



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

HELLENIC REPUBLIC
National and Kapodistrian
University of Athens



Εισαγωγή στη Σχεδίαση RF Κυκλωμάτων

Κεφάλαιο 2, §2.3 – Βασικές έννοιες
Σχεδίασης RF Κυκλωμάτων

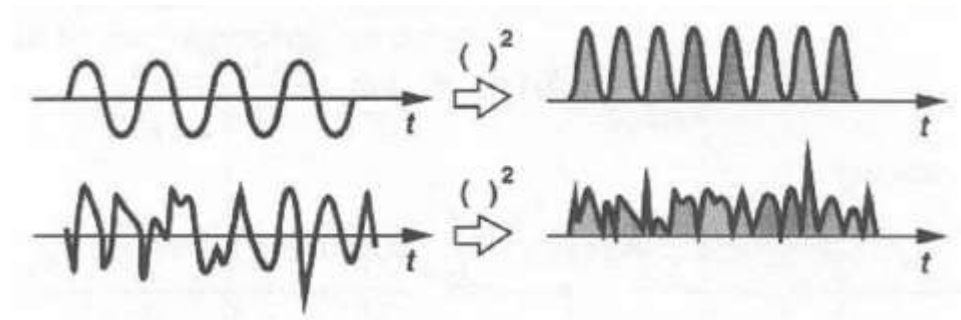
Φασματική πυκνότητα ισχύος

- **Power Spectral Density**

ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ είναι: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$

Εφόσον: $E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

**Αυτό όμως δεν ισχύει για τα
περιοδικά ή τα τυχαία σήματα**

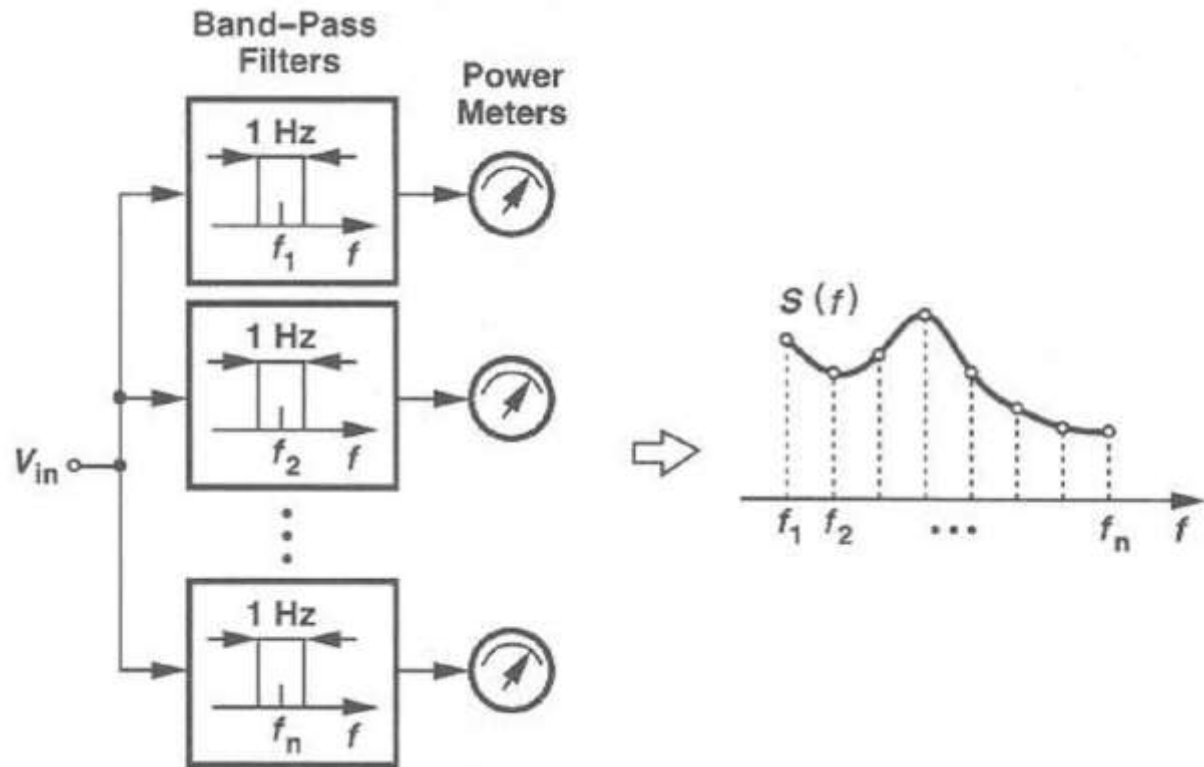


**Σε πολλές περιπτώσεις τα σήματα
έχουν πεπερασμένη ισχύ**

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Φασματική πυκνότητα ισχύος

Power Spectral Density $S_X(f)$

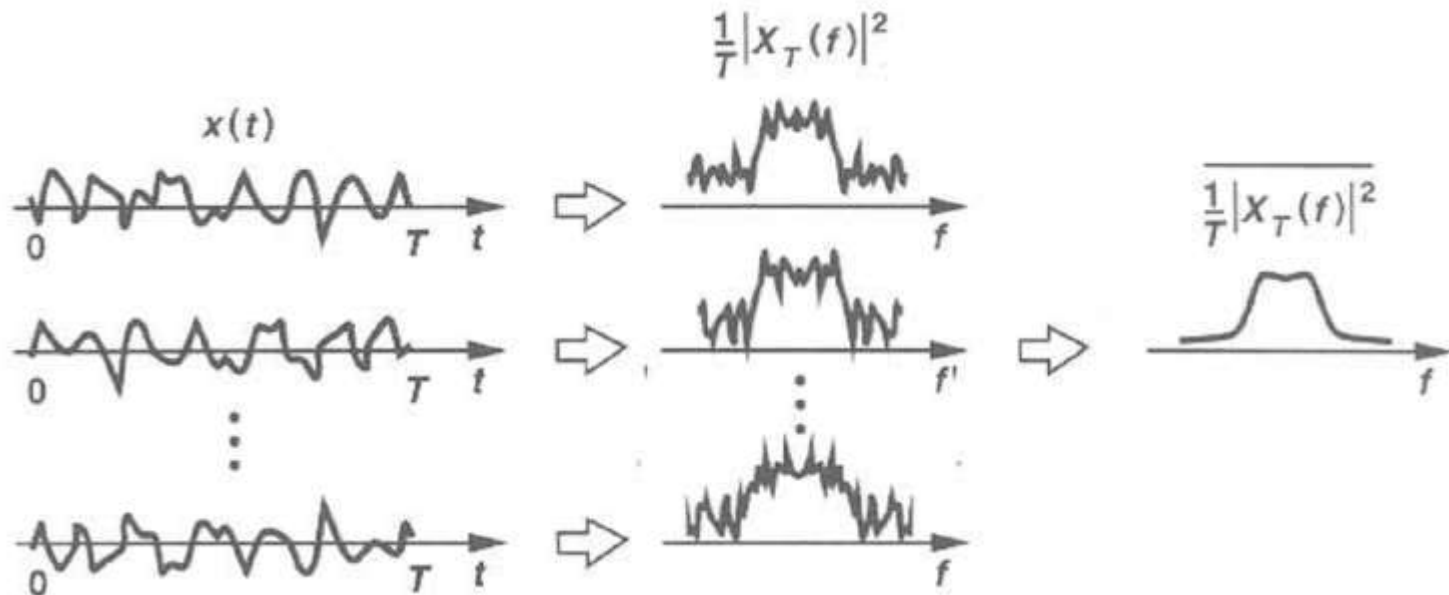


Random Processes & Noise

- Ορισμός του Power Spectral Density
(χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Fourier)

PSD $S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{|X_T(f)|^2}}{T}$

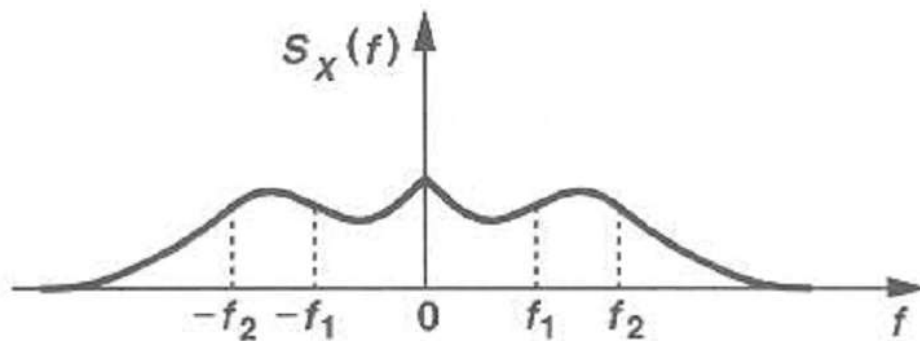
Όπου $X_T(f) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt$



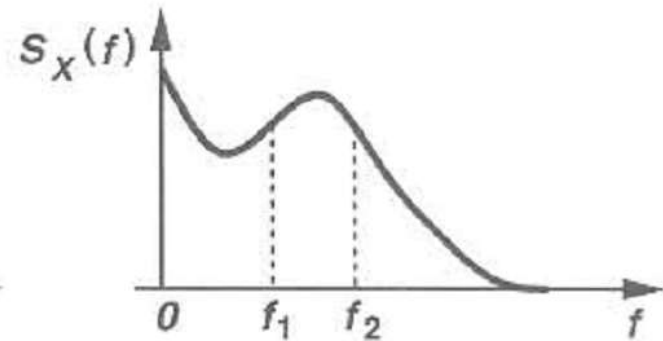
Random Processes & Noise

- Η συνάρτηση $S_X(f)$ είναι άρτια για πραγματική $x(t)$

$$\int_{-f_2}^{-f_1} S_X(f) df + \int_{f_1}^{f_2} S_X(f) df = \int_{f_1}^{f_2} 2S_X(f) df$$



Two sided spectrum



One side spectrum

Παράδειγμα PSD θορύβου στα άκρα αντίστασης R : $S_X(f) = 2kTR$

Φασματική πυκνότητα ισχύος

PSD θορύβου στα άκρα αντίστασης R : $S_x(f) = 2kTR$

Μονάδες: V^2/Hz και όχι W^2/Hz και επίσης υποθέτουμε πως η τάση αυτή εφαρμόζεται στα άκρα αντίστασης 1Ω , παράγοντας ισχύ $2kTR$ σε εύρος ζώνης $1Hz$.

Η μέση τετραγωνική τάση θορύβου που παράγεται από μια αντίσταση R δίνεται από τη σχέση: $\overline{V_n^2} = 4kTR \cdot \Delta f$

Αν το εύρος ζώνης είναι $\Delta f = 1Hz$ η μέση τετραγωνική τάση θορύβου ονομάζεται *spot noise*

Φασματική πυκνότητα ισχύος

- Ο θερμικός θόρυβος έχει Gaussian PDF και λευκή PSD.
- Ο θόρυβος flicker έχει Gaussian PDF αλλά η PSD είναι αντιστρόφως ανάλογη της συχνότητας.

Γενικά:

PDF είναι μία στατιστική ένδειξη για το πόσο συχνά το πλάτος μιας τυχαίας διαδικασίας βρίσκεται μέσα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα τιμών,

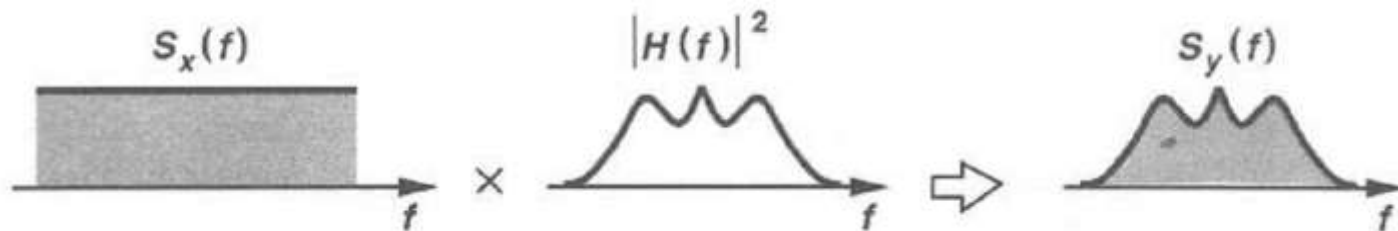
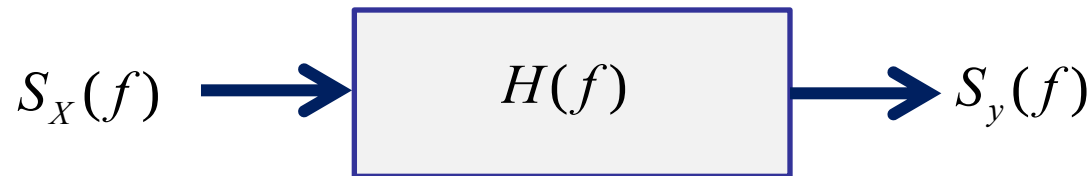
PSD δείχνει πόση ισχύ περιέχει ένα σήμα σε ένα στενό φασματικό παράθυρο.



Τυχαία σήματα στα γραμμικά συστήματα

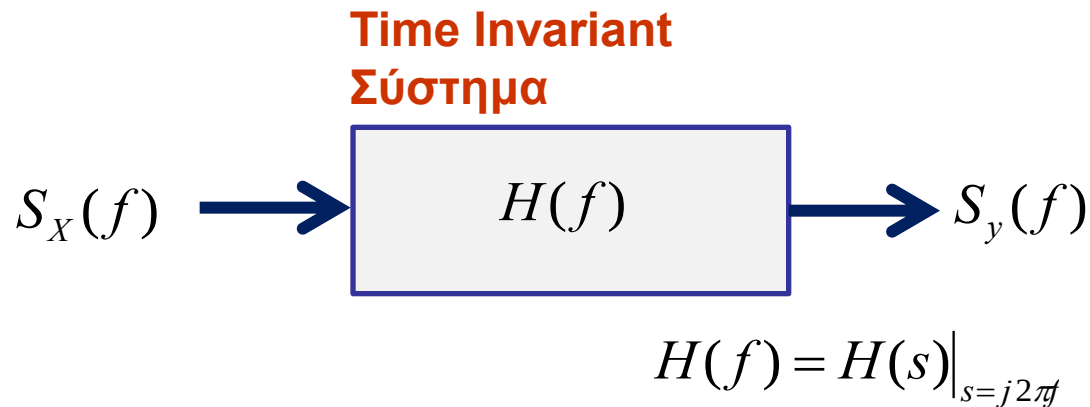
Μορφοποίηση φάσματος θορύβου μέσω της διέλευσης ενός γραμμικού συστήματος

Σύστημα Time Invariant

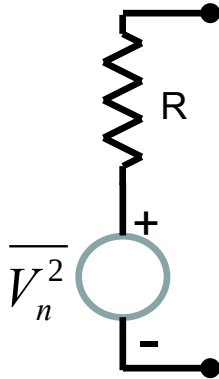


Random Processes & Noise

- Αν ένα σήμα με PSD $S_x(f)$ εφαρμοστεί σε ένα σύστημα *Time Invariant* με συνάρτηση μεταφοράς $H(f)$, η PSD εξόδου $S_y(f)$ θα είναι:
$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

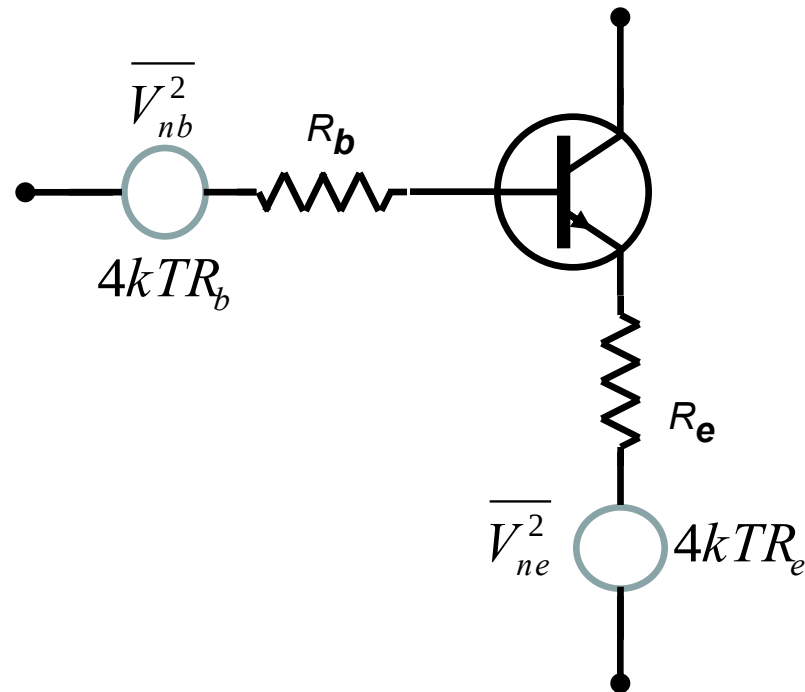


§ 2.3.2 Noise



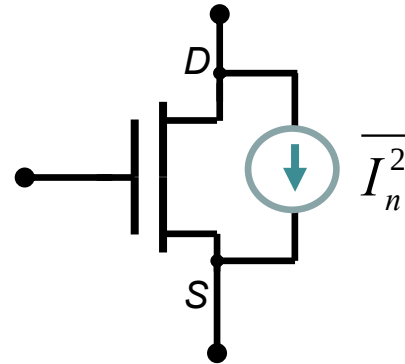
Ισοδύναμη πηγή
θερμικού θορύβου

- Θερμικός θόρυβος σε ένα διπολικό τρανζίστορ



Noise

- Θερμικός θόρυβος στα MOS, θεωρείται πηγή ρεύματος $\overline{I_n^2}$
- η οποία είναι συνδεδεμένη μεταξύ D & S
- Και έχει PSD $\overline{I_n^2} = 4kT \frac{2g_m}{3}$



§ 2.3 Άλλες πηγές θορύβου

- **Shot noise (θόρυβος βολής)**

με PSD: $\overline{I_n^2} = 2qI$

Είναι λευκός και Gaussian και I είναι το συνεχές ρεύμα που διαρρέει το τρανζίστορ

- **Flicker Noise**

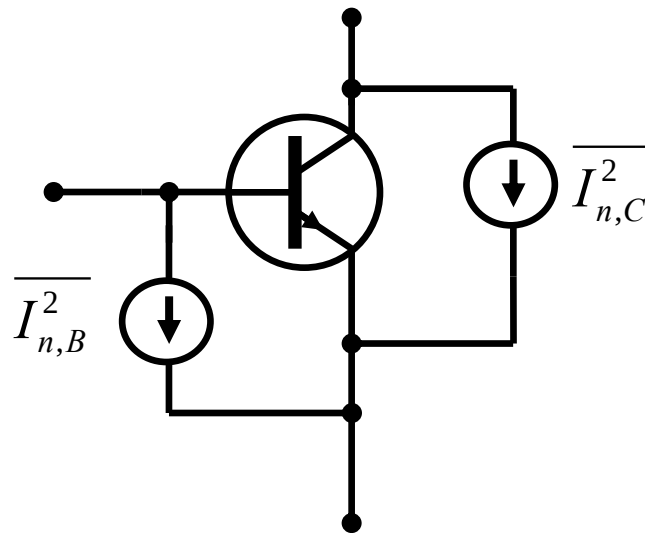
$$\overline{V_n^2} = \frac{k}{w \cdot L \cdot C_{ox}} \frac{1}{f} = \frac{k}{C} \frac{1}{f}$$

Όπου C_{ox} η χωρητικότητα ανά μονάδα επιφάνειας.

Και k σταθερά που εξαρτάται από την διαδικασία παραγωγής (process)

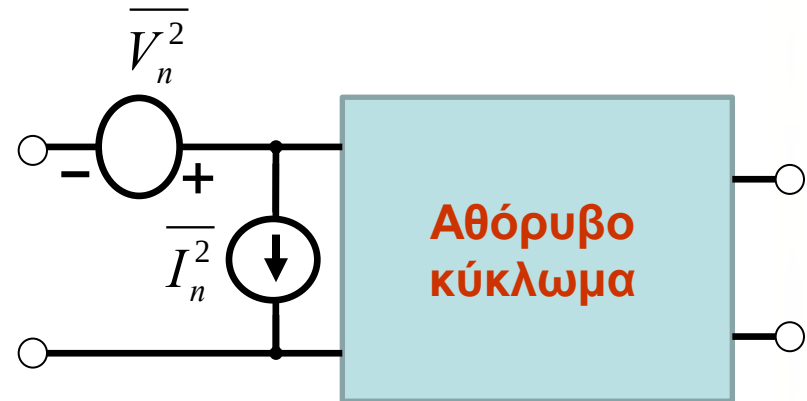
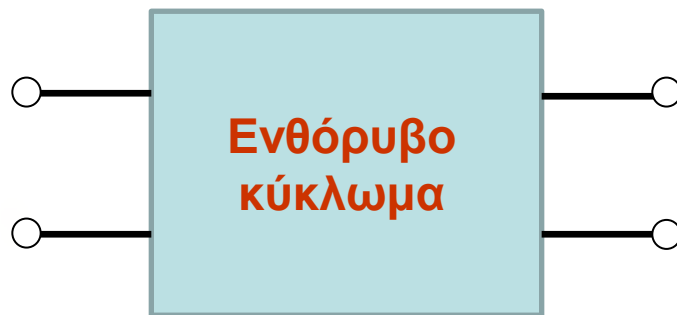
Θόρυβος στο BJT

- θόρυβος βολής σε ένα διπολικό τρανζίστορ



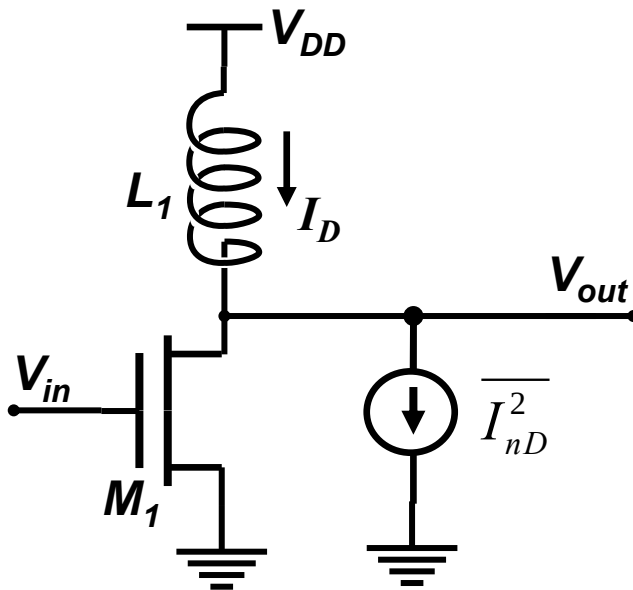
§ 2.3 Αναγωγή του θορύβου στην είσοδο

- Ο θόρυβος σε ένα κύκλωμα μπορεί να μοντελοποιηθεί με δύο πηγές θορύβου στην είσοδο (Input-Referred Noise)



Αναγωγή του θορύβου στην είσοδο

- Ενισχυτής MOS



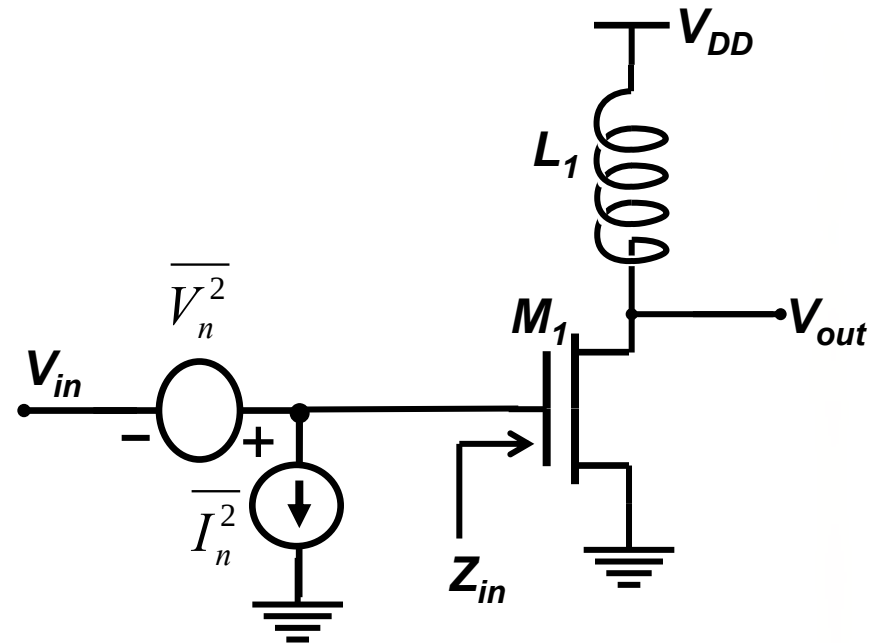
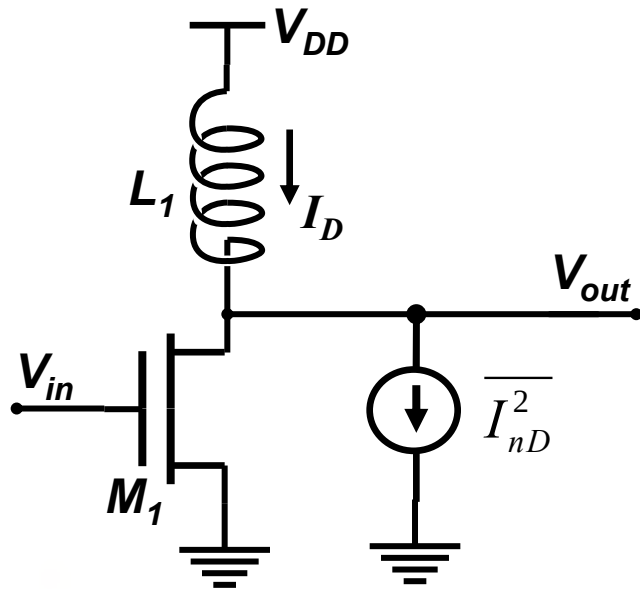
Το κύκλωμα είναι πολωμένο κατάλληλα, για να λειτουργεί το M_1 στον κόρο και να διαρρέεται από ρεύμα I_D

Το κύκλωμα έχει μια πηγή θερμικού θορύβου εξαιτίας του καναλιού:

την $\overline{I_{nD}^2}$

Αναγωγή του θορύβου στην είσοδο

- Ενισχυτής MOS και ισοδύναμο κύκλωμα



$$\overline{I_{nD}^2} = 4kT \left(\frac{2g_m}{3} \right)$$

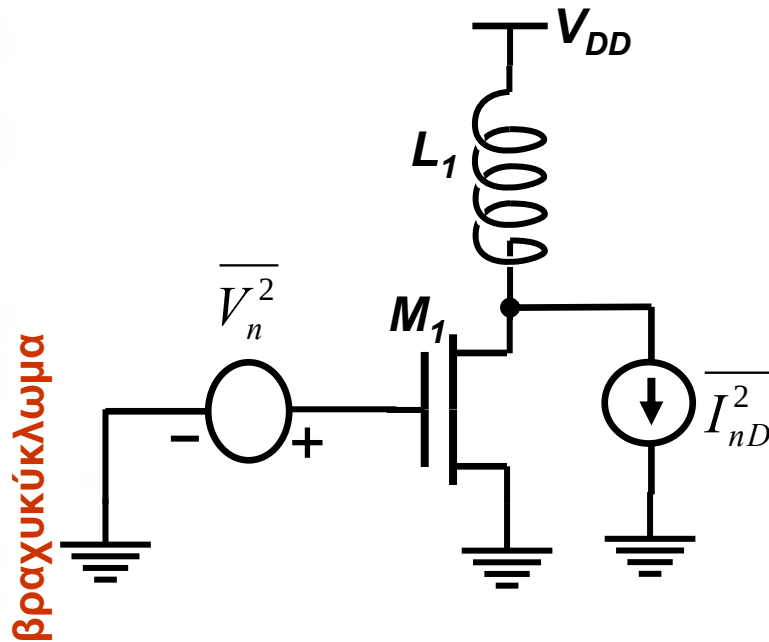
$\overline{V_n^2}$ Για τον υπολογισμό
βραχυκυκλώνουμε την είσοδο

$\overline{I_n^2}$ Για τον υπολογισμό αφήνουμε
ανοικτή την είσοδο

$$\overline{V_n^2} = \overline{I_n^2} |Z_{in}|^2$$

Αναγωγή του θορύβου στην είσοδο

- Υπολογισμός τάσης θορύβου στον ενισχυτή MOS - ισοδύναμο κύκλωμα



Θα πρέπει, το κύκλωμα αυτό, να δίνει στην έξοδο τον ίδιο θόρυβο

$$g_m = \frac{I_{out}}{V_{in}} \quad I_D = g_m V_{GS}$$

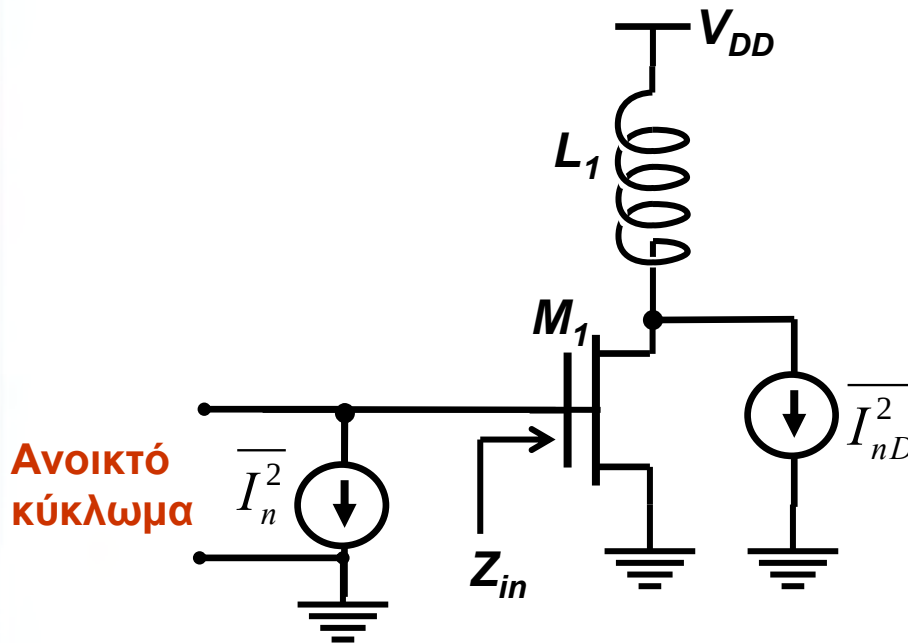
$$g_m^2 \overline{V_n^2} = \overline{I_{nD}^2}$$

$$\overline{I_{nD}^2} = 4kT \left(\frac{2g_m}{3} \right)$$

$$g_m^2 \cdot \overline{V_n^2} = 4kT \frac{2g_m}{3} \quad \overline{V_n^2} = \frac{8kT}{3g_m}$$

Αναγωγή του θορύβου στην είσοδο

- Υπολογισμός ρεύματος θορύβου στον ενισχυτή MOS



$$\overline{V_n^2} = \overline{I_n^2} |Z_{in}|^2$$

$$g_m^2 \overline{V_n^2} = \overline{I_{nD}^2}$$

$$\overline{I_n^2} \cdot g_m^2 \cdot |Z_{in}|^2 = \overline{I_{nD}^2}$$

$$\overline{I_n^2} \cdot g_m^2 \cdot |Z_{in}|^2 = 4kT \frac{2g_m}{3}$$

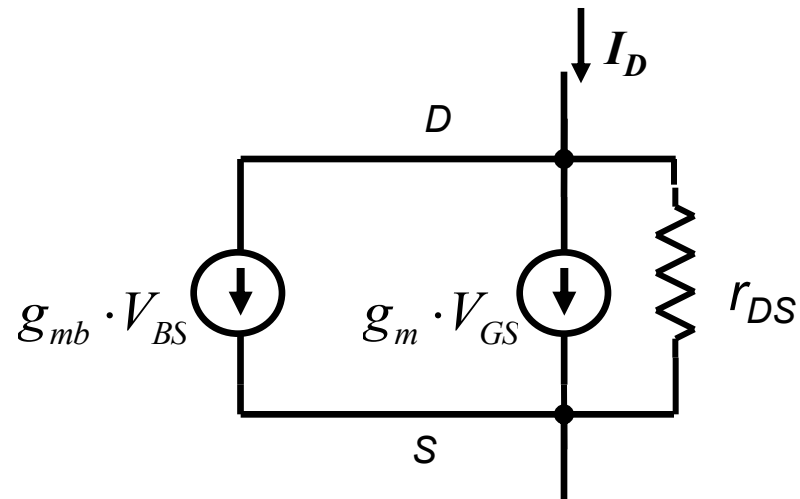
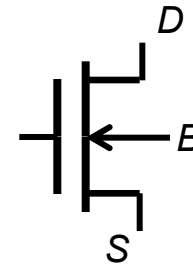
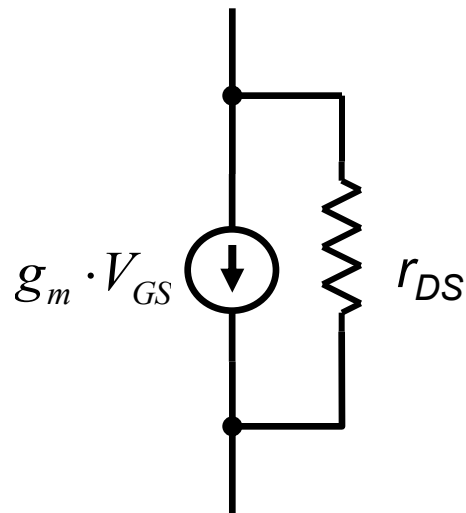
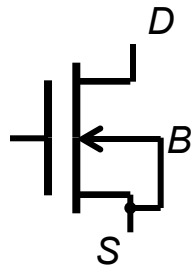
$$\overline{I_n^2} = \frac{8kT}{3g_m |Z_{in}|^2}$$

Αν $Z_{in} \rightarrow \infty$ αρκεί η τάση θορύβου $\overline{V_n^2}$

στα RF κυκλώματα η αντίσταση εισόδου συνήθως είναι μικρή

Θόρυβος στο MOS

- Ενισχυτής MOS και ισοδύναμο κύκλωμα



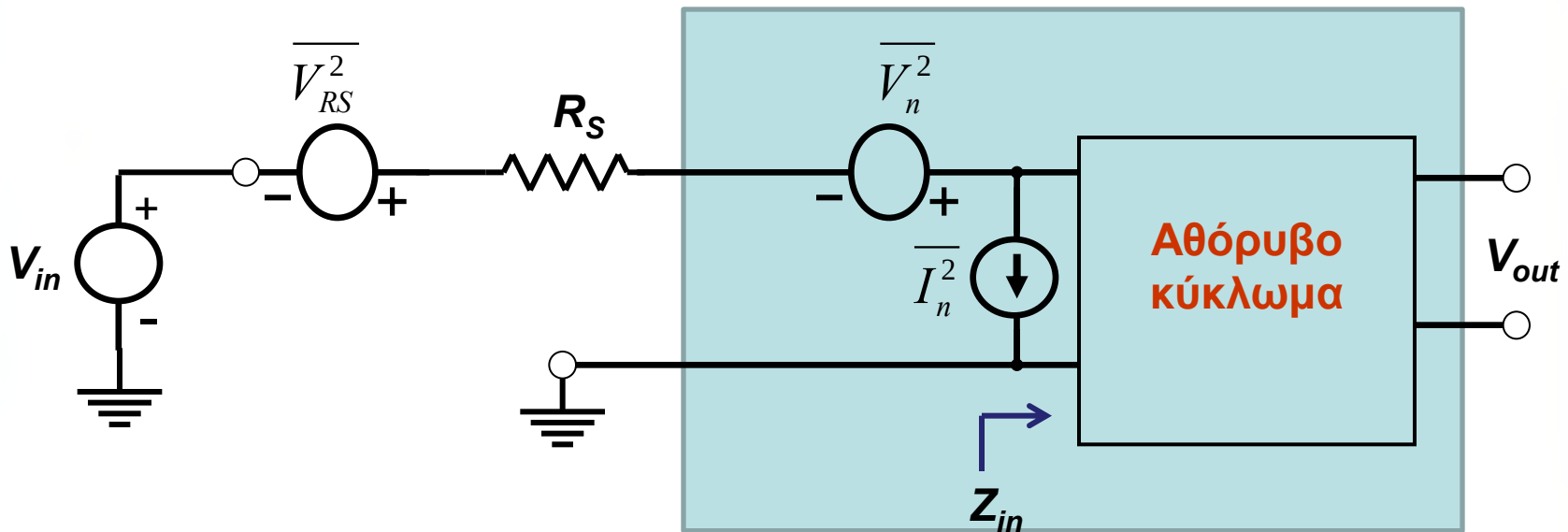
Εικόνα θορύβου – Noise Figure

- Ορισμός (Noise Figure – Noise Factor)

$$\text{noise figure} = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}}$$

$$\text{noise figure} = NF = 10 \log \left(\frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} \right)$$

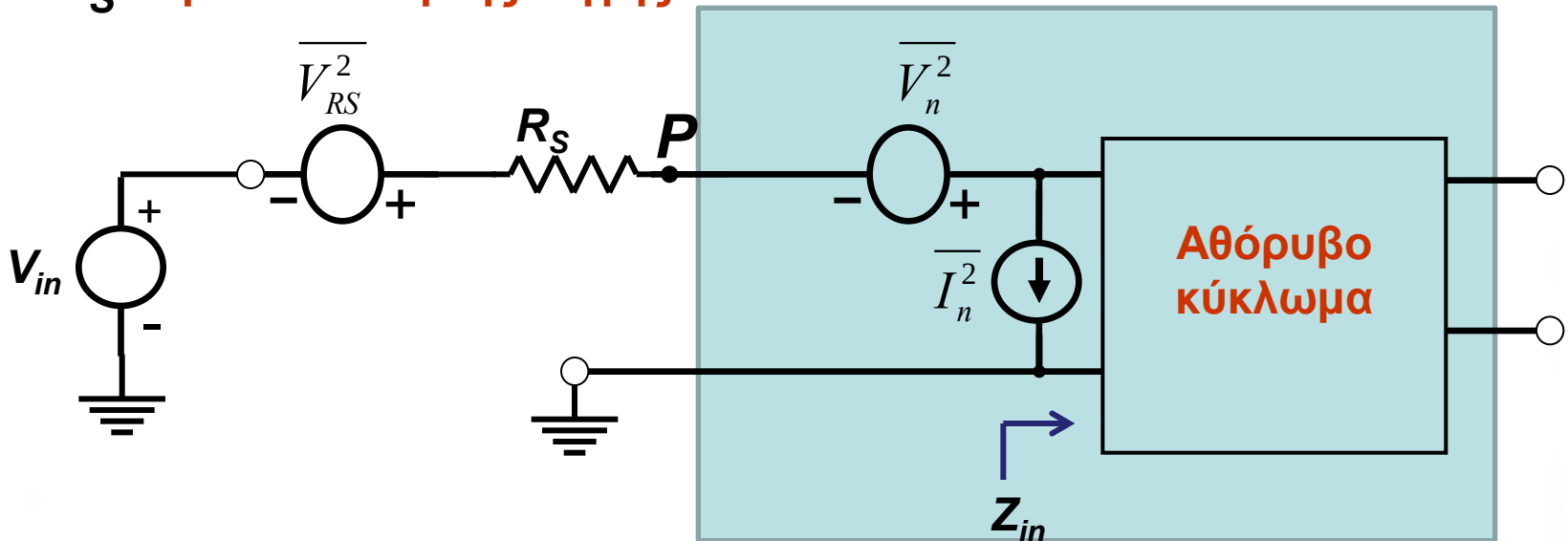
$$NF > 1$$



Εικόνα θορύβου – NF – Υπολογισμός

Επιστροφή

- R_S η αντίσταση της πηγής



- α η απολαβή από την V_{in} μέχρι το σημείο P

$$SNR_{in} = \frac{(\alpha V_{in})^2 / R_{in}}{\alpha^2 V_{RS}^2 / R_{in}} = \frac{V_{in}^2}{V_{RS}^2}$$

- A_V η απολαβή από το σημείο P μέχρι την έξοδο

$$SNR_{out} = \frac{\alpha^2 A_V^2 V_{in}^2}{\left(V_{RS}^2 + (V_n + I_n R_S)^2 \right)} \cdot \alpha^2 A_V^2$$

Εικόνα θορύβου – Noise Figure

- Υπολογισμός NF $NF = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} =$

$$SNR_{in} = \frac{V_{in}^2}{V_{RS}^2}$$

$$SNR_{out} = \frac{V_{in}^2}{\left(V_{RS}^2 + (V_n + I_n R_S)^2 \right)}$$

$$NF = \frac{SNR_{in}}{SNR_{out}} = \frac{\frac{V_{in}^2}{V_{RS}^2}}{\frac{V_{in}^2}{\left(V_{RS}^2 + (V_n + I_n R_S)^2 \right)}} = \frac{V_{RS}^2 + (V_n + I_n R_S)^2}{V_{RS}^2} = 1 + \frac{(V_n + I_n R_S)^2}{V_{RS}^2}$$

Εικόνα θορύβου – Noise Figure

- **NF**

$$NF = 1 + \frac{\overline{(V_n + I_n R_S)^2}}{\overline{V_{RS}^2}}$$

- Για εύρος ζώνης $\Delta f = 1\text{Hz}$ ο θόρυβος της αντίστασης R_S είναι

$$\overline{V_{RS}^2} = 4kTR_S$$

- Για $\Delta f = 1\text{Hz}$ ο θόρυβος λέγεται spot noise, και το NF είναι:

$$NF = 1 + \frac{\overline{(V_n + I_n R_S)^2}}{4kTR_S}$$

Όπου V_n και I_n υπολογίζονται και αυτά στην ίδια συχνότητα με $\Delta f = 1\text{Hz}$

Εικόνα θορύβου – Noise Figure

- **NF**

$$NF = 1 + \frac{\overline{(V_n + I_n R_S)^2}}{4kTR_S} = \frac{4kTR_S + \overline{(V_n + I_n R_S)^2}}{4kTR_S} = \frac{A^2 \left(4kTR_S + \overline{(V_n + I_n R_S)^2} \right)}{A^2} \cdot \frac{1}{4kTR_S}$$

Άρα

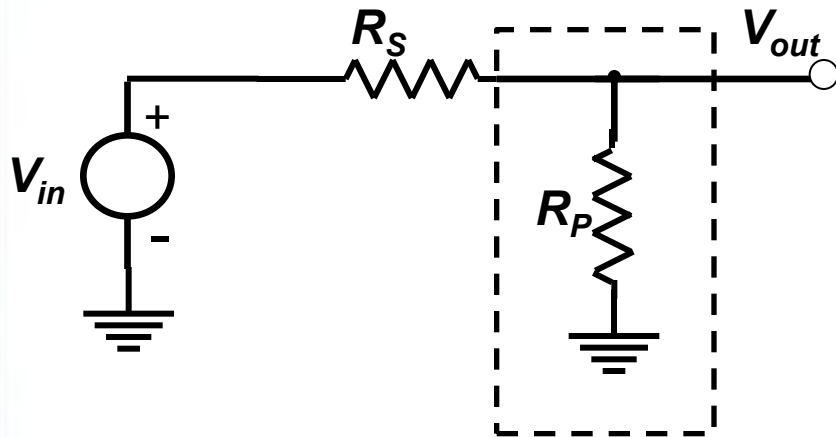
$$NF = \frac{V_{n,out}^2}{A^2} \cdot \frac{1}{4kTR_S}$$

Όπου A είναι aA_V η συνολική απολαβή τάσης

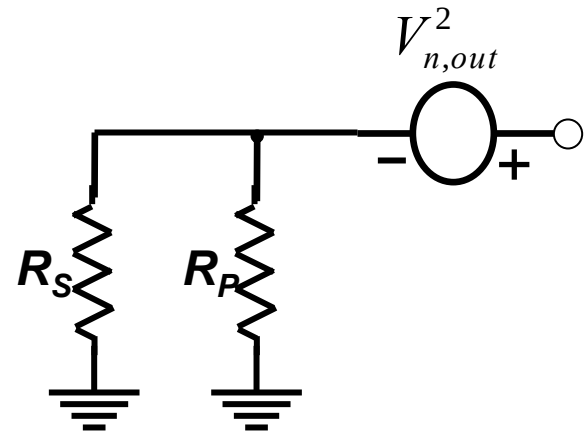
και $(V_{n,out})^2$ η ισχύς θορύβου στην έξοδο

Εικόνα θορύβου – Παράδειγμα

- 1^ο παράδειγμα



ισοδύναμο



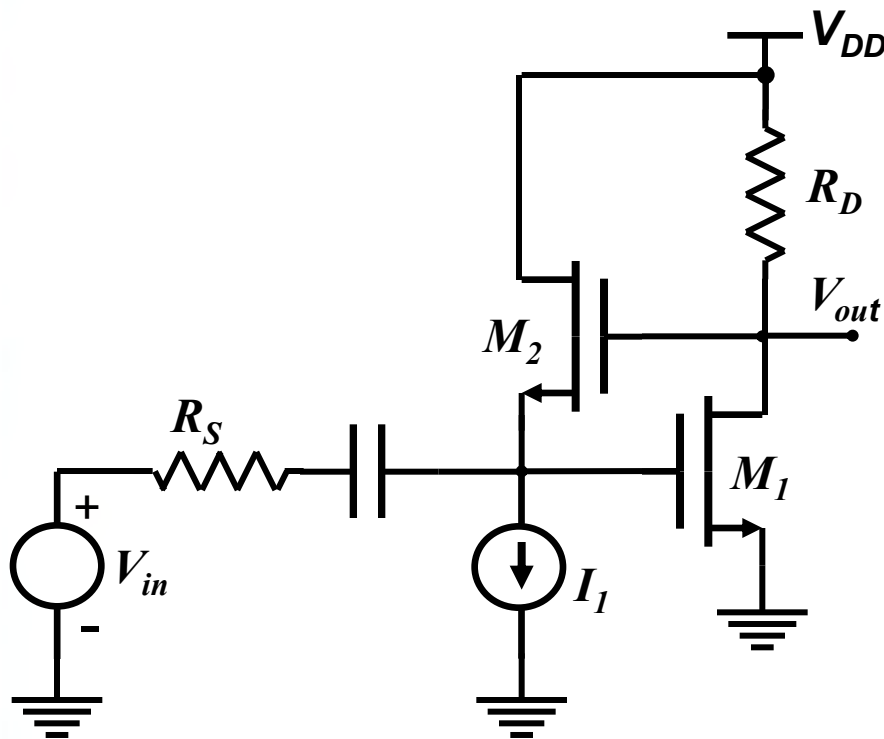
απολαβή $A = \frac{R_P}{R_P + R_S}$

$$V_{n,out}^2 = 4kT \frac{R_S R_P}{R_P + R_S}$$

$$NF = \frac{V_{n,out}^2}{A^2} \cdot \frac{1}{4kTR_S} = \frac{4kT \frac{R_S R_P}{R_P + R_S}}{\left(\frac{R_P}{R_P + R_S} \right)^2} \cdot \frac{1}{4kTR_S} = \frac{R_P + R_S}{R_P}$$

Εικόνα θορύβου – Παράδειγμα

- Ενισχυτής MOS και ισοδύναμο κύκλωμα – Να βρεθεί η σχέση τα μεγέθη: g_{m1} , g_{m2} , R_S και R_D .



Προσαρμογή, $R_S = R_{IN}$

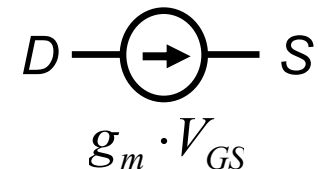
Στο ισοδύναμο κύκλωμα:

I_1 : άπειρη αντίσταση = ανοικτό κύκλωμα,

οι πυκνωτές θεωρούνται βραχυκύκλωμα,

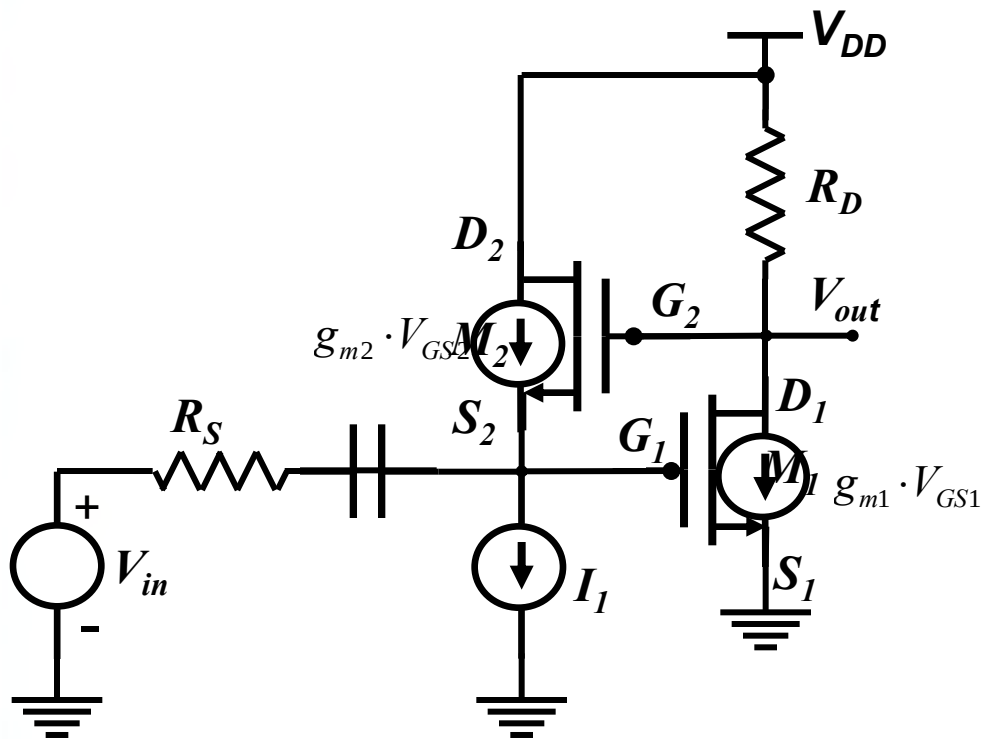
Η τροφοδοσία V_{DD} συνδέεται στη γη

Το τρανζίστορ (MOS) αντικαθιστάται με πηγή ρεύματος



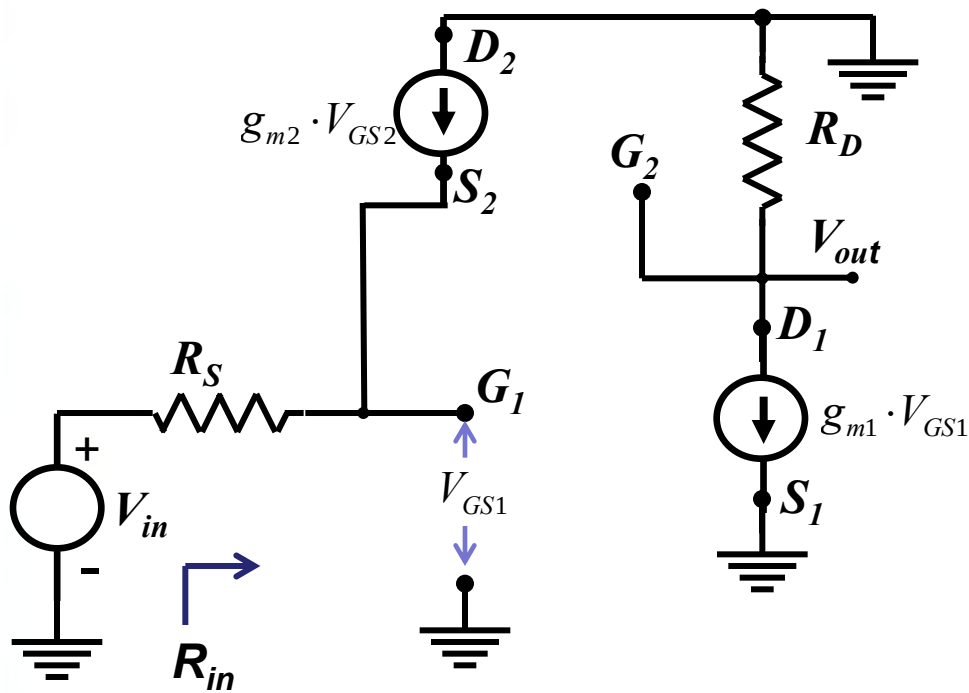
Εικόνα θορύβου – Παράδειγμα

- ισοδύναμο κύκλωμα ενισχυτή MOS



Εικόνα θορύβου – Παράδειγμα

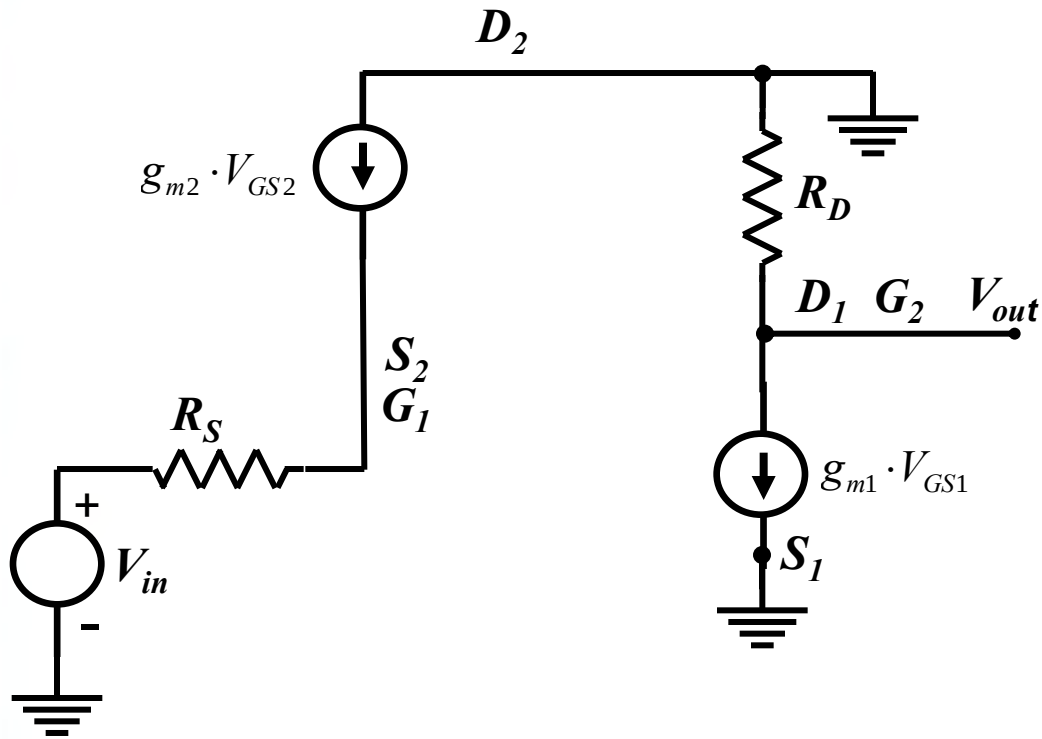
- Ισοδύναμο κύκλωμα ενισχυτή MOS



$I_1 = \text{ανοικτό}$
 $V_{DD} = \text{γείωση}$

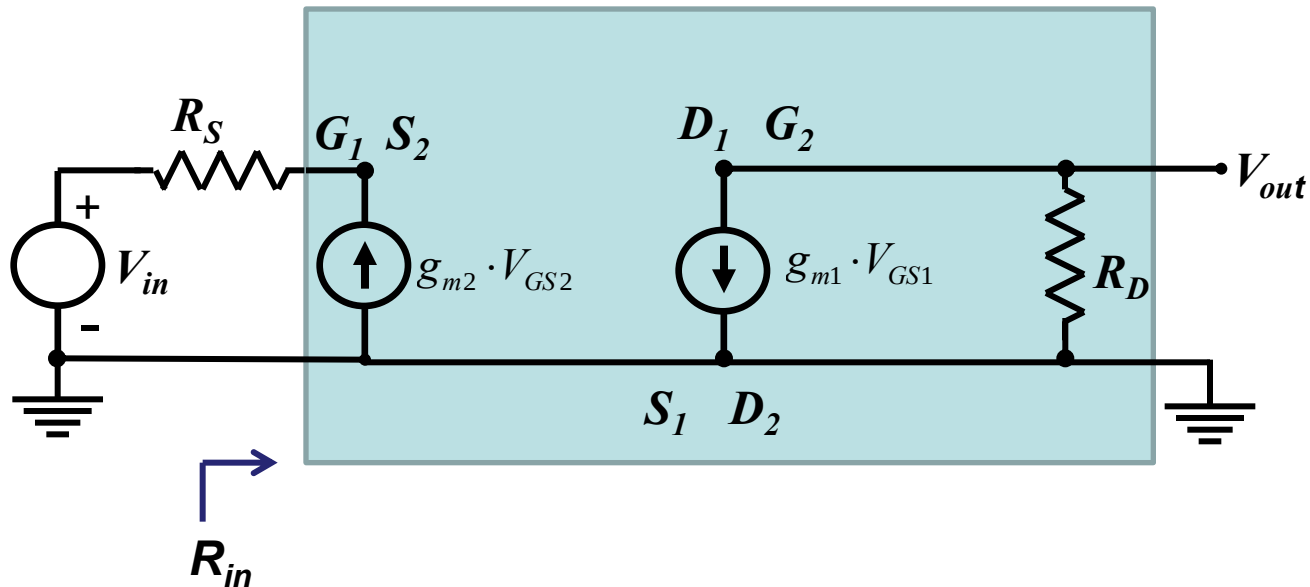
Εικόνα θορύβου – Παράδειγμα

- Ισοδύναμο κύκλωμα ενισχυτή MOS



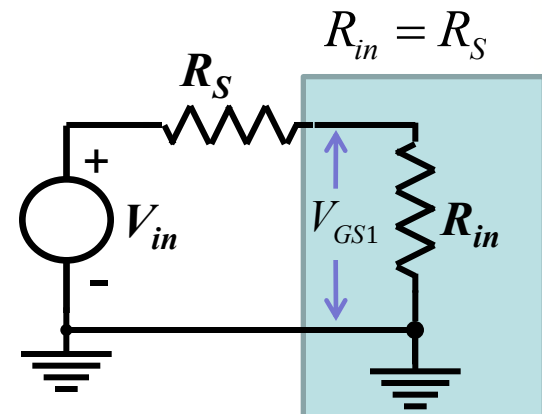
Εικόνα θορύβου – Παράδειγμα

- Ισοδύναμο κύκλωμα ενισχυτή MOS



$$A_V = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-g_{m1} V_{GS1} \cdot R_D}{V_{in}} \quad (1)$$

$$V_{GS1} = V_{in} \frac{R_{in}}{R_{in} + R_S} = V_{in} \frac{R_{in}}{R_{in} + R_{in}} = \frac{V_{in}}{2} \quad (2)$$



Εικόνα θορύβου – Παράδειγμα

- Ισοδύναμο κύκλωμα ενισχυτή MOS

$$A_V = \frac{-g_{m1} V_{GS1} \cdot R_D}{V_{in}} \quad (1)$$

$$V_{GS1} = \frac{V_{in}}{2} \quad (2)$$

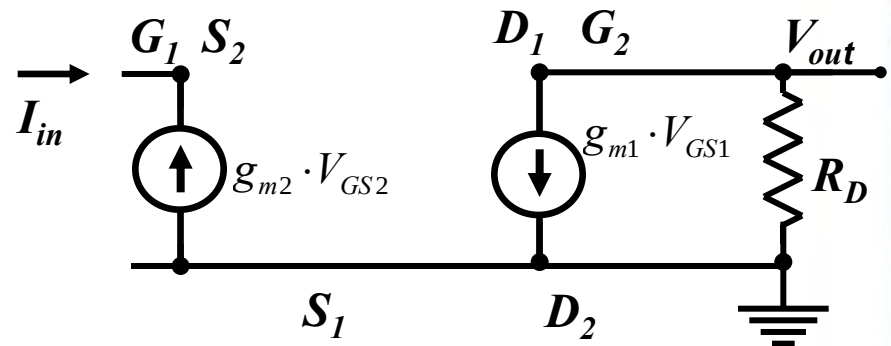
$$A_V = -\frac{g_{m1} \cdot R_D}{2} \quad (3)$$

Υπολογισμός της R_{in}

$$R_{in} = \frac{V_{G1}}{I_{in}} = \frac{V_{G1}}{-g_{m2} \cdot V_{GS2}} \quad (4)$$

$$V_{GS2} = V_{G2} - V_{S2} = V_{out} - V_{G1}$$

$$\text{άρα} \quad V_{GS2} = -V_{G1} \cdot (g_{m1} R_D + 1)$$



$$V_{out} = -g_{m1} V_{GS1} \cdot R_D$$

$$\text{άρα} \quad V_{GS2} = -g_{m1} V_{GS1} \cdot R_D - V_{G1}$$

$$\text{επίσης} \quad V_{GS1} = V_{G1} - V_{S1} = V_{G1} - 0 = V_{G1}$$

Ισοδύναμο κύκλωμα

- Ισοδύναμο κύκλωμα ενισχυτή MOS

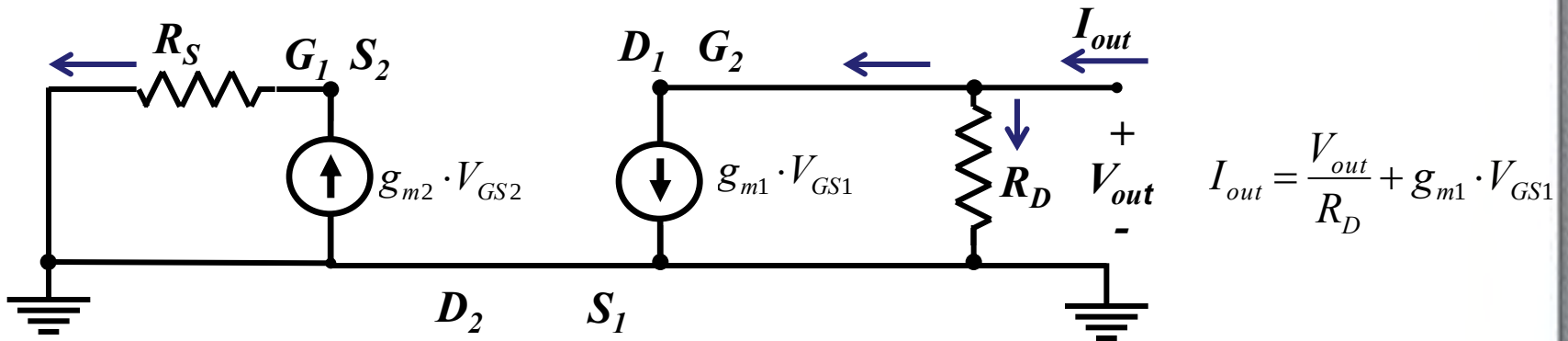
$$(4) \Rightarrow R_{in} = \frac{V_{G1}}{g_{m2} \cdot V_{G1} \cdot (g_{m1} R_D + 1)}$$

$$R_{in} = R_S = \frac{1}{g_{m2} g_{m1} R_D + g_{m2}} \Rightarrow$$

$$g_{m2} R_S = \frac{1}{1 + g_{m1} R_D}$$

Ισοδύναμο κύκλωμα

- Ενισχυτής MOS και ισοδύναμο κύκλωμα



Υπολογισμός της R_{out}

$$R_{out} = \frac{V_{out}}{I_{out}} \bigg|_{V_{in}=0} \quad (1)$$

$$R_{out} = \frac{V_{out}}{\frac{V_{out}}{R_D} + g_{m1} \cdot V_{GS1}}$$

$$V_{GS1} = (g_{m2} V_{GS2}) \cdot R_S$$

$$V_{GS2} = V_{out} - V_{G1}$$

$$V_{GS1} = V_{G1}$$

άρα $V_{G1} = g_{m2} \cdot R_S \cdot (V_{out} - V_{G1})$

$$V_{G1} + g_{m2} \cdot R_S \cdot V_{G1} = g_{m2} \cdot R_S \cdot V_{out}$$

$$V_{G1} = \frac{g_{m2} \cdot R_S \cdot V_{out}}{1 + g_{m2} \cdot R_S}$$

Ισοδύναμο κύκλωμα

- Ενισχυτής MOS και ισοδύναμο κύκλωμα

$$R_{out} = \frac{V_{out}}{\frac{V_{out}}{R_D} + g_{m1} \cdot V_{GS1}}$$

$$R_{out} = \frac{V_{out}}{\frac{V_{out}}{R_D} + g_{m1} \cdot \frac{g_{m2} \cdot R_S \cdot V_{out}}{1 + g_{m2} \cdot R_S}}$$

$$R_{out} = \frac{1}{\frac{1}{R_D} + \frac{g_{m1} g_{m2} \cdot R_S}{1 + g_{m2} \cdot R_S}} = \frac{R_D (1 + g_{m2} \cdot R_S)}{1 + g_{m2} \cdot R_S + g_{m1} g_{m2} \cdot R_S R_D}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{m2} R_S &= \frac{1}{1 + g_{m1} R_D} \\ R_{out} &= \frac{R_D (1 + g_{m2} \cdot R_S)}{1 + g_{m2} \cdot R_S (1 + g_{m1} \cdot R_D)} \end{aligned} \right\} R_{out} = \frac{R_D (1 + g_{m2} \cdot R_S)}{2}$$