Κεφάλαιο 3

Ελεύθερα Πρότυπα

3.1 Ελεύθερα Πρότυπα

Έστω M ένα R-πρότυπο. Μια οικογένεια $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στοιχείων του M καλείται *βάση* του M αν i) το σύνολο $\{e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ παράγει το M, και ii) κάθε $m\in M$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα της μορφής $\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$, όπου $r_\lambda \in R$ και όλα εκτός του πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος από τα r_λ είναι μηδέν.

Ελεύθερο λέγεται το πρότυπο που έχει μια τουλάχιστον βάση. (Δεχόμαστε ότι το μηδενικό R-πρότυπο (0) είναι ελεύθερο με μία βάση το κενό σύνολο). Για παράδειγμα, το R είναι ελεύθερο R-πρότυπο με βάση το μονοσύνολο $\{1\}$. Το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ είναι ελεύθερο με βάση $\{1,\sqrt{-2}\}$ (γιατί;).

Μια οικογένεια $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στοιχείων του M καλείται *γραμμικά εξαρτημένη* αν υπάρχουν $r_\lambda\in R$, όπου όλα εκτός του πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος από τα r_λ είναι μηδέν και τουλάχιστον ένα r_λ δεν είναι μηδέν. Διαφορετικά θα λέμε ότι η οικογένεια αυτή είναι *γραμμικά ανεξάρτητη*.

Αποδεικνύεται (βλ. Άσκηση 1) ότι ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

- Η οικογένεια $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι μια βάση του M
- Η οικογένεια $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ παράγει το M και είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

3.1.1 Πρόταση *Ένα R-πρότυπο M είναι ελεύθερο αν και μόνο αν είναι ισόμορφο με ένα πρότυπο της μορφής $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$, όπου $R_\lambda = R$ για κάθε $\lambda\in\Lambda$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το M είναι ελεύθερο με βάση $\{e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$. Κάθε στοιχείο $m\in M$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $m=\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$ όπου όλα τα r_λ είναι μηδέν εκτός το πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος. Άρα ορίζεται μια απεικόνιση

$$\varphi : M \ni m \mapsto (r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$$

που είναι R-ισομορφισμός. Αντίστροφα, το $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ είναι ελεύθερο γιατί μία βάση του είναι το σύνολο $\{\varepsilon_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$, όπου ε_λ είναι η ακολουθία $\varepsilon_\lambda = (\varepsilon_\lambda)_\mu$ με $\varepsilon_{\lambda\mu}=0$ αν $\lambda\neq\mu$ και $\varepsilon_{\lambda\mu}=1$ αν $\lambda=\mu$. □

3.1.2 Πόρισμα *Κάθε R-πρότυπο M είναι ομομορφική εικόνα ελεύθερου R-πρότυπου.*

Απόδειξη. Έστω *Λ* ένα σύνολο γεννητόρων *M*, για παράδειγμα $\Lambda = M$. Κατά τον προφανή τρόπο ορίζεται ένας *R*–επιμορφισμός $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \to M$. □

Ξέρουμε ότι κάθε *F*-διανυσματικός χώρος, *F* σώμα, είναι ένα ελεύθερο *F*-πρότυπο. Όταν ο δακτύλιος *R* δεν είναι σώμα, υπάρχουν πρότυπα που δεν είναι ελεύθερα Για παράδειγμα, το $\mathbb{Z}$ πρότυπο $\mathbb{Z}_m$ $(m>1)$ δεν είναι ελεύθερο. Μια άλλη διαφοροποίηση είναι ότι υποπρότυπο ελεύθερου πρότυπου δεν είναι αναγκαστικά ελεύθερο. Για παράδειγμα, το $\mathbb{Z}_4$-υποπρότυπο $\{[0],\ [2]\}$ του $\mathbb{Z}_4$ δεν είναι ελεύθερο (γιατί;). Θα δούμε όμως παρακάτω, ότι αν ο *R* είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών τότε κάθε υποπρότυπο ελεύθερου πρότυπου πεπερασμένης τάξης είναι πάλι ελεύθερο. Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι το ακόλουθο λήμμα.

3.1.3 Πρόταση *Έστω $f : M \to F$ ένας επιμορφισμός προτύπων. Αν το F είναι ελεύθερο, τότε υπάρχει υποπρότυπο $F^/$ του M τέτοιο ώστε $M = \ker f \oplus F^/$*

Απόδειξη. Έστω $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ μια βάση του F. Αφού ο *f* είναι επιμορφισμός υπάρχουν $m_\lambda \in M, \lambda \in \Lambda$, με την ιδιότητα $f(m_\lambda) = e_\lambda$. Για αυτήν την επιλογή ορίζουμε έναν *R*-ομομορφισμό $f^/ : F \to M$ από τις σχέσεις

$$f^/(e_\lambda) = m_\lambda .$$

(Για να ορίσουμε έναν *R* – ομομορφισμό πάνω σ' ένα ελεύθερο *R* – πρότυπο αρκεί να οριστεί η απεικόνιση πάνω σε μία βάση και να την επεκτείνουμε γραμμικά). Προφανώς $f \circ f^/ = 1_F$.
Θέτουμε $F^/ = \operatorname{Im} f^/$.

Παρατηρούμε ότι:

1) Ισχύει $F^/ \simeq F$. Πράγματι, από τη σχέση $f \circ f^/ = 1_F$ έπεται ότι η $f^/$ είναι 1-1.
2) Ισχύει $\ker f \cap F^/ = \{0\}$. Πράγματι, αν $f^/(x) \in \ker f$, όπου $x \in F$, τότε έχουμε $f(f^/(x)) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f^/(x) = 0.$
3) Ισχύει $M = \ker f + F^/$. Πράγματι, αν $m \in M$, τότε γράφοντας $m = \left(m - f^/ \circ f(m)\right) + f^/ \circ f(m)$ έχουμε αφενός $m - f^/ \circ f(m) \in \ker f$, αφού $f\left(m - f^/ \circ f(m)\right) = f(m) - f \circ f^/ \circ f(m) = f(m0 - f(m) = 0$ και αφετέρου $f^/ \circ f(m) \in \operatorname{Im} f^/$. □

Θθα αποδείξουμε στη συνέχεια δύο σημαντικά αποτελέσματα. Το πρώτο λέει ότι οποιεσδήποτε δύο βάσεις ενός ελεύθερου *R* – πρότυπου, όπου *R* μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό. Αυτό δεν ισχύει γενικά για μη μεταθετικούς δακτυλίους . Το δεύτερο αποτέλεσμα μας πληροφορεί ότι υποπρότυπο ελευθέρου προτύπου πάνω από περιοχή κυρίων ιδεωδών είναι ελεύθερο. Αυτό δεν ισχύει για γενικούς δακτυλίους. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε την έννοια του μεγίστα ιδεώδους.

3.2 Πρώτα και Μέγιστα Ιδεώδη

Θυμίζουμε εδώ τα πλέον βασικά περί πρώτων και μέγιστων ιδεωδών. Υποθέτουμε εδώ ότι ο R είναι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

3.2.1 Ορισμός *Ένα ιδεώδες P του R καλείται πρώτο αν*

(i) $P \neq R$, και

(ii) αν $a,b \in R$ με $ab \in P$ τότε $a \in P$ ή $b \in P$.

3.2.2 Πρόταση *Έστω I ιδεώδες του R. Τότε το I είναι πρώτο αν και μόνο αν ο δακτύλιος πηλίκο R/I είναι περιοχή.*

Απόδειξη. Έστω I πρώτο. Τότε $I \neq R$ και $R/I \neq 0$. Έστω $a,b \in R$ με την ιδιότητα $(a+I)(b+I) = 0_{R/I}$. Τότε $ab + I = I$ και άρα $ab \in I$. Συνεπώς $a \in I$ ή $b \in I$ δηλαδή $a + I = 0_{R/I}$ ή $b + I = 0_{R/I}$.

Αντίστροφα, έστω R/I ακέραια περιοχή. Τότε $R/I \neq 0$ και άρα $I \neq R$. Έστω $a,b \in R$ με $ab \in I$. Τότε $ab + I = 0_{R/I} \Rightarrow (a+I)(b+I) = 0_{R/I} \Rightarrow$ $a + I = 0_{R/I}$ ή $b + I = 0_{R/I} \Rightarrow a \in I$ ή $b \in I$. □

3.2.3 Ορισμός *Ένα ιδεώδες M του R ονομάζεται μέγιστο αν*

(i) $M \neq R$, και

(ii) δεν υπάρχει ιδεώδες I του R με την ιδιότητα $M \underset{\neq}{\subseteq} I \underset{\neq}{\subseteq} R$.

3.2.4 Πρόταση *Έστω I ένα ιδεώδες του R. Τότε το I είναι μέγιστο αν και μόνο αν ο δακτύλιος πηλίκο R/I είναι σώμα.*

Απόδειξη. Έστω ότι το I είναι μέγιστο. Τότε $I \neq R$ και $R/I \neq 0$. Έστω $a + I \in R/I$ με $a + I \neq 0_{R/I}$. Θα δείξουμε ότι το $a + I$ είναι αντιστρέψιμο. Εφόσον $a + I \neq 0_{R/I}$ ισχύει $a \notin I$. Το ιδεώδες $(a) + I$ περιέχει γνήσια το I. Αφού το I είναι μέγιστο έχουμε $(a) + I = R$. Άρα για κάποια $r \in R$ και $b \in I$ ισχύει $ra + b = 1$. Συνεπώς $(r+1)(a+I) = ra + I = (1-b) + I = 1 + I$ και το $r + I$ είναι αντιστρέψιμο.

Αντίστροφα, έστω ότι ο R/I είναι σώμα. Τότε $R/I \neq 0$ και άρα $I \neq R$. Έστω J ιδεώδες με $I \underset{\neq}{\subseteq} J \underset{\neq}{\subseteq} R$. Θα δείξουμε ότι $J = R$, οπότε το I είναι μέγιστο. Υπάρχει $a \in J$, $a \notin I$. Άρα $a + I \neq 0_{R/I}$ και, αφού το R/I είναι σώμα, $(a+I)(b+I) = 1 + I$ για κάποιο $b \in R$. Άρα

$$ab - 1 \in I.$$

Εφόσον $I \subseteq J$ και $a \in J$ συμπεραίνουμε ότι $1 \in J$, δηλαδή $J = R$. □

3.2.5 Πόρισμα *Κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι πρώτο.*

Απόδειξη. Άμεση από τις Προτάσεις 3.2.4 και 3.2.2. □

Για παράδειγμα, το ιδεώδες (x) του $\mathbb{Z}[x]$ είναι πρώτο, γιατί $\mathbb{Z}[x]/(x) \cong \mathbb{Z}$ που είναι περιοχή, και όχι μέγιστο αφού ο $\mathbb{Z}$ δεν είναι σώμα. Το ιδεώδες $(2,x)$ του $\mathbb{Z}[x]$ είναι μέγιστο, αφού $\mathbb{Z}[x]/(2,x) \cong \mathbb{Z}_2$ (γιατί;) που είναι σώμα. .

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ύπαρξη μεγίστου ιδεώδες σε κάθε μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε το λήμμα του Zorn.

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια σχέση $\leq$ στο X ονομάζεται *σχέση μερικής διάταξης* αν i) $x \leq \forall x \in X$, ii) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$, και iii) $x \leq y, \quad y \leq x \Rightarrow \quad x = y$. Είναι μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μία σχέση μερικής διάταξης καλείται *μερικά διατεταγμένο σύνολο*. Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο X για το οποίο ισχύει η συνθήκη iv) για κάθε $x, y \in X$ είτε $y \leq x$, ονομάζεται ολικά *διατεταγμένο σύνολο*.

Έστω Y ένα υποσύνολο του μερικά διατεταγμένου συνόλου X. Ένα στοιχείο $x \in X$ ονομάζεται *άνω φράγμα* του Y αν $y \leq x$ για κάθε $y \in Y$.

Έστω στοιχείο $x \in X$ του μερικά διατεταγμένου συνόλου X ονομάζεται *μέγιστο* αν $x \leq x'$ με $x' \in X$ συνεπάγεται $x = x'$.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το Λήμμα του Zorn.

3.2.6 Λήμμα του Zorn *Έστω X ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο που έχει την ιδιότητα ότι κάθε μη κενό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του X έχει ένα άνω φράγμα στο X. Τότε το X έχει ένα τουλάχιστον μέγιστο στοιχείο.*

Αποδεικνύεται στη Θεωρία Συνόλων ότι το Λήμμα του Zorn είναι ισοδύναμο με το Αξίωμα Επιλογής. Βέβαια εμείς εδώ θα το δεχτούμε ως αξίωμα.

3.2.7 Πρόταση *Έστω $R \neq 0$ δακτύλιος. Τότε ο R έχει ένα τουλάχιστον μέγιστο ιδεώδες.*

Απόδειξη. Έστω X το σύνολο των γνήσιων ιδεωδών του R. Είναι $X \neq \varnothing$, αφού $R \neq \{0\}$. Ως σχέση μερικής διάταξης θεωρούμε τη σχέση $\subseteq$ υποσυνόλου. Έστω Y ένα μη κενό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του X. Θέτουμε

$$J = \bigcup_{I \in Y} I .$$

Το J είναι ιδεώδες του R. Πράγματι αν $a, b \in J$ τότε $a \in I_1$, και $b \in I_2$ για κάποια $I_1, I_2 \in Y$. Αλλά το Y είναι ολικά διατεταγμένο. Συνεπώς $I_1 \subseteq I_2$ ή $I_2 \subseteq I_1$. Επομένως $a + b \in I_2$ ή $a + b \in I_1$, αντίστοιχα. Άρα $a + b \in J$. Επίσης, $ra \in I_1$ για κάθε $r \in R$ αφού το I_1 είναι ιδεώδες. Ισχύει $J \in X$ αφού το J είναι γνήσιο ιδεώδες του R, γνήσιο γιατί αν $1 \in J$ τότε

$1 \in I$ για κάποιο $I \in Y \subseteq X$ που δεν ισχύει. Άρα το J είναι ένα άνω φράγμα του Y στο X. Από το Λήμμα του Zorn συμπεραίνουμε ότι το X έχει ένα μέγιστο στοιχείο M. Προφανώς το M είναι μέγιστο ιδεώδες. □

Η παραπάνω απόδειξη είναι η αυστηρή διατύπωση της ιδέας: Έστω I_1 γνήσιο ιδεώδες του R. Αν δεν είναι μέγιστο, τότε περιέχεται γνήσια σε κάποιο άλλο I_2. Αν το I_2 δεν είναι μέγιστο… Το Λήμμα του Zorn εγγυάται ότι η διαδικασία περατούται.

3.2.3 Πόρισμα *Κάθε γνήσιο ιδεώδες του R περιέχεται σ' ένα μέγιστο ιδεώδες.*

Απόδειξη. Έστω I ένα γνήσιο ιδεώδες του R. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.2.7 στο δακτύλιο R/I οπότε υπάρχει μέγιστο ιδεώδες του R/I. Όμως αυτό έχει τη μορφή M/I όπου M μέγιστο ιδεώδες του R που περιέχει το I. □

3.3 Πληθάριθμος Βάσης Ελεύθερου Πρότυπου

3.3.1 Θεώρημα *Έστω $R \neq \{0\}$ ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και F ένα ελεύθερο R-πρότυπο που έχει μία πεπερασμένη βάση με n στοιχεία. Τότε κάθε άλλη βάση του F έχει n στοιχεία.*

Απόδειξη. Έστω $\{e_1,...,e_n\}$ μια βάση του F (μπορούμε να υποθέσουμε $n \neq 0$ δηλαδή $F \neq 0$). Αφού $R \neq \{0\}$, υπάρχει μέγιστο ιδεώδες M του R (Πρόταση 3.2.7). Σύμφωνα με την Άσκηση 7, το πρότυπο πηλίκο F/MF είναι ένα R/M-πρότυπο, δηλαδή είναι ένας R/M - διανυσματικός χώρος. Θα δείξουμε ότι τα στοιχεία $e_1 + MF,...,e_n + MF$ αποτελούν μία βάση του F/MF.

Εφόσον το σύνολο $\{e_1,...,e_n\}$ παράγει το F ως R – πρότυπο, είναι προφανές ότι τα στοιχεία $e_1 + MF,...,e_n + MF$ παράγουν το F/MF ως R/M-πρότυπο.

Δείχνουμε τώρα ότι τα $e_1 + MF,...,e_n + MF$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του F/MF πάνω από το R/M. Έστω

$$\sum_i (r_i + M)(e_i + MF) = MF,\ r_i \in R .$$

Τότε $\sum_i r_i e_i \in MF$. Γράφοντας

$$\sum_i r_i e_i = \sum_i a_i e_i,\ a_i \in M$$

συμπεραίνουμε ότι $r_i = a$ γιατί τα e_i, $i = 1,...n$, είναι βάση του F. Έτσι $r_i \in M$ και συνεπώς $r_i + M = M$ για κάθε $i = 1,...n$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι: $\{e_1,...,e_n\}$ βάση του $F \Rightarrow \{e_1+M,...,e_n+M\}$ βάση του διανυσματικού χώρου F/MF. Επειδή τώρα κάθε δύο βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου έχουν τον ίδιο πληθάριθμο (όπως θυμόμαστε από τη Γραμμική Άλγεβρα), προκύπτει το ζητούμενο. □

3.3.2 Σημείωση Το Θεώρημα 3.3.1 δεν ισχύει γενικά για μη μεταθετικούς δακτυλίους.

Το Θεώρημα 3.3.1 μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια της τάξης ελεύθερου προτύπου.

3.3.3 Ορισμός *Έστω F ένα ελεύθερο R-πρότυπο, όπου $R \neq \{0\}$. Ο πληθάριθμος μιας πεπερασμένης βάσης του F ονομάζεται τάξη του F. Αν το F δεν έχει πεπερασμένη βάση θα λέμε ότι η τάξη του είναι άπειρη. Η τάξη του F συμβολίζεται $rank\, F$.*

3.3.4 Λήμμα *Έστω F_1, F_2 ελεύθερα R-πρότυπα. Τότε το $F_1 \oplus F_2$ είναι ελεύθερο και $rank\,(F_1 \oplus F_2) = rank\, F_1 + rank\, F_2$.*

Απόδειξη. Ασκηση □

Υποπρότυπα Ελευθέρων Προτύπων

Δεν αληθεύει ότι κάθε υποπρότυπο ελεύθερου πρότυπου είναι ελεύθερο. Για παράδειγμα, έστω $R = \mathbb{Q}[x, y]$ και $I = (x, y)$. Το I δεν είναι ελεύθερο R-πρότυπο (γιατί;). Η περίπτωση των περιοχών κυρίων ιδεωδών είναι πιο ευχάριστη:

3.3.5 Θεώρημα *Έστω R περιοχή κυρίων ιδεωδών και F ένα ελεύθερο R-πρότυπο με $rank\, F = n < \infty$. Τότε κάθε υποπρότυπο $F' < F$ είναι ελεύθερο με $rank\, F' \leq n$.*

Απόδειξη. Επαγωγή στο n. Για $n = 1$, έχουμε $F \cong R$, οπότε πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ιδεώδες του R είναι ελεύθερο R-πρότυπο. Κάθε ιδεώδες του R έχει τη μορφή $I = (a)$ για κάποιο $a \in R$. Αν $a = 0$, τότε $I = (0)$ είναι ελεύθερο με τάξη 0. Αν $a \neq 0$, τότε ως R-πρότυπα ισχύει $I \simeq R$, γιατί η απεικόνιση

$$R \ni r \mapsto ra \in I$$

είναι R-ισομορφισμός. Άρα σ' αυτήν την περίπτωση το I είναι ελεύθερο με τάξη 1.

Υποθέτουμε τώρα $n > 1$ και ότι το θεώρημα ισχύει για όλα τα ελεύθερα R-πρότυπα με τάξη $\leq n-1$. Έστω $\{e_1,...,e_n\}$ βάση του F, οπότε $F = \langle e_1 \rangle + ... + \langle e_n \rangle$. Θέτουμε $\overline{F} = \langle e_2 \rangle + \cdots + \langle e_n \rangle$. Ισχύει $F' \cap \overline{F} \leq \overline{F}$ και το $\overline{F}$ έχει τάξη $n-1$. Άρα το $F' \cap \overline{F}$ είναι ελεύθερο με τάξη $\leq n-1$. Ισχύει $F/\overline{F} \simeq \langle e_1 \rangle$ και άρα το $F/\overline{F}$ έχει τάξη 1.

Έστω

$$\varphi : F \to F/\overline{F}$$

ο φυσικός επιμορφισμός και

$$\varphi \mid F' : F' \to F/\overline{F}$$

ο περιορισμός του φ στο F'. Επειδή το $F/\overline{F}$ είναι ελεύθερο τάξης 1, η εικόνα $\varphi(F')$ θα είναι ελεύθερο πρότυπο τάξης 0 ή 1.

Από την Πρόταση 3.1.3 έχουμε $F' \simeq \ker\phi \mid F' \oplus \phi(F')$. Όμως $\ker\varphi \mid F' = \overline{F} \cap F'$ που από την επαγωγική υπόθεση είναι ελεύθερο με τάξη $\leq n-1$. Έτσι

$$F' \simeq (\overline{F} \cap F') \oplus \phi(F').$$

Το δεξί μέλος είναι ευθύ άθροισμα ελεύθερων προτύπων και άρα ελεύθερο με $rank((\overline{F} \cap F') \oplus \varphi(F')) = rank(\overline{F} \cap F') + rank\varphi(F') \leq n-1+1 = n$ (Λήμμα 3.3.4). □

Ασκήσεις

Υποθέτουμε ότι ο R είναι ένας μη μηδενικός μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

1. Έστω M ένα R-πρότυπο και $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μια οικογένεια στοιχείων του M. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύνμαες.

- Η οικογένεια $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι μια βάση του M
- Η οικογένεια $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ παράγει το M και είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

2. Έστω k ένα σώμα. Το ιδεώδες (x,y) του $k(x,y)$ δεν είναι ελεύθερο ως $k[x,y]$-πρότυπο.

3. Αληθεύει ότι το $\mathbb{Q}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο;

4. Έστω R μια περιοχή κυρίων ιδεωδών, M ένα ελεύθερο R-πρότυπο τάξης n, όπου $n<\infty$ και $B=\{b_1,\ldots,b_n\}\subseteq M$.

a. Αποδείξτε ότι το B είναι βάση του M αν και μόνο αν το B παράγει το M.

b. Εξετάστε αν η πρόταση ‘Το B είναι βάση του M αν και μόνο αν το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο’ είναι σωστή.

5. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) R είναι σώμα.

(ii) Κάθε R-πρότυπο είναι ελεύθερο.

(iii) Κάθε κυκλικό R-πρότυπο είναι ελεύθερο.

6. Έστω R ένας δακτύλιος. Τότε κάθε ιδεώδες του R είναι ελεύθερο R-πρότυπο αν και μόνο αν ο R είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.

7. Έστω I ιδεώδες του R. Αν M είναι ένα R-πρότυπο, ορίζουμε IM ως το υποπρότυπο του M που παράγεται από το σύνολο $\{am \mid a\in I, m\in M\}$. Τότε το M/IM έχει τη δομή R/I-προτύπου, όπου $(r+I)(m+IM)=rm+IM$.

8. Αν κάθε πηλίκο οποιουδήποτε ελεύθερου R- πρότυπο είναι πάλι ελεύθερο, τότε ο R είναι…(συμπληρώστε).

9. Είναι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ περιοχή κυρίων ιδεωδών; Είναι το ιδεώδες $\mathbb{Z}\times\{0\}$ ελεύθερο $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ πρότυπο;

10. Αληθεύει ότι το $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]=\{a+b\sqrt{d}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, όπου $d\in\mathbb{N}$, είναι ελεύθερο; Αν ναι, ποια είναι η τάξη του;