

Κεφάλαιο 1

Πρότυπα

Στο κεφάλαιο αυτό εισαγάγουμε την έννοια του προτύπου πάνω από δακτύλιο που θα παίζει σημαντικό ρόλο στα επόμενα κεφάλαια.

Στις σημειώσεις αυτές όλοι οι δακτύλιοι περιέχουν μοναδιαίο στοιχείο και δεν είναι αναγκαστικά μεταθετικοί. Όταν λέμε ιδεώδες ενός δακτυλίου εννοούμε αριστερό ιδεώδες.

1.1 Ορισμοί και Παραδείγματα

1.1.1 Ορισμός Έστω R ένας δακτύλιος. Μια Αβελιανή ομάδα M εφοδιασμένη με μια απεικόνιση

$$R \times M : (r, m) \mapsto r \cdot m \in M$$

ονομάζεται R - πρότυπο ή πρότυπο πάνω από το R αν ισχύουν

- (i) $r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = (r_1 r_2) \cdot m$ για κάθε $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$
- (ii) $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$ για κάθε $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$
- (iii) $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$ για κάθε $r \in R$, $m_1, m_2 \in M$
- (iv) $1_R \cdot m = m$ για κάθε $m \in M$.

Στα παρακάτω θα γράφουμε rm στη θέση του $r \cdot m$. Στον προηγούμενο ορισμό, θα ονομάζουμε την απεικόνιση $R \times M \rightarrow M$, τον “εξωτερικό πολλαπλασιασμό” του M .

1.1.2 Παράδειγμα (i) Έστω F ένα σώμα. Κάθε F - διανυσματικός χώρος είναι F - πρότυπο. Μάλιστα οι έννοιες F - διανυσματικός χώρος και F - πρότυπο ταυτίζονται.

(ii) Κάθε Αβελιανή ομάδα M είναι $\mathbb{Z}$ -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από τη σχέση

$$rm = \begin{cases} m + \dots + m \text{ (} r \text{ φορές)}, & \text{αν } r > 0 \\ 0, & \text{αν } r = 0 \\ (-r)m, & \text{αν } r < 0, \end{cases}$$

όπου $r \in \mathbb{Z}$ και $m \in M$.

(iii) Κάθε ιδεώδες I ενός δακτυλίου R είναι ένα R -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $R \times I \rightarrow I, (a, b) \mapsto ab$, που ορίζεται από το πολλαπλασιασμό στοιχείων του R .

(iv) Έστω I ένα ιδεώδες ενός μεταθετικού δακτυλίου R . Ο δακτύλιος πηλίκο R/I είναι ένα R -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από τη σχέση

$$r(a + I) = ra + I,$$

όπου $r \in R$ και $a + I \in R/I$. Η σχέση αυτή είναι καλά ορισμένη, γιατί αν $a + I = a' + I$, τότε $a - a' \in I$ και άρα $r(a - a') \in I$ που σημαίνει ότι $ra + I = ra' + I$. Η επαλήθευση τώρα των αξιωμάτων του ορισμού 3.1.1 είναι θέμα ρουτίνας.

(v) Έστω $\varphi: R \rightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε ο S είναι R -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από τη σχέση

$$rs = \varphi(r)s$$

Ας επαληθεύσουμε ενδεικτικά το αξίωμα (ii) του ορισμού. Έχουμε $(r_1 + r_2)s = \varphi(r_1 + r_2)s = (\varphi(r_1) + \varphi(r_2))s = \varphi(r_1)s + \varphi(r_2)s = r_1s + r_2s$.

(vi) Έστω F ένα σώμα, V ένας F -διανυσματικός χώρος και $\alpha: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Ο V γίνεται ένα $F[x]$ -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από τη σχέση $f(x)v = f(\alpha)(v)$.

(vii) Έστω G μια Αβελιανή ομάδα και $R = \text{End}(G)$ το σύνολο των ενδομορφισμών της G . Το R είναι ένας δακτύλιος με πρόσθεση που ορίζεται από τη σχέση $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ και πολλαπλασιασμό που ορίζεται από τη σύνθεση συναρτήσεων $(fg)(x) = f(g(x))$, όπου $f, g \in \text{End}(G)$, $x \in G$.

1.1.3 Παρατήρηση Έστω M ένα R -πρότυπο. Τότε έχουμε

- (i) $0_R m = 0_M$ για κάθε $m \in M$
- (ii) $r 0_M = 0_M$ για κάθε $r \in R$
- (iii) $(-r)m = r(-m) = -rm$ για κάθε $r \in R, m \in M$

Απόδειξη. (i) Έχουμε $0_R + 0_R = 0_R \Rightarrow (0_R + 0_R)m = 0_R m \Rightarrow 0_R m + 0_R m = 0_R m$ από το αξίωμα (ii) του Ορισμού 3.1.1. Άρα $0_R m + 0_R m = 0_R m + 0_M$. Από το νόμο της διαγραφής που ισχύει στην ομάδα M παίρνουμε $0_R m + 0_M$.

(ii) Έχουμε: $0_M + 0_M = 0_M \Rightarrow r(0_M + 0_M) = r 0_M \Rightarrow r 0_M + r 0_M = r 0_M$ από το αξίωμα (iii) του ορισμού 3.1.1. Όπως και πριν παίρνουμε $r 0_M = 0_M$.

(iii) $r(m + (-m)) = r 0_M = 0_M$ από το (ii). Συνεπώς $rm + r(m) = 0_M$ και άρα $r(-m) = -(rm)$. Όμοια $(r + (-r))m = 0_R = 0_M$ από το (i). Συνεπώς $rm + (-r)m = 0_M$. Άρα $(-r)m = -(rm)$. □

Στο παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις της Παρατήρησης 1.1.3 χωρίς ιδιαίτερη μνεία. Αξίζει να σημειωθεί ότι σ' ένα R -πρότυπο M είναι δυνατό να ισχύει $rm = 0$ με $r \neq 0_R$ και $m \neq 0_M$. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο $\mathbb{Z}_n$ ισχύει $n[a] = [na] = [0]$ για κάθε $[a] \in \mathbb{Z}_n$.

1.1.4 Ορισμός Έστω M ένα R -πρότυπο. Ένα υποσύνολο $N \subseteq M$ ονομάζεται R -υποπρότυπο του M αν το N είναι R -πρότυπο ως προς την πρόσθεση και τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό του M . Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $N \leq M$.

1.1.5 Λήμμα Έστω M ένα R -πρότυπο και $N \subseteq M$ ένα μη κενό υποσύνολο του M . Τότε το N είναι υποπρότυπο του M αν και μόνο αν

- (i) $a, b \in N \Rightarrow a - b \in N$
- (ii) $a \in N, r \in R \Rightarrow ra \in N$

Απόδειξη. Έστω $N \leq M$. Τότε το N είναι υποομάδα του M και συνεπώς ισχύει η (i). Η συνθήκη (ii) έπεται άμεσα από τον Ορισμό 1.1.4. Αντίστροφα, έστω ότι ισχύουν οι (i), (ii). Από την (i) συμπεραίνουμε ότι το N είναι υποομάδα του M .

Επειδή τώρα ισχύει η (ii), θα ισχύουν όλα τα αξιώματα του Ορισμού 1.1.1 για το N . $\square$

1.1.6 Παράδειγμα (i) Έστω R ένας δακτύλιος. Τα R -υποπρότυπα του R είναι ακριβώς τα ιδεώδη του R .

(ii) Τα $\mathbb{Z}$ -υποπρότυπα μιας Αβελιανής ομάδας είναι ακριβώς οι υποομάδες της.

(iii) Έστω F ένα σώμα. Τα F -υποπρότυπα ενός F -διανυσματικού χώρου είναι ακριβώς οι υπόχωροί του.

(iv) Έστω F ένα σώμα, V ένας F -διανυσματικός χώρος και $\alpha: V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Είδαμε ότι ο V γίνεται ένα $F[x]$ -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από τη σχέση $f(x)v = f(\alpha)(v)$. Τα $F[x]$ -υποπρότυπα του V είναι ακριβώς οι διανυσματικοί υπόχωροι U του V που έχουν την ιδιότητα $\alpha(U) \subseteq U$ (δηλαδή οι α -αναλλοίωτοι διανυσματικοί υπόχωροι του V).

Από το Λήμμα 1.1.5 έπεται άμεσα ότι η τομή μιας (μη κενής) οικογένειας R -υποπροτύπων ενός R -προτύπου είναι πάλι ένα R -πρότυπο. Αυτό μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

1.1.7 Ορισμός Έστω $X \neq \emptyset$ ένα υποσύνολο του R -προτύπου M . Το υποπρότυπο του M που παράγεται από το X είναι η τομή όλων των υποπροτύπων του M που περιέχουν το X . Αυτό συμβολίζεται με $\langle X \rangle$.

1.1.8 Πρόταση Έστω $X \neq \emptyset$ ένα υποσύνολο του R -προτύπου M .

Τότε

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in X \right\}.$$

Απόδειξη. Έστω A το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας. Ισχύει $A \subseteq \langle X \rangle$.

Πράγματι, έστω N ένα υποπρότυπο του M που περιέχει το X . Τότε $x_i \in X \Rightarrow$

$x_i \in N \Rightarrow r_i x_i \in N$. Άρα $\sum_{i=1}^n r_i x_i \in N$. Συνεπώς $\sum_{i=1}^n r_i x_i \in \langle X \rangle$. Ισχύει $\langle X \rangle \subseteq A$.

Πράγματι το A είναι υποπρότυπο του M (όπως συμπεραίνουμε από το Λήμμα 1.1.5) που περιέχει το X . Το $\langle X \rangle$ ως τομή τέτοιων προτύπων θα περιέχεται στο A .

□

Αν το X είναι πεπερασμένο, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, θα συμβολίζουμε το $\langle X \rangle$ με $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ή $Rx_1 + \dots + Rx_n$ και θα λέμε ότι το $\langle X \rangle$ παράγεται από τα $x_1, \dots, x_n$.

1.1.9 Ορισμός (i) Ένα R -πρότυπο M λέγεται πεπερασμένα παραγόμενο αν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $X \subseteq M$ με την ιδιότητα $\langle X \rangle = M$.

(ii) Ένα R -πρότυπο M λέγεται κυκλικό αν παράγεται από κάποιο $a \in M$, δηλαδή αν $M = \langle a \rangle$.

Για παράδειγμα τα κυκλικά F -υποπρότυπα ενός F -διανυσματικού χώρου (F σώμα) είναι οι υπόχωροι διάστασης 1 και ο τετριμμένος υπόχωρος.

Σχόλιο Όλοι οι προηγούμενοι ορισμοί γενικεύουν κατά τρόπο προφανή αντίστοιχες έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας. Το ίδιο θα συμβεί στην επόμενη παράγραφο. Ας μη θεωρηθεί όμως ότι η θεωρία προτύπων είναι απλοϊκή γενίκευση της Γραμμικής Άλγεβρας! Η δομή R -προτύπων δεν συγκρίνεται ως προς την πολυπλοκότητα και το μαθηματικό ενδιαφέρον με τη δομή F -διανυσματικών χώρων. Αυτό θα γίνει φανερό στο Κεφάλαιο 3, όταν θα μελετήσουμε ελεύθερα πρότυπα.

1.2 Ομομορφισμοί

1.2.1 Ορισμός Έστω M και N δύο R -πρότυπα. Μία απεικόνιση $\varphi: M \rightarrow N$ ονομάζεται ομομορφισμός R -προτύπων (ή R -γραμμική) αν:

- (i) $\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$ για κάθε $m, m' \in M$, και
- (ii) $\varphi(rm) = r\varphi(m)$ για κάθε $r \in R$, $m \in M$.

Ένας ομομορφισμός R -προτύπων $\varphi: M \rightarrow N$ ονομάζεται *επιμορφισμός* (αντίστοιχα *μονομορφισμός*) αν ως απεικόνιση η φ είναι επί (αντίστοιχα 1-1). Ισομορφισμός R -προτύπων είναι ένας ομομορφισμός που είναι ταυτόχρονα ως απεικόνιση επί 1-1. Συμβολισμός: για R -πρότυπα M και N , γράφουμε $M \cong N$ όταν υπάρχει ισομορφισμός $M \rightarrow N$. Τότε αυτά λέγονται *ισόμορφα*.

1.2.2 Παράδειγμα (i) Αν M και N είναι R -πρότυπα η μηδενική απεικόνιση $M \ni m \mapsto 0 \in N$ είναι ομομορφισμός R -προτύπων. Η ταυτοτική απεικόνιση $1_M: M \ni m \mapsto m \in M$ είναι επίσης ομομορφισμός R -προτύπων.

(ii) Αν V και W είναι F -διανυσματικοί χώροι (F σώμα), οι ομομορφισμοί F -προτύπων $V \rightarrow W$ είναι ακριβώς οι F -γραμμικές απεικονίσεις $V \rightarrow W$.

(iii) Αν G και H είναι δύο Αβελιανές ομάδες, οι ομομορφισμοί $\mathbb{Z}$ -προτύπων $G \rightarrow H$ είναι ακριβώς οι ομομορφισμοί ομάδων $G \rightarrow H$.

(iv) Έστω R δακτύλιος και $a \in R$. Η απεικόνιση $R \ni x \mapsto ax \in R$ είναι ομομορφισμός R -προτύπων αλλά όχι γενικά ομομορφισμός δακτυλίων (γιατί;).

Έστω $\varphi: M \rightarrow N$ ομομορφισμός R -προτύπων. Ο πυρήνας

$$\ker \varphi = \{a \in M \mid \varphi(a) = 0\}$$

είναι Αβελιανή ομάδα. Επιπλέον είναι R -υποπρότυπο του M γιατί $a \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(a) = 0 \Rightarrow r\varphi(a) = 0 \Rightarrow \varphi(ra) = 0 \Rightarrow ra \in \ker \varphi$. Κατά παρόμοιο τρόπο, η εικόνα του φ είναι R -υποπρότυπο του N .

1.2.3 Πρόταση Έστω $\varphi: M \rightarrow N$ ομομορφισμός R -προτύπων. Τότε ο φ είναι *μονομορφισμός* αν και μόνο αν $\ker \varphi = \{0\}$.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Έστω M ένα R -πρότυπο και $N \leq M$. Θεωρώντας αυτά ως Αβελιανές ομάδες, ορίζεται στο πηλίκο $M/N = \{a+N \mid a \in M\}$ δομή Αβελιανής ομάδας με πρόσθεση $(a+N) + (b+N) = (a+b)+N$. Επιπλέον τώρα ορίζουμε δομή R -προτύπου θέτοντας $r(a+N) = ra+N$. Εύκολα αποδειχνεται ότι η σχέση αυτή είναι καλά ορισμένη. Πράγματι έχουμε

$$a + N = a' + N \Rightarrow a - a' \in N \Rightarrow r(a - a') = ra - ra' \in N \Rightarrow ra + N = ra' + N.$$

Η επαλήθευση των αξιωμάτων του Ορισμού 1.1.1 είναι άμεση.

Κατ' αναλογία με τους διανυσματικούς χώρους, τις αβελιανές ομάδες και τα ιδεώδη, υπάρχουν και εδώ θεωρήματα ισομορφισμών. Έστω M ένα R -πρότυπο και A, B υποπρότυπα του M . Με $A + B$ συμβολίζουμε το υποπρότυπο του M που παράγεται από το υποσύνολο $A \cup B$ (Ορισμός 1.1.7). Φυσικά ισχύει $A + B = \{a + b \in M \mid a \in A, b \in B\}$.

1.2.4 Θεώρημα

1ο Θεώρημα Ισομορφισμών Προτύπων: Έστω $\varphi: M \rightarrow N$ ένας ομομορφισμός R -προτύπων. Τότε η απεικόνιση

$$\bar{\varphi}: M/N \ni m + N \mapsto \varphi(m) \in \text{Im } \varphi$$

είναι ισομορφισμός R -προτύπων.

2ο Θεώρημα Ισομορφισμών Προτύπων: Έστω ότι A, B είναι R -υποπρότυπα του R -προτύπου M . Τότε υπάρχει ισομορφισμός R -προτύπων

$$(A + B)/A \simeq B/A \cap B.$$

3ο Θεώρημα Ισομορφισμών Προτύπων: Έστω $A \supseteq B \supseteq C$ R -πρότυπα. Τότε υπάρχει ισομορφισμός R -προτύπων

$$(A/C)/(B/C) \simeq A/B.$$

Απόδειξη.

1) Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 2.6.6 στο 'Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα'.

2) Η απεικόνιση

$$\varphi: B \rightarrow (A + B)/A, \varphi(b) = b + A$$

είναι επιμορφισμός R -προτύπων. Ισχύει $\ker \varphi = \{b \in B \mid b + A = 0\} = A \cap B$. Άρα από το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών Προτύπων προκύπτει $B/A \cap B \simeq (A + B)/A$.

3) Εφόσον $C \subseteq B$ η απεικόνιση

$$\varphi: A/C \rightarrow A/B, \varphi(a + C) = a + B$$

είναι ένας καλά οριζόμενος επιμορφισμός R -προτύπων. Ισχύει $\ker \varphi = \{a + C \mid a + B = B\} = B/C$. Άρα από το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών R -προτύπων προκύπτει $(A/C)/(B/C) \simeq A/B$. $\square$

Ίσως είναι η κατάλληλη στιγμή να εισάγουμε την πρώτη έννοια που ανάλογη στους διανυσματικούς χώρους δεν υπάρχει (ακριβέστερη είναι τετριμμένη). Έστω M ένα R -πρότυπο. Το σύνολο $\text{Ann } M = \{r \in R \mid ra = 0 \text{ για κάθε } a \in M\}$ είναι ιδεώδες του R . Πράγματι, (i) $\text{Ann } M \neq \emptyset$ αφού $0 \in \text{Ann } M$, (ii) $r, s \in \text{Ann } M \Rightarrow (r+s)a = ra + sa = 0$ για κάθε $a \in M$ και άρα $r+s \in \text{Ann } M$, και (iii) $x \in R, r \in \text{Ann } M \Rightarrow (xr)a = x(ra) = 0$ για κάθε $a \in M$ και άρα $xr \in \text{Ann } M$. Το ιδεώδες $\text{Ann } M$ ονομάζεται μηδενιστής του M . Για διανυσματικούς χώρους ισχύει βέβαια $\text{Ann } V = (0)$. Για το $\mathbb{Z}$ -πρότυπο $\mathbb{Z}_m$ ισχύει $\text{Ann } \mathbb{Z}_m = (m)$.

1.3 Αθροίσματα

Αν M και N είναι δύο R -πρότυπα τότε το ευθύ γινόμενο τους $M \times N$ είναι το σύνολο $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$ με πρόσθεση και εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζονται από τις σχέσεις

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$r(x, y) = (rx, ry),$$

όπου $x, x' \in M, y, y' \in N$ και $r \in R$. Το $M \times N$ είναι ένα R -πρότυπο. Πιο γενικά αν $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι μια οικογένεια R -προτύπων, τότε το σύνολο των ακολουθιών $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ με $x_\lambda \in M_\lambda$, είναι ένα R -πρότυπο με πρόσθεση και εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζονται από τις σχέσεις $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} + (x'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (x_\lambda + x'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $r(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (rx_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Θα το συμβολίζουμε με $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$. Κατασκευάζουμε τώρα ένα

R -υποπρότυπο του $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$. Έστω $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ το υποσύνολο του $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ που αποτελείται από τις ακολουθίες $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ όπου $x_\lambda = 0_{M_\lambda}$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ εκτός το πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος. Εύκολα επαληθεύεται ότι αυτό είναι ένα

υποπρότυπο του $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ και ονομάζεται *ευθύ άθροισμα* των M_λ . Στην ειδική αυτή περίπτωση που το Λ είναι πεπερασμένο σύνολο, έχουμε $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$.

Έστω $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μια οικογένεια R -υποπροτύπων του R -προτύπου M . Θα λέμε ότι το M είναι το *εσωτερικό ευθύ άθροισμα* των N_λ αν κάθε $x \in M$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα της μορφής $x = y_{\lambda_1} + \dots + y_{\lambda_t}$, με $y_{\lambda_i} \in N_{\lambda_i}$, $t \geq 1$. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$.

Σημείωση. Η χρήση του συμβόλου $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ για δύο διαφορετικά πράγματα δεν πρέπει να δημιουργεί σύγχυση για τον εξής λόγο: αν $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ είναι το εσωτερικό ευθύ άθροισμα των υποπροτύπων N_λ , τότε το M είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα των προτύπων $N_\lambda, \lambda \in \Lambda$ (άσκηση).

Αν $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι μια οικογένεια R -υποπροτύπων του R -προτύπου M , με $\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ συμβολίζουμε το R -υποπρότυπο του M που παράγεται από το σύνολο $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$.

1.3.1 Πρόταση Έστω $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μια οικογένεια R -υποπροτύπων του R -προτύπου M . Τότε ισχύει $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ αν και μόνο αν

(i) $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$

(ii) για κάθε $\lambda \in \Lambda$ ισχύει

$$N_\lambda \cap \sum_{\substack{\mu \in \Lambda \\ \mu \neq \lambda}} N_\mu = 0$$

Απόδειξη. Αν $x \in M$ και $x = y_{\lambda_1} + \dots + y_{\lambda_t} = y'_{\lambda_1} + \dots + y'_{\lambda_t}$ με $y_{\lambda_i}, y'_{\lambda_i} \in N_{\lambda_i}$ τότε

$$N_{\lambda_1} \ni y_{\lambda_1} - y'_{\lambda_1} = (y'_{\lambda_2} - y_{\lambda_2}) + \dots + (y'_{\lambda_t} - y_{\lambda_t}) \in \sum_{\substack{\mu \in \Lambda \\ \mu \neq \lambda_1}} N_\mu.$$

Τώρα αν ισχύει η συνθήκη (ii) παίρνουμε $y_{\lambda_1} = y'_{\lambda_1}$. Συνεπώς, αν ισχύουν οι συνθήκες της πρότασης, έχουμε $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_{\lambda}$. Αντίστροφα, αν κάθε $x \in M$ έχει μοναδική γραφή της μορφής $x = y_{\lambda_1} + \dots + y_{\lambda_i}$, $y_{\lambda_i} \in N_{\lambda_i}$, τότε ισχύει προφανώς η συνθήκη (i). Αλλά και η συνθήκη (ii) ισχύει, γιατί αν $N_{\mu} \cap \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \mu}} N_{\lambda} \neq 0$ θα είχαμε $y_{\mu} = y_{\lambda_1} + \dots + y_{\lambda_i}$ με $y_{\lambda_i} \in N_{\lambda_i}$, $\lambda_i \neq \mu$, δηλαδή θα είχαμε δύο εκφράσεις για το y_{μ} . $\square$

Ας δούμε τώρα συνοπτικά τη σχέση αθροισμάτων προτύπων με πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα.

1.3.2 Πρόταση Έστω ότι $M, M_1, \dots, M_k$ είναι R -πρότυπα.

1. Αν $M = M_1 + \dots + M_k$ και κάθε M_i είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε και το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.
2. Αν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο και $N \leq M$, τότε και το M/N είναι πεπερασμένα παραγόμενο.
3. Αν $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ και το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο, τότε κάθε M_i είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη 1. Έστω ότι το M_i παράγεται από το πεπερασμένο σύνολο $X_i = \{m_{i1}, \dots, m_{is_i}\}$, $i = 1, \dots, k$. Είναι σαφές ότι το M παράγεται από το σύνολο $\bigcup_{i=1}^k X_i$ που είναι πεπερασμένο.

2. Αν το M παράγεται από τα στοιχεία $m_1, \dots, m_s$, τότε το M/N παράγεται από τα στοιχεία $m_1 + N, \dots, m_s + N$.

3. Αυτό έπεται άμεσα από το 2. και την παρατήρηση ότι για κάθε i υπάρχει ισομορφισμός $M_i \simeq \frac{M}{M_1 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \dots \oplus M_k}$, όπου το μηδενικό πρότυπο υπάρχει στη θέση i . $\square$

Σημείωση Επισημαίνουμε ότι υποπρότυπο ενός πεπερασμένα παραγόμενου προτύπου δεν είναι αναγκαστικά πεπερασμένα παραγόμενο.

Ασκήσεις

1. Εξετάστε αν τα $\mathbb{Z}$ -πρότυπα $\mathbb{Z}$ και $2\mathbb{Z}$ είναι ισόμορφα. Αληθεύει ότι οι δακτύλιοι $\mathbb{Z}$ και $2\mathbb{Z}$ είναι ισόμορφοι;
2. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός R -προτύπων $M_2(R) \cong R \oplus R \oplus R \oplus R$, όπου με $M_2(R)$ συμβολίζουμε το R -πρότυπο των 2×2 πινάκων με στοιχεία από το R .
3. Να βρεθούν όλοι οι ομομορφισμοί $\mathbb{Z}$ -προτύπων $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ και στη συνέχεια να βρεθούν όλοι οι ισομομορφισμοί $\mathbb{Z}$ -προτύπων $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.
4. Έστω M ένα R -πρότυπο και $\varphi: M \rightarrow M$ ένας R -ομομορφισμός για τον οποίο ισχύει $\varphi^2 = \varphi$. Αποδείξτε ότι $M = \ker \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi$.
5. Κάθε κυκλικό πρότυπο του R είναι ισόμορφο με ένα πρότυπο της μορφής R/I για κατάλληλο ιδεώδες I του R .
6. Έστω M ένα R -πρότυπο και $N \leq M$. Αποδείξτε ότι κάθε υποπρότυπο του M/N είναι της μορφής L/N , όπου $N \leq L \leq M$.
7. Έστω I ιδεώδες του R . Αν M είναι ένα R -πρότυπο, ορίζουμε IM ως το υποπρότυπο του M που παράγεται από το σύνολο $\{am \mid a \in I, m \in M\}$. Τότε το M/IM έχει τη δομή R/I -προτύπου, όπου

$$(r + I)(m + IM) = rm + IM.$$