα $\Gamma_i + r\Gamma_j, u\Gamma_i$) συμβολίζουμε το στοιχειώδη μετασχηματισμό που έχει αποτέλεσμα την εναλλαγή των γραμμών *i* και *j* (αντίστοιχα την πρόσθεση στη γραμμή *i*

r φορές τη γραμμή j, τον πολλαπλασιασμό της γραμμής i με το αντιστρέψιμο u). Παρόμοιο συμβολισμό χρησιμοποιούμε κια για τις στήλες.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 - 2\Sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 - 2\Sigma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

Εδώ έχουμε πετύχει την αναγωγή στη μορφή $(*)$. Στη συνέχεια εργαζόμαστε αγνοώντας την πρώτη γραμμή και στήλη, δηλαδή ουσιαστικά εργαζόμαστε με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 + 3\Sigma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 31 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 - 9\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 31 \end{pmatrix}.$$

Άρα μια ζητούμενη κανονική μορφή Smith του $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ είναι η $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 31 \end{pmatrix}$.

Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.11, είναι δυνατόν να υπολογιστούν πίνακες X, Y τέτοιοι ώστε $X^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 31 \end{pmatrix}$ (άσκηση).

Σημείωση Αναφέρουμε εδώ ότι τα d_i στην Κανονική Μορφή Smith είναι μοναδικά ως προς συντροφικότητα στοιχείων. Δηλαδή, αν $diag(d_1,...,d_u)$ είναι μια κανονική μορφή Smith ενός πίνακα A, τότε κάθε άλλη κανονική μορφή Smith του A είναι της μορφής $diag(c_1 d_1,...,c_u d_u)$, όπου τα c_i είναι αντιστρέψιμα στοιχεία. Η απόδειξη θα δοθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.6 χρειαζόμαστε μια παρατήρηση για βάσεις που στην περίπτωση των διανυσματικών χώρων μας είναι γνωστή από τη Γραμμική Άλγεβρα..

Με το συμβολισμό του Θεωρήματος 3.3.6, έστω $\hat{n} = \{n_1,...,n_t\}$ μια διατεταγμένη βάση του N και $\hat{f} = \{f_1,...,f_s\}$ μια διατεταγμένη βάση του F. Τότε υπάρχουν μοναδικά $a_{ji} \in R$ τέτοια ώστε $n_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ji} f_j$, $i = 1,...,t$. Θα λέμε ότι ο πίνακας $(a_{kl}) \in M_{s\times t}(R)$ είναι ο **πίνακας της** $\hat{n}$ **ως προς τη** $\hat{f}$ **.**

3.3.13 Λήμμα *Διατυρώντας τους προηγούμενους συμβολισμούς, έστω* $\widehat{f^*}, \widehat{n^*}$ *δυο άλλες διατεταγμένες βάσεις των F και N και έστω* A^* *α πίνακας από της* $\widehat{n^*}$ *ως προς τη* $\widehat{f^*}$ *. Τότε*

$$A^* = X^{-1}AY\ ,$$

όπου X είναι ο πίνακας της $\widehat{f^*}$ *ως προς τη* $\hat{f}$ *και Y είναι ο πίνακας της* $\widehat{n^*}$ *ως προς τη* $\hat{n}$*.*

Απόδειξη Άσκηση (βλ. οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας) □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.6

Αν $N = 0$, μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε βάση του F και να θέσουμε $d_1 = ... = d_u = 0$.

Έστω ότι $N \neq 0$. Έστω $\hat{n} = \{n_1,...,n_t\}$ μια διατεταγμένη βάση του N, $\hat{f} = \{f_1,...,f_s\}$ μια διατεταγμένη βάση του F και A ο πίνακας της $\hat{n}$ ως πρός την $\hat{f}$. Από το Θεώρημα 3.3.12 υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες X, Y τέτοιοι ώστε

$$X^{-1}AY = diag(d_1.,,,.d_u),\ d_1 \left| d_2 \right| ... \left| d_u \right.$$

Έστω $\widehat{f^*}, \widehat{n^*}$ οι διατεταγμένες βάσεις των F και N που δίνονται από τις σχέσεις

$$f_i^* = \sum_{j=1}^{s} x_{ji} f_j$$

$$n_i^* = \sum_{j=1}^{t} y_{ji} n_j$$

Από το Λήμμα 3.3.13 έπεται ότι ο πίνακας της $\widehat{n^*}$ ως προς τη $\widehat{f^*}$ είναι ο $X^{-1}AY = diag(d_1.,,,.d_u)$, όπου $d_1 \left| d_2 \right| ... \left| d_u \right.$ και $u = \min\{s,t\} = t$. Συνεπώς έχουμε ότι $n_1^* = d_1 f_1^*,...,n_t^* = d_t f_t^*$. Τέλος θέτουμε $d_{t+1} = ... = d_s = 0$. □