

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <http://www.researchgate.net/publication/280387387>

# A representation of EGO through fractal spiral

ARTICLE · JANUARY 2014

---

READS

10

## 1 AUTHOR:



[L. Dalla](#)

National and Kapodistrian University of Ath...

35 PUBLICATIONS 184 CITATIONS

SEE PROFILE

## Μια αναπαράσταση του εγώ μέσω των fractals

**Σοφία  
Αναγνωστοπούλου**  
Ιατρική Σχολή,  
Ε.Κ.Π.Α.  
[sanagno@med.uoa.gr](mailto:sanagno@med.uoa.gr)

**Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα**  
Τμήμα Μαθηματικών,  
Ε.Κ.Π.Α.  
[ldalla@math.uoa.gr](mailto:ldalla@math.uoa.gr)

**Παρθενία Κουλτούκη\***  
Μαθηματικός  
[niakoultouki@yahoo.com](mailto:niakoultouki@yahoo.com)

### Περίληψη

Η εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο 1<sup>ο</sup> μέρος αναφέρονται οι βασικές έννοιες της Γεωμετρίας των Fractals. Περιγράφεται η διαδικασία κατασκευής και η διάσταση γνωστών αυτοόμοιων συνόλων fractal, καθώς και της σπείρας. Μέσω της σπείρας αυτής, στο 2<sup>ο</sup> μέρος, επιχειρείται μια αναπαράσταση του ‘Εγώ’ μέσω των fractals, καθώς και η προσέγγισή του με τη μελέτη των συμπτωμάτων ως εκφράσεις αυτοομοιότητας αυτού.

### Abstract

This article consists of two part. The first part overviews the basic concepts in Fractal Geometry. The construction method and the dimension of known self-similar fractal sets, including the spiral, are described. Using this spiral, in the second part we provide a representation of the “Ego” through fractals, as well as its approach through the study of symptoms as expressions of its self-similarity.

### 1. Στοιχεία Γεωμετρίας των Fractals

Η καθημερινή εμπειρία φέρνει τον άνθρωπο σε επαφή με πολυάριθμες γεωμετρικές μορφές, οι οποίες γίνονται άμεσα αντιληπτές. Για τη μελέτη και την κατανόησή τους, ωστόσο, είναι απαραίτητη η αναπαράστασή τους. Οι ιδεατές μορφές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η περιγραφή των σχέσεων μεταξύ τους, αλλά και με τον χώρο, μέσα από αξιώματα και

---

\* Το παρόν αποτελεί τμήμα της Διπλωματικής Εργασίας με τίτλο “Η Γεωμετρία των Fractals, Μία Fractal προσέγγιση του ασυνείδητου” στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 2013

θεωρήματα ([9]), έδωσαν τη θέση τους μετά από αιώνες σε εκείνες της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας (κατά την ορολογία του Gauss), οι οποίες βρίσκονται σε ένα χώρο στον οποίο δεν ικανοποιείται το 5<sup>ο</sup> αίτημα, το λεγόμενο και 'Αξίωμα των παραλλήλων'. Εξίσου ριζοσπαστική υπήρξε η αντίληψη του B. Riemann, που φαντάστηκε έναν χώρο «καμπυλωμένο», με αυθαίρετη διάσταση, ο οποίος μόνον τοπικά (δηλαδή σε μια περιοχή κάθε σημείου του) είναι Ευκλείδειος. Σε έναν τέτοιο χώρο δεν ορίζεται η έννοια της ευθείας και της παραλληλίας ([9]). Έτσι, ο Riemann συνέλαβε την έννοια της πολλαπλότητας, η οποία είχε τεράστια επίδραση στην εξέλιξη των σύγχρονων Μαθηματικών και της Θεωρητικής Φυσικής.

Ωστόσο, καμία από τις παραπάνω γεωμετρικές δομές δεν έχει τη δυνατότητα να περιγράψει με ακρίβεια την αέναη κίνηση και το άφρισμα των κυμάτων που ξεσπούν στην ακτή, τα τυχαία γεωμετρικά σχήματα στα κλαδιά των δέντρων, τα ξαφνικά ξεσπάσματα του ανέμου, τις χιονονιφάδες, ή ακόμα και τους κυτταρικούς όγκους, τους μυϊκούς ιστούς και το σύστημα των αιμοφόρων αγγείων στο ανθρώπινο σώμα ([11]). Ο Benoit Mandelbrot, στα τέλη του 20<sup>ου</sup> αιώνα με το βιβλίο του "The Fractal Geometry of Nature" (1982), εισήγαγε την πρωτότυπη ιδέα των Fractals και έδωσε στην επιστήμη έναν πανίσχυρο μεγεθυντικό φακό για τη μελέτη πολύπλοκων αντικειμένων και καταστάσεων. Για την ακρίβεια, ο B. Mandelbrot ονόμασε fractal γνωστά σύνολα, πολλά από τα οποία είχαν δοθεί ως αντιπαραδείγματα σε εικασίες. Επί παραδείγματι, ο Cantor με το σύνολό του έδωσε απάντηση στο ερώτημα: 'Εάν ένα σύνολο έχει μέτρο μηδέν, είναι αριθμήσιμο;', ενώ ο Weierstrass με τις συναρτήσεις του στο ερώτημα: 'Υπάρχει συνάρτηση παντού συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη;'.

Με τη βοήθεια αυτού του φακού, ξεκίνησε η μελέτη πολυσύνθετων καταστάσεων, όπως είναι οι φαινομενικά απρόβλεπτες διακυμάνσεις των καιρικών συνθηκών, το καρδιογράφημα, οι μετρήσεις ενός σειсмоγράφου ή οι καμπύλες του Χρηματιστηρίου. Επίσης, φυσικά fractals, όπως οι ρωγμές που άφησε ένας σεισμός ή ένας παγετός στη βραχώδη επιφάνεια ενός βουνού, το δενδριτικό δίκτυο ενός ποτάμιου συστήματος ή ακόμη και ο ανθρώπινος εγκέφαλος, επιδέχονται πλέον μια ακριβέστερη προσέγγιση.

Παράλληλα, οι καθηγητές Ψυχιατρικής του Georgetown University, Jill Savege Scharff και David E. Scharff, στο βιβλίο τους «Object Relations Individual Therapy» στο κεφάλαιο 8 Chaos Theory and Fractals in Development, Self and Object Relations, and Transference, υποστηρίζουν ότι το όνειρο είναι μια έκφραση της συνολικής προσωπικότητας αυτού που ονειρεύεται, η οποία έχει δομή fractal ([3]).

Η Γεωμετρία των Fractals, σε συνδυασμό με τις εκπληκτικές εξελίξεις της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών έγινε το ιδανικό μέσο για την παρατήρηση και τη μελέτη της πολυπλοκότητας. Οι μαθηματικοί κατόρθωσαν να μιμηθούν αυτά τα σύνολα χρησιμοποιώντας κατάλληλα δυναμικά συστήματα στον υπολογιστή. Δίνοντας στον υπολογιστή την εντολή «ο τύπος να επαναλαμβάνεται πολλές φορές», δημιουργούνται εικόνες με οργανικά χαρακτηριστικά και μια ποιότητα που μοιάζει με τέχνη. Βέβαια, ύστερα από συνεχείς μεγεθύνσεις τα μαθηματικά fractals ξεθωριάζουν και η δομή τους στερείται λεπτότητας στην οθόνη του υπολογιστή. Τα fractals αποδεικνύουν ότι το αληθινό χάος αντιτίθεται στην εξομοίωση που δημιουργείται από την επανάληψη ενός μαθηματικού τύπου. Ωστόσο δεν θα μπορούσε να παραληφθεί ότι οι μαθηματικοί τύποι που χρησιμοποιούνται είναι εφαρμογές κανόνων λογικής, οι οποίοι εκτός από τη χαοτική ομορφιά που περικλείουν, προσαρτούν στο μαθηματικό οικοδόμημα μια Γεωμετρία με σημαντικό θεωρητικό υπόβαθρο και πολυάριθμες εφαρμογές.

Οι χώροι μέσα στους οποίους κατασκευάζουμε τα σύνολα fractal, είναι οι συνήθεις χώροι  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  και  $\mathbb{R}^3$ , εφοδιασμένοι με την Ευκλείδεια μετρική.

Συμβολίζουμε  $H = H(\mathbb{R}^d)$ , ( $d \geq 1$ ) το σύνολο των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του χώρου  $\mathbb{R}^d$ . Το σύνολο εφοδιάζεται με τη δομή πλήρους μετρικού χώρου με την μετρική του Hausdorff, η οποία αποτελεί μια επέκταση της μετρικής του ([1],[7]). Η Ευκλείδεια μετρική του  $\mathbb{R}^d$  μετρά αποστάσεις μεταξύ των σημείων του, ενώ η μετρική του Hausdorff μετρά αποστάσεις μεταξύ συμπαγών συνόλων του. Εάν τα σύνολα είναι μονοσύνολα, τότε έχουμε ταύτιση των αποστάσεων. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια κατάλληλης συνάρτησης συστολής  $W$  κατασκευάζουμε fractal, ως το σταθερό σημείο που προκύπτει από το κλασικό Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach ([1],[13]).

**Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach :** Έστω  $f : X \rightarrow X$ , μια συστολή στον πλήρη μετρικό χώρο  $X$ . Τότε:

i. Υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο  $x_0$  της  $f$ , δηλαδή σημείο τέτοιο ώστε  $f(x_0) = x_0$ .

ii. Για τυχαίο  $x \in X$ , έχουμε  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$  ( $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ ,  $n$ -επανάληψεις της  $f$ ).

Ο πλήρης μετρικός χώρος  $\mathbb{R}^d$  εφοδιασμένος με συναρτήσεις συστολής  $\{w_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  συμβολίζεται με  $\{\mathbb{R}^d w_{1-N}\}$  και καλείται Σύστημα

Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων, (ΣΕΣ). Η συστολή που εμφανίζεται στον πλήρη μετρικό χώρο  $H = H(\mathbb{R}^d)$ , ( $d \geq 1$ ) ορίζεται να είναι η  $W(A) = w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A)$  για  $A \in H(\mathbb{R}^d)$ .

Με τη βοήθεια κατάλληλου ΣΕΣ κατασκευάζουμε σύνολα fractal στους χώρους  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  και  $\mathbb{R}^3$ , ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής. Τα ακόλουθα σύνολα 1.1 έως 1.5 ([1],[7],[11]), είναι παραδείγματα γνωστών fractals, ενώ το 1.6 δημιουργήθηκε για τις ανάγκες του δευτέρου μέρους της εργασίας. Οι εμφανιζόμενες συναρτήσεις συστολής του  $\mathbb{R}^d$  είναι ειδικής μορφής, συγκεκριμένα είναι ομοιότητες.

### 1.1. Τριαδικό σύνολο Cantor

Ξεκινώντας με ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, πάνω στην ευθεία των αριθμών μεταξύ του 0 και του 1, αφαιρούμε στο πρώτο βήμα της διαδικασίας το μεσαίο τρίτο του, δηλαδή το διάστημα μεταξύ των αριθμών  $1/3$  και  $2/3$ . Ακολούθως, αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο των δύο τμημάτων που απομένουν, δηλαδή τα διαστήματα μεταξύ των αριθμών  $1/9$ ,  $2/9$  και  $7/9$ ,  $8/9$ .

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο την κατασκευή αυτή και αφαιρώντας σε κάθε βήμα από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα το μεσαίο τρίτο τους, ύστερα από άπειρα βήματα, το σύνολο των σημείων που παραμένουν στο «τέλος», ονομάζεται τριαδικό σύνολο Cantor.

Παρατηρούμε ότι τα τελικά σημεία του συνόλου Cantor είναι άπειρα, αφού ανάμεσα σε αυτά είναι π.χ. όλα τα άκρα των τμημάτων που δημιουργούνται σε κάθε βήμα. Έτσι, στο Βήμα 1 έχουμε τα σημεία 0,  $1/3$ ,  $2/3$  και 1, στο Βήμα 2 έχουμε 0,  $1/9$ ,  $2/9$ ,  $3/9$ ,  $6/9$ ,  $7/9$ ,  $8/9$  και 1, στο Βήμα 3 έχουμε 0,  $1/27$ ,  $2/27$ ,  $3/27$ ,  $6/27$ ,  $7/27$ ,  $8/27$ ,  $9/27$ ,  $18/27$ ,  $19/27$ ,  $20/27$ ,  $21/27$ ,  $24/27$ ,  $25/27$ ,  $26/27$  και 1, κ.ο.κ.. Στο τέλος τα σημεία θα είναι άπειρα, αφού σε κάθε βήμα το πλήθος τους διπλασιάζεται. Άπειρα όμως είναι και τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος με το οποίο αρχίσαμε. Άπειροι είναι και οι αριθμοί ανάμεσα στο 0 και το 1 που γράφονται με τη μορφή κλάσματος (ρητοί) και πολλοί από τους οποίους παραλείφθηκαν κατά την κατασκευή του συνόλου Cantor. Η διαφορά θα φανεί μέσω της έννοιας της διάστασης.

Επίσης, παρατηρούμε ότι κάθε ένα από τα δύο ζεύγη τμημάτων που έχουν δημιουργηθεί στο Βήμα 2 είναι πανομοιότυπο με τα δύο τμήματα του Βήματος 1, αν τα σμικρύνει κανείς κατά  $1/3$ . Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για όλα τα ζεύγη του Βήματος 3, σε σχέση με τα αντίστοιχα ζεύγη του Βήματος 2 από το οποίο προήλθαν. Το φαινόμενο αυτό, που παρατηρείται μεταξύ

όλων των διαδοχικών τμημάτων της κατασκευής του συνόλου Cantor, ονομάζεται αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας και η συγκεκριμένη κλίμακα που συνδέει εδώ τα διαδοχικά ζεύγη τμημάτων είναι το  $1/3$ .

Ας δούμε το σύνολο Cantor ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής  $W$ .

$$\text{Ορίζουμε τις ομοιότητες } w_1(x) = \frac{1}{3}x, w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Έστω } W(B) = w_1(B) \cup w_2(B), B \in H(\mathbb{R}).$$

Για  $B=[0,1]$  έχουμε

$$W^2([0,1]) = W\left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \text{ κ.ο.κ..}$$

Τότε, το σταθερό σημείο της  $W$  είναι το  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n([0,1])$ , το οποίο είναι το τριαδικό σύνολο Cantor.

### 1.2. Τρίγωνο Sierpinski



Εικ.1 Τριαδικό σύνολο Cantor

Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 και αφαιρούμε το μεσαίο τριγωνικό κομμάτι που έχει ως κορυφές τα μέσα των τριών πλευρών του αρχικού τριγώνου. Στη συνέχεια αφαιρούμε από τα 3 συμπαγή τρίγωνα που έμειναν στο σχήμα το μεσαίο τους κομμάτι, δηλαδή ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς  $1/4$ . Κατόπιν από κάθε ένα από τα 9 συμπαγή τρίγωνα που μένουν αφαιρούμε το μεσαίο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς  $1/8$ .

Ας δούμε το σύνολο Sierpinski ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής  $W$ .

Ορίζουμε τις ομοιότητες

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Έστω,  $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B)$ ,  $B \in H(\mathbb{R}^2)$ . Το σταθερό σημείο της  $W$  είναι το τρίγωνο Sierpinski.

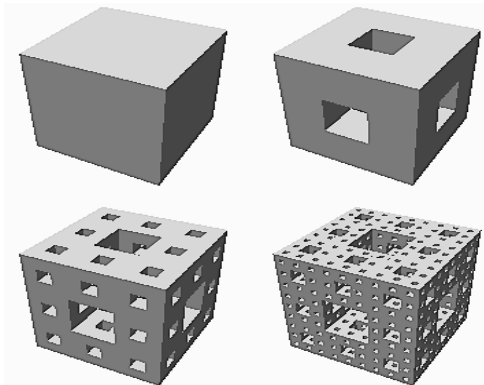


Εικ. 2. Κατασκευή Τριγώνου Sierpinski

### 1.3. Σπόγγος του Menger ή Sierpinski

Ο σπόγγος κατασκευάζεται αν χωρίσουμε τον μοναδιαίο κύβο  $[0,1]^3$  σε 27 κύβους πλευράς  $1/3$  και αφαιρέσουμε τους επτά κεντρικούς κύβους. Οι συναρτήσεις συστολής είναι  $3^3 - 7$  το πλήθος, γι' αυτό και δεν αναφέρονται.

### 1.4. Καμπύλη von Koch



Εικ. 3α Κατασκευή του σπόγγου Menger

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1 στο επίπεδο. Αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο της κάθε πλευράς και τοποθετούμε στη θέση του δύο άλλα τμήματα μήκους  $1/3$  (βήμα 1). Στη συνέχεια, αφαιρούμε από κάθε

ευθύγραμμο τμήμα της τεθλασμένης καμπύλης που δημιουργείται το μεσαίο τρίτο του και τοποθετούμε στη θέση του δύο ίσα τμήματα μήκους  $\varepsilon_n = (1/3)^n$ . Στο όριο αυτής της διαδικασίας, θα σχηματιστεί μια πολύπλοκη καμπύλη, που μοιάζει με πολυσχιδή παραλία, με κολπίσκους και εξογκώματα σε κάθε μεγέθυνση! Είναι απλή κλειστή καμπύλη, άπειρου μήκους και δεν υπάρχει εφαπτομένη σε κανένα σημείο της.

Ας δούμε το σύνολο von Koch ως σταθερό σημείο κατάλληλης συστολής  $W$ . Ορίζουμε τις ομοιότητες

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

στροφή κατά  $\frac{\pi}{3}$ :  $w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix},$

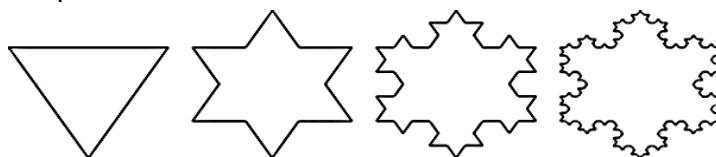
στροφή κατά  $-\frac{\pi}{3}$ :  $w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$

Έστω  $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B) \cup w_4(B)$ ,  $B \in H(\mathbb{R}^2)$ .

Το σταθερό σημείο της

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B) \cup w_4(B), \quad B \in H(\mathbb{R}^2)$$

είναι η καμπύλη von Koch.



Εικ.4 Κατασκευή Καμπύλης von Koch

### 1.5. ‘Πλατανόφυλλο’










Το σταθερό σημείο της  $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup w_3(B) \cup w_4(B)$ ,  $B \in H(\mathbb{R}^2)$ , είναι το ‘πλατανόφυλλο’, όπου



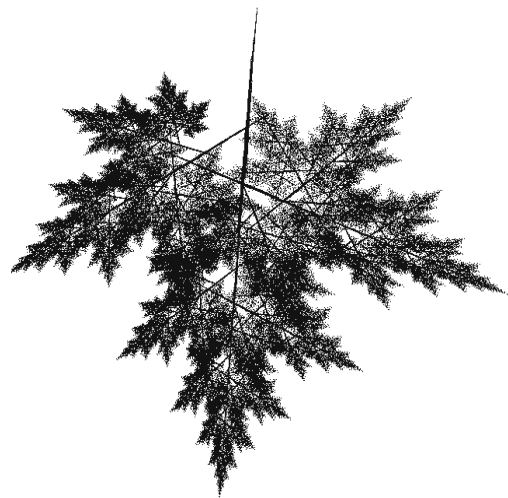
$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49 & 0,01 \\ 0 & 0,62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,52 \\ 0,40 & 0,36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 56 \end{pmatrix},$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 & -0,73 \\ 0,50 & 0,26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 88 \\ 8 \end{pmatrix}, w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 & -0,01 \\ 0,50 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 52 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

### 1.6. Σπείρα fractal

		
<b>ΑΡΧΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ</b>	<b>ΒΗΜΑ 1</b>	<b>ΒΗΜΑ 2</b>
		
<b>ΒΗΜΑ 3</b>	<b>ΒΗΜΑ 4</b>	<b>ΒΗΜΑ 5</b>
		
<b>ΒΗΜΑ 6</b>	<b>ΒΗΜΑ 7</b>	<b>ΒΗΜΑ 8</b>

Εικ.5 Κατασκευή Πλατανόφυλλου



Εικ.6 'Πλατανόφυλλο'

Η ακόλουθη σπείρα θα χρησιμοποιηθεί στο δεύτερο μέρος για την εικονοποίησή μας.

Ορίζουμε τις ομοιότητες

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}, w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,8 \end{pmatrix}.$$

στροφή κατά  $\frac{\pi}{9}$ :  $w_5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{17}{20} \begin{pmatrix} 0,939 & -0,342 \\ 0,342 & 0,939 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

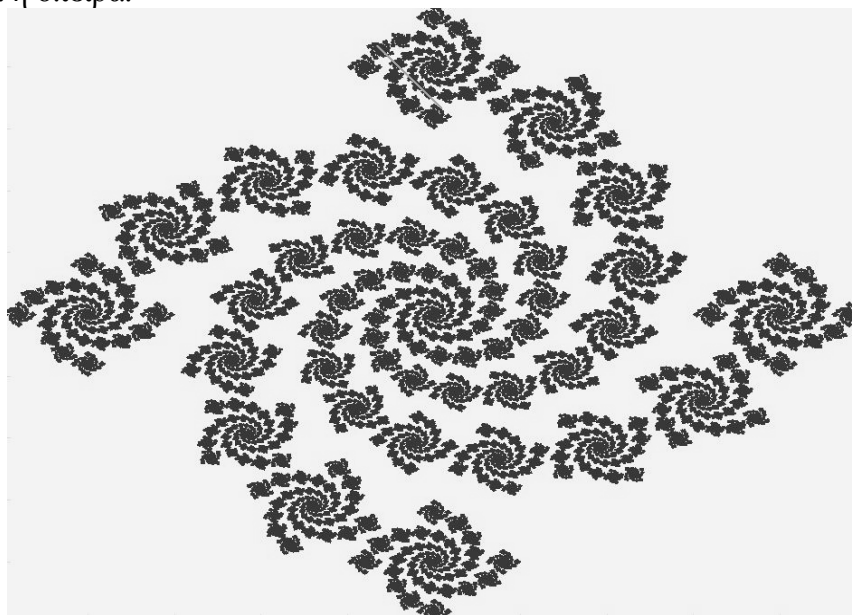
Έστω

$$W(B) = w_1(B) \cup_2 w(B) \cup w_3(B) \cup w_4(B) \cup w_5(B), B \in H(\mathbb{R}^2).$$

Το σταθερό σημείο της

$$W(B) = w_1(B) \cup_2 w(B) \cup w_3(B) \cup w_4(B) \cup w_5(B), B \in H(\mathbb{R}^2)$$

είναι η σπείρα.



Εικ.7 Σπείρα

### Διαστάσεις fractal

Στην Κλασσική Γεωμετρία (Ευκλείδεια), η έννοια της «διάστασης» εκφράζεται ως μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Ένα σημείο έχει διάσταση μηδέν, μια γραμμή έχει διάσταση ένα, μια επιφάνεια διάσταση δύο και ο χώρος έχει διάσταση τρία. Τρίγωνο, παραλληλόγραμμο, πολύγωνο, κύκλος έχουν διάσταση δύο, ο κύβος, ο κώνος, η σφαίρα έχουν διάσταση τρία κ.ο.κ.. Τα σχήματα fractals είναι σύνολα σημείων που εμφανίζουν νέες λεπτομέρειες σε κάθε κλίμακα μεγέθυνσης. Συχνά παρουσιάζουν αυτοομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας. Ωστόσο, ένα fractal μπορεί να περιγραφεί από μια άπειρη ακολουθία κλιμάκων και η αυτοομοιότητά του να είναι και στατιστική ιδιότητα του συνόλου. Τα fractals 1.1-1.6 δημιουργήθηκαν μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας, σε κάθε βήμα της οποίας εφαρμόζονται οι ίδιοι μαθηματικοί μετασχηματισμοί (αλλαγή κλίμακας, μετάθεση και στροφή).

Υπάρχουν πολλοί τρόποι προσδιορισμού της διάστασης ενός συνόλου fractal. Οι πιο σημαντικές θεωρητικές διαστάσεις, είναι η Hausdorff - Besicovitch και η διάσταση box, οι οποίες αν και για τα κλασσικά fractals συμπίπτουν, γενικά δεν είναι ίσες. Σημειώνουμε ότι αυτές αποτελούν γενίκευση της γνωστής διάστασης των Ευκλειδείων συνόλων που αναφέραμε. Ο προσδιορισμός των παραπάνω διαστάσεων των συνόλων fractal απαιτεί μελέτη της μεθόδου κατασκευής καθενός από αυτά. Ο άμεσος υπολογισμός διάστασης συνόλου είναι ιδιαίτερα επίπονος και τεχνικός, ακόμη και για το απλούστερο των fractal συνόλων, το τριαδικό σύνολο του Cantor. Για ειδικής μορφής ΣΕΣ οι διαστάσεις συμπίπτουν και υπολογίζονται βάσει γνωστού θεωρήματος ([2]).

Θεωρούμε τις ομοιότητες  $w_1, w_2, \dots, w_N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , με συντελεστές ομοιότητας  $s_1, s_2, \dots, s_N \in (0, 1)$ , ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη ανοικτού συνόλου: υπάρχει  $V \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $V \neq \emptyset$ ,  $V$  ανοικτό, ώστε

- i.  $\bigcup_{i=1}^N w_i(V) \subseteq V$  και
- ii.  $w_i(V) \cap w_j(V) = \emptyset$ ,  $i \neq j$ .

Το σταθερό σημείο  $K$  της  $W : H(\mathbb{R}^d) \rightarrow H(\mathbb{R}^d)$  έχει διάσταση  $D$ , όπου το  $D$  δίδεται από τη σχέση:  $\sum_{i=1}^N s_i^D = 1$ .

Τα ΣΕΣ των παραδειγμάτων 1.1 έως 1.6 ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος. Προκύπτουν τα κάτωθι:

Το τριαδικό σύνολο Cantor είναι διάστασης  $D = \frac{\log 2}{\log 3} \in (0, 1)$ .

Το τρίγωνο Sierpinski είναι διάστασης  $D = \frac{\log 3}{\log 2} \in (1, 2)$ .

Ο σπόγγος του Menger είναι διάστασης  $D = \frac{\log 20}{\log 3} \in (2, 3)$ .

Η καμπύλη von Koch είναι διάστασης  $D = \frac{\log 4}{\log 3} \in (1, 2)$ .

Η σπείρα fractal έχει διάσταση  $D \cong 1,73384 \in (1, 2)$ .

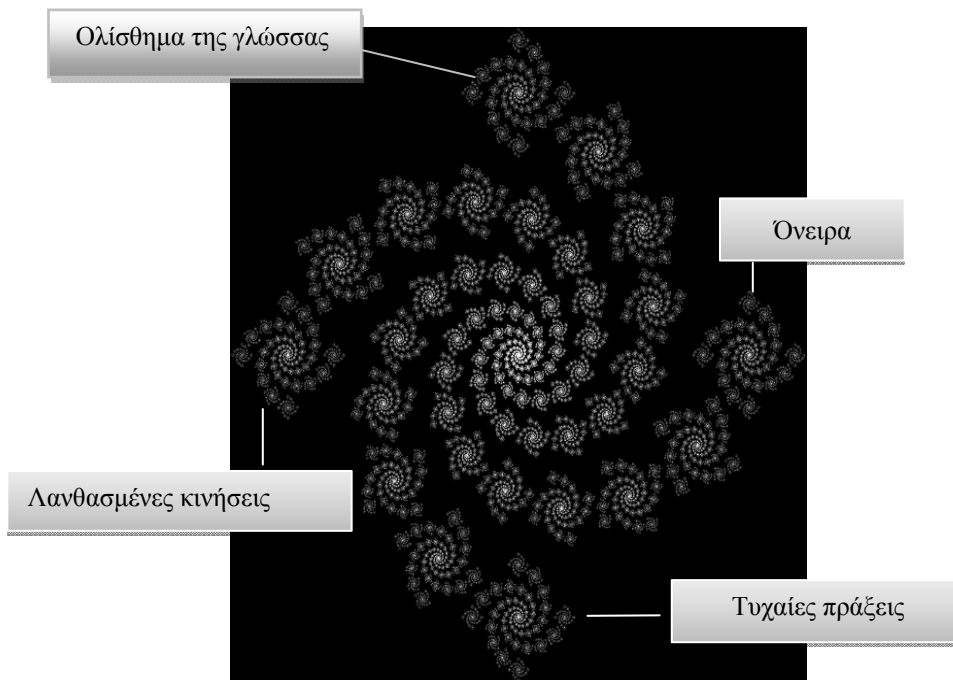
## 2. Μια αναπαράσταση του Εγώ μέσω της σπείρας fractal

Κάθε άνθρωπος διέπεται από ψυχικούς νόμους, οι οποίοι αν και δεν του είναι προφανείς, συγκαθορίζουν την πορεία της ψυχικής του ζωής. Οι περισσότεροι από αυτούς τους νόμους ανήκουν στην περιοχή του ασυνείδητου και η επιρροή τους μπορεί να αναζητηθεί πίσω από τετελεσμένες πράξεις ή σχηματισμένες σκέψεις, άλλοτε αυτούσιες και άλλοτε δύσκολα αναγνωρίσιμες. Η λέξη ασυνείδητο χρησιμοποιείται συχνά για να υποδηλώσει το σύνολο των περιεχομένων που δεν είναι παρόντα στο ενεστώσ σημείο της συνειδήσεως. Ο Φρόιντ στα πλαίσια της πρώτης θεωρίας για το ψυχικό όργανο, υποστηρίζει ότι το ασυνείδητο συγκροτείται από απωθημένα περιεχόμενα για τα οποία δεν έχει γίνει αποδεκτή η πρόσβαση στο προσυνειδητό-συνειδητό, λόγω της δράσης της απόθησης. Το ασυνείδητο από μόνο του παραμένει άγνωστο: μπορούμε να το συλλάβουμε μόνο στα παράγωγά του (σύμπτωμα, όνειρο, γλωσσική παραδρομή, λογοπαίγνιο, παιχνίδι κ.α.), ώστε να παραπεμφθούμε στις πηγές και σε εκείνη την ασυνείδητη επιθυμία που δίνει ψυχή στη ζωή μας. Είναι άχρονο, είναι επικαιρότητα και αποτελεσματικότητα ([12]).

Το ασυνείδητο σύμπλεγμα του Εγώ εκφράζεται στον ανθρώπινο εγκέφαλο από το μεταιχμιακό σύστημα, στο οποίο επιτελούνται οι λειτουργίες της μνήμης και της όσφρησης (ρυθμίζει την ευχαρίστηση και τον φόβο που μπορεί να προκαλέσουν οσμές). Επίσης, μεταβάλλει την αναπνοή, την καρδιαγγειακή και γαστροεντερική κινητικότητα, ρυθμίζει συναισθηματικές καταστάσεις και παρέχει ενίσχυση κινήτρου για την εκδήλωση συμπεριφοράς. Είναι αναπόσπαστο σύστημα όσον αφορά τις δραστηριότητες, και παίζει σημαντικό ρόλο στο σύστημα πρόγνωσης και προσχεδιασμού. Είναι επίσης θεμελιώδες για την αυτοσυντήρηση, αφού ρυθμίζει δραστηριότητες σχετιζόμενες με τη σίτιση, με τη θερμοκρασία, με τον κύκλο του ύπνου, με αντιδράσεις πάλης ή αποφυγής και με τις αρχέγονες δραστηριότητες που σχετίζονται με τη σεξουαλική συμπεριφορά ([5]).

Αν θεωρήσουμε το ένστικτο της αναπαραγωγής (σεξουαλική επιθυμία) ως αρχικό σύνολο, στο οποίο επενεργούν βιολογικοί, κλιματολογικοί, γεωγραφικοί, κοινωνικοί, θρησκευτικοί και πολιτισμικοί παράγοντες ως συναρτήσεις συστολής, το σταθερό σημείο αυτής της επενέργειας, το Εγώ, μπορεί να εικονοποιηθεί με μια σπείρα fractal που αναδύεται μέσα από σκούρο πλαίσιο (Εικ.8). Γενικά η σπείρα είναι ένα πανάρχαιο σύμβολο, αλλά και ένα σχήμα που μπορεί να παρατηρηθεί τόσο στον μικρόκοσμο (μόριο DNA), όσο και στον μακρόκοσμο (Γαλαξίες). Επιπλέον ο Δρ. Peter A. Levine, καταξιωμένος επιστήμονας και θεραπευτής, αναφέρει ότι εμείς

οι άνθρωποι συχνά εισερχόμαστε σε μια σπειροειδή καθοδική πορεία η οποία χαρακτηρίζεται από έναν αυξανόμενα εξουθενωτικό αστερισμό συμπτωμάτων ([10]).



Εικ.8 Σπείρα

Αναλυτικότερα, το Εγώ συναποτελείται από το συνειδητό (σύνολο σημείων που απεικονίζονται με λευκό χρώμα) και από το ασυνείδητο (σύνολο σημείων που φέρουν μαύρο χρώμα), (Εικ.8). Παρατηρώντας το σύνορο μεταξύ ασυνείδητου/σύνολο μαύρου χρώματος και συνειδητού / σύνολο λευκού χρώματος βλέπουμε ότι είναι ασαφές και δυσδιάκριτο. Είναι αδύνατον να αποφανθούμε με βεβαιότητα, αν κάποιο σημείο ανήκει σε αυτό ή όχι, ακόμη και αν προσπαθήσουμε να αναλύσουμε με μεγέθυνση μικρή περιοχή του.

Επιπλέον, το σύνολο των λευκών σημείων δημιουργεί μια περιοχή η οποία αν και φαίνεται να καταλαμβάνει κάποια επιφάνεια, έχει μηδενικό εμβαδόν. Από μαθηματική σκοπιά, η ιδιότητα αυτή αιτιολογείται πλήρως, αφού η διάσταση της σπείρας fractal είναι μικρότερη του δύο ( $1 < D < 2$ ). Ανάλογη ιδέα μας δίνει η περιγραφή του Γιούνγκ, κατά την οποία το ασυνείδητο είναι ένας «ωκεανός» από τον οποίο το συνειδητό

«ξεπροβάλλει σταδιακά σα νησί» ([8]). Τηρουμένων των αναλογιών, το εμβαδόν του νησιού σε σχέση με το εμβαδόν του ωκεανού, είναι μηδέν.

Το ασυνείδητο είναι ένας συγκερασμός απωθημένων ψυχικών υλικών και μια διαρκώς ενεργή διαδικασία, που εξωτερικεύεται μέσω των συμπτωμάτων του. Με τη μελέτη των συμπτωμάτων (όνειρο, τυχαίες πράξεις, λανθασμένες κινήσεις, γλωσσικά ολισθήματα) ο αναλυτής μπορεί να έρθει σε επαφή με τις ασυνείδητες ψυχικές διεργασίες του ασθενούς, και να αποκρυπτογραφήσει τις ορμές της ψυχικής ενέργειας που έχουν απωθηθεί από τη συνείδηση. Ας δούμε τα συμπτώματα όπως αναφέρονται από τον πατέρα της ψυχανάλυσης.

Ο Φρόιντ, μέσα από επαρκώς διευκρινισμένα παραδείγματα ασθενών του και από αυτοπαρατηρήσεις, υποστηρίζει ότι κοινό σημείο όλων των περιπτώσεων γλωσσικών παραδρομών παραμένει το γεγονός ότι οι ξεχασμένες ή παραμορφωμένες λέξεις ενός συνειρμικού δρόμου έρχονται να συνδεθούν με μια ασυνείδητη ιδέα, από την οποία ξεκινά η επίδραση που εκδηλώνεται ως λεκτικό ολίσθημα ([14] σελ.67). Επίσης, υποστηρίζει ότι οι λειτουργικές διαταραχές της καθημερινής ζωής είναι συμβολικές αναπαραστάσεις μιας σκέψης η οποία δεν είναι προορισμένη να ληφθεί στα σοβαρά από τη συνείδηση. Το γλίστρημα αντικειμένων από τα χέρια, η ανατροπή και το σπάσιμό τους, χρησιμοποιείται πολύ συχνά για να εκφραστούν ασυνείδητες νοητικές διεργασίες και δεν οφείλονται σε σύμπτωση ή αθέλητη αδεξιότητα ([14] σελ.214). Είναι αλήθεια ότι τέτοιες κινήσεις όταν πληρούνται η ανατομική ακεραιότητα των νευρομυϊκών μηχανισμών, έχουν να επιδείξουν κάτι βίαιο, εκσφενδονιστικό και άτακτα σπαστικό, αλλά φαίνονται να διέπονται από μια πρόθεση, και πλήττουν τον στόχο τους με μια σιγουριά που δύσκολα απαντάται σε ηθελημένες κινήσεις. Το παίξιμο με ένα αντικείμενο που κρατάει κανείς στα χέρια του, το κουδούνισμα με τα κέρματα στην τσέπη, το μάλαγμα της ζύμης ή άλλων εύπλαστων ουσιών, κάθε είδους χειρονομίες στα ρούχα και πολλά παρόμοια, δεν έχουν να κρύψουν τίποτα το επιλήψιμο. Πίσω όμως από όλα αυτά τα παιχνίδια απασχόλησης και τις λανθασμένες κινήσεις κρύβεται, σύμφωνα με τον Φρόιντ, κατά κανόνα ένα νόημα και μια σημασία, που δεν μπορούν να βρουν άλλον τρόπο έκφρασης ([14] σελ.240).

Κατά τον Φρόιντ, ακόμα και οι πιο άμεσες ονειρικές σκέψεις δεν μπορούν να διατυπωθούν με λιτά λεκτικά σχήματα, αλλά παριστάνονται με τρόπο συμβολικό. Το ψυχικό υλικό που περιλαμβάνεται στις ονειρικές σκέψεις περιέχει αναμνήσεις, εντυπωσιακά βιώματα (κυρίως από την παιδική ηλικία), μη αφομοιωμένα κλάσματα από οπτικές εικόνες, ομιλίες, κομμάτια από αναλλοίωτες απωθημένες σκέψεις ([6],[15],[16] σελ. 36).

Η ιδιότητα της αυτοομοιότητας των fractals έχει καταγραφεί στη νεώτερη βιβλιογραφία (1995) από τον καθηγητή Galatzer-Levy. Χρησιμοποιεί την αρχή της αυτοομοιότητας στην ψυχαναλυτική διαδικασία. Έχοντας παρατηρήσει ότι σε μια ολιγόλεπτη ανάλυση υπάρχει όμοια διαδικασία με εκείνη της μιας ώρας, ή λίγων μηνών, ή ακόμα και χρόνων, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ένα μικρό δείγμα της ανάλυσης του ασθενούς μπορεί να ληφθεί ως σημαντικό και αντιπροσωπευτικό δείγμα της συνολικής ανάλυσης ([4]).

Βάσει των παρατηρήσεων αυτών θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το «Εγώ» με την δομή της σπείρας fractal, μη επιδεχόμενο λιτό σχήμα και τα συμπτώματα ως φορείς αυτοομοιότητας, που μελετώντας τα να έχουμε την δυνατότητα λήψης πληροφοριών για το όλον.

### Βιβλιογραφία

1. **M. F. Barnsley:** Fractals Everywhere, Academic Press, San Diego, CA, USA, 1988.
2. **J. E. Hutchinson:** Fractals and self similarity, Indiana Uni. Journal of Maths., 30, 5, (1981) 713-747.
3. **J. Savege Scharff, D. E. Scharff:** Object Relations Individual Therapy, Karnac Books, London, 1998
4. **Galatzer - Levy R.:** Psychoanalysis and Chaos Theory, Journal of the American Psychoanalytic Association 43:1095-1113, 1995.
5. **Σ. Αναγνωστοπούλου:** Κεντρικό Νευρικό Σύστημα, Ιατρικές Εκδόσεις Πασχαλίδη, Αθήνα 1987.
6. **Γ. Βαμβαλής:** Ξαναδιαβάζοντας τον Φρόιντ, Μία επανάληψη σε τριάντα απλά μαθήματα, Εκδ. Επίκουρος, Αθήνα, 2000.
7. **Λ. Ευαγγελάτου-Δάλλα:** Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα, 2000.
8. **I. B. Κιουστελίδης:** Ο Μηχανισμός της νόησης, Εκδ. Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2002.
9. **Δ. Κοντογιάννης, Β. Ντζιαχρήστος:** Βασικές Έννοιες της Γεωμετρίας. Αθήνα, 2003.
10. **Peter A. Levine , Ann Frederick :** Το ξύπνημα της τίγρης, [μεταφρ.] Χ. Κουτούγκου, Εκδ. Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 2000.
11. **T. Μπούντης:** Ο Θαυμαστός κόσμος των Fractal, Εκδ. Leader Books, Αθήνα, 2004.
12. **J.D. Nasio:** Πέντε παραδόσεις πάνω στη θεωρία Jacques Lacan, [μεταφρ.] Κανελλοπούλου Β.- Λ., Εκδ. Πατάκης, Αθήνα, 2010.

13. **Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β.Φαρμάκη:** Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα, 1988.
14. **Σ. Φρόιντ:** Ψυχοπαθολογία της καθημερινής ζωής, [μεταφρ.] Λ. Αναγνώστου, Εκδ. Επίκουρος, Αθήνα, 1992.
15. **Σ. Φρόιντ:** Ντόρα, η ανάλυση μιας υστερίας, [μεταφρ.] Κ. Λιάπτη, Εκδ. Επίκουρος, Αθήνα, 1991.
16. **Σ. Φρόιντ:** Όνειρο και τηλεπάθεια, [μεταφρ.] Γ. Τσαμποράκης, Εκδ. Επίκουρος, Αθήνα, 1983.