Το Θεώρημα του Άνω Φράγματος για το πλήθος των εδρών πολυτόπου στον $\mathbb{R}^d$

Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
ldalla@math.uoa.gr

Αγγελική Παπασπυροπούλου
Μέση Εκπαίδευση
papaspyropoulouag@yahoo.gr

Περίληψη

Τα πολύτοπα αποτελούν απλή γενίκευση των πολυγώνων που επιπέδου και των πολυέδρων του χώρου που ζούμε. Επειδή στο επίπεδο τα πολύγωνα έχουν το ίδιο πλήθος κορυφών και ακμών, το ενδιαφέρον για την εύρεση σχέσης του πλήθους V των κορυφών, E των ακμών και F των εδρών, εμφανίστηκε στα πολύεδρα. Ο Euler με τη σχέση $V - E + F = 2$ έδωσε το έναυσμα στους μεταγενέστερους να μελετήσουν την ύπαρξη αναλόγων σχέσεων σε πολύτοπα μεγαλύτερης διάστασης, πράγμα που επετεύχθη από τον Poincaré για πολύτοπα κάθε διάστασης. Το ερώτημα του Motzkin (1957) για το μέγιστο πλήθος k-εδρών που μπορεί να εμφανιστεί σε πολύτοπο με n κορυφές, έδωσε πνοή στην έρευνα της περιοχής. Πολλοί μαθηματικοί μελέτησαν το πρόβλημα χωρίς να δώσουν όμως την οριστική απάντηση. Με την πάροδο των χρόνων η έρευνα εντάθηκε, ώσπου ο McMullen (1970) έλυσε το πρόβλημα με τη χρήση νέων εργαλείων. Στο άρθρο αυτό θα παρουσιαστούν, όσο το δυνατόν πιο περιεκτικά και συνοπτικά το πρόβλημα του Motzkin, τα θεωρήματα που εμπλέκονται από την θεωρία των πολυτόπων και η λύση του προβλήματος.

Abstract

The polytopes are a mere generalization of the polygons on the plane and polyhedra in the space we live. Because the polygons on the plane have the same number of vertices and edges, it is interesting to find relation among the number V of vertices, the number E of the edges and the number F of the faces that appear in polyhedra. The relation $V - E + F = 2$, given by Euler, gave the motive to later mathematician to study the existence of similar relations in higher dimensional polytopes, found by Poincaré for polytopes in any dimension. The question raised by Motzkin (1957) about the maximum number of edges and k-faces that might appear in a polytope with n vertices gave a new impetus of research in this area. Many mathematicians studied the problem without giving a definite answer. The final answer was given my McMullen (1970) using new mathematical tools. In this paper, the Motzkin's problem will be presented as comprehensively and concisely as possible, the theorems from polytope theory involved and the solution of the problem.

Εισαγωγή

Η έννοια του πολυτόπου αποτελεί απλή και φυσιολογική γενίκευση των πολυγώνων του επιπέδου και των πολυέδρων του χώρου που ζούμε. Είναι τα απλούστερα των στερεών, διαθέτοντας πεπερασμένο πλήθος κορυφών. Ο ρόλος των πολυτόπων στη γεωμετρία είναι κεντρικός, μιας και κάθε στερεό προσεγγίζεται όσο καλά θέλουμε από αυτά. Αν μας επιτραπούν κάποιοι παραλληλισμοί με το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών, θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα πολύτοπα έχουν τον ρόλο των ρητών στο σύνολο των Γεωμετρικών Σωμάτων. Η μελέτη τους έχει απασχολήσει μαθηματικούς, φιλοσόφους και ζωγράφους, παίζουν δε σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων Βελτιστοποίησης, Κρυσταλλογραφίας, Αξονικής Τομογραφίας και άλλων κλάδων.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι σχετικό με τον μέγιστο πλήθος εδρών που μπορούν να προκύψουν σε ένα πολύτοπο, διάστασης d ($d \geq 3$) όταν αυτό έχει n κορυφές.

Ο τύπος του Euler στον χώρο $\mathbb{R}^3$ μας δίνει ότι σε κάθε πολύτοπο ισχύει

$$V - E + F = 2,$$

όπου V, E, F είναι το πλήθος των κορυφών, των ακμών και των εδρών αυτού, αντίστοιχα. Ο τύπος αυτός γενικεύεται στον $\mathbb{R}^d$, ως τύπος των Euler-Poincaré

$$(-1)^j f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 - (-1)^d,$$

με f_0 το πλήθος των κορυφών και f_k το πλήθος των k-διάστατων εδρών, $k = 1, \ldots, d-1$.

Ο ανωτέρω τύπος δεν μας δίνει κάποιο άνω φράγμα για τις πιθανές τιμές των $f_1, f_2, \ldots, f_{d-1}$, για δεδομένο πλήθος κορυφών f_0. Οπότε, το ερώτημα που έθεσε ο Motzkin (1957), δηλαδή πόσες k-έδρες μπορεί να έχει ένα πολύτοπο με n κορυφές στον $\mathbb{R}^d$, έρχεται αμέσως στον νου μας. Η λύση αναζητήθηκε φυσιολογικά ανάμεσα στα simplicial πολύτοπα, πολύτοπα με "τριγωνικές" έδρες. Για αυτά, η βοήθεια που υπήρχε ήταν οι εξισώσεις των Dehn-Sommerville (1927)

$$\begin{aligned}(-1)^k \binom{k+1}{k+1} f_k + (-1)^{k+1} \binom{k+2}{k+1} f_{k+1} + \cdots \\ + (-1)^{d-1} \binom{(d-1)+1}{k+1} f_{d-1} = (-1)^{d-1} f_k,\end{aligned}$$

όπου $f_{-1} = 1$ και $k = -1, 0, 1, \ldots, d-2$. Για $k = -1$, προφανώς έχουμε τον τύπο των Euler-Poincaré. Το ανωτέρω σύστημα εξισώσεων χρησιμοποιήθηκε από τον Grünbaum (1969) για να προσδιορίσει φράγματα έως και στον 8-διάστατο χώρο και από τον Gale (1963) για πολύτοπα με "λίγες κορυφές", δηλαδή, τα υπάρχοντα αποτελέσματα δεν μπορούσαν να εφαρμοστούν συγχρόνως σε "μεγάλες" διαστάσεις για πολύτοπα με "πολλές" κορυφές.

Από την άλλη πλευρά έπρεπε να εξασφαλιστεί η ύπαρξη πολυτόπων που υλοποιούν τα πιθανολογούμενα φράγματα. Σε αυτήν την κατεύθυνση έγινε συστηματική μελέτη ειδικών πολυτόπων που υλοποιούσαν φράγματα για τα οποία οι ερευνητές είχαν σοβαρές ενδείξεις ότι ήταν τα ζητούμενα. Ανακαλύφθηκαν πάλι τα κυκλικά πολύτοπα του Καραθεοδωρή, ορίστηκαν τα γειτονικά πολύτοπα και μελετήθηκε η μεταξύ τους σχέση. Η έρευνα συνεχιζόταν μέχρι να δημιουργηθεί το κατάλληλο έδαφος ώστε κάποιος να μπορέσει να προχωρήσει μέχρι την οριστική απάντηση. Πολλοί προσπαθούσαν να φτάσουν στη λύση, μελετώντας, προχωρώντας, δημοσιεύοντας τα αποτελέσματά τους. Το 1970 ο Peter McMullen επινόησε ένα νέο εργαλείο (το **h**-διάνυσμα ενός simplicial πολυτόπου), χρησιμοποίησε την αποφλοίωση των πολυτόπων (των Bruggesser και Mani) και τις εξισώσεις Dehn-Sommerville, και έλυσε το πρόβλημα για οποιασδήποτε διάστασης πολύτοπο.

Από τότε έχουν παρουσιαστεί και άλλες αποδείξεις, μάλλον πιο δυσνόητες της αρχικής. Θα παρουσιαστεί η κλασική απόδειξη του Θεωρήματος του Άνω Φράγματος, προσαρμοσμένη στο συμβολισμό που καθιερώθηκε από τους μετέπειτα του McMullen ερευνητές του κλάδου.

Η δομή του κειμένου είναι η ακόλουθη: Ορίζεται η έννοια του πολυτόπου και παρατίθενται μερικές βασικές ιδιότητες, ενώ γίνεται και παρουσίαση των κυκλικών και γειτονικών πολυτόπων. Στη συνέχεια αναλύεται, κατά το δυνατόν, το ισχυρό εργαλείο του **h**-διανύσματος για simplicial πολύτοπα που άλλαξε μορφή στις γνωστές εξισώσεις των Euler-Poincaré και Dehn-Sommervile και τέλος παρατίθεται το Θεώρημα του Άνω Φράγματος. Για τις αποδείξεις που παραλείπονται μπορούν οι ενδιαφερόμενοι να ανατρέξουν στη βιβλιογραφία, εφόσον σκοπός του παρόντος είναι η σκιαγράφηση των ιδεών που ενεπλάκησαν στην επίλυση του κεντρικού προβλήματος του Άνω Φράγματος και των πολυτόπων για τα οποία υλοποιείται το άνω φράγμα.

1 Πολύτοπα - Το f-διάνυσμα πολυτόπου

Κατ' αρχήν θα παραθέσουμε ορισμούς και αποτελέσματα που αφορούν τα πολύτοπα, απαραίτητα εργαλεία για το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει.

Ορισμός 1.1. Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται *συσχετισμένος υπόχωρος* (ομοπαραλληλικός, affine), αν είναι μια μεταφορά ενός γραμμικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^d$.

- Η *διάσταση του συσχετισμένου υπόχωρου* είναι η διάσταση του αντίστοιχου γραμμικού υπόχωρου. Ιδιαιτέρως: συσχετισμένος υπόχωρος 0-διάστασης είναι ένα σημείο, 1-διάστασης είναι ευθεία, 2-διάστασης είναι επίπεδο, $(d-1)$-διάστασης είναι υπερεπίπεδο.
- Η *συσχετισμένη θήκη ενός συνόλου V* είναι η τομή όλων των συσχετισμένων υποχώρων που περιέχουν το σύνολο V και συμβολίζεται με $\operatorname{aff}(V)$.
- Ένα σύνολο n σημείων είναι *συσχετισμένα ανεξάρτητο* αν η συσχετισμένη θήκη του έχει διάσταση $n-1$.
- Κάθε υπερεπίπεδο είναι της μορφής $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \alpha\}$ για κάποια $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Τα σύνολα $H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \leq \alpha\}$, $H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \geq \alpha\}$ καλούνται *κλειστοί ημίχωροι* οριζόμενοι από το H.

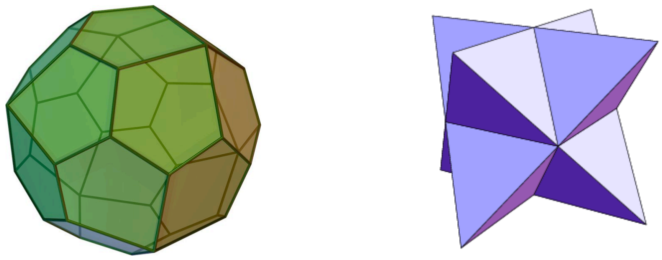
Ορισμός 1.2. Ένα σύνολο σημείων $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ονομάζεται *κυρτό* αν, για κάθε σημεία $x, y \in K$, το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει, δηλαδή το σύνολο $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda) y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ περιέχεται στο K.

Καθώς η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο, ορίζεται η *κυρτή θήκη* ενός συνόλου $K \subseteq \mathbb{R}^d$, ως το "μικρότερο" κυρτό σύνολο που περιέχει το K, δηλαδή:

$$\operatorname{conv}(K) = \cap \{K' \subseteq \mathbb{R}^d, \ K \subseteq K', \quad K' \text{ κυρτό}\}.$$

Ορισμός 1.3 (Πολύτοπο - Πολύεδρο)**.** *Πολύτοπο* καλείται η κυρτή θήκη ενός πεπερασμένου συνόλου σημείων του $\mathbb{R}^d$. *Πολύεδρο* καλείται η τομή πεπερασμένου πλήθους κλειστών ημιχώρων του $\mathbb{R}^d$.

Ένα *d-πολύτοπο P* είναι πολύτοπο του $\mathbb{R}^d$ με d-διάστατη $\operatorname{aff}(P)$.



α πενταγωνικό εικοσι-τετράεδρο

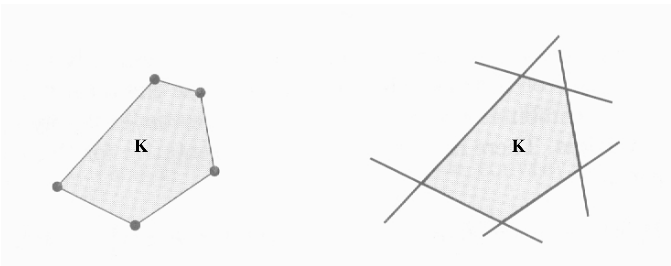
β Stella octangula

Σχήμα 1.1: Ένα κυρτό (α) και ένα μη κυρτό (β) σύνολο στον $\mathbb{R}^3$.

Ισχύει το ακόλουθο θεμελιώδες Θεώρημα:

Θεώρημα 1.1. *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Το K είναι πολύτοπο, αν και μόνο αν το K είναι φραγμένο πολύεδρο.*

Αν και το Θεώρημα φαίνεται προφανές, η πλήρης μαθηματική απόδειξή του κάθε άλλο παρά εύκολη είναι. Αποτελεί δε κύριο εργαλείο και χρησιμοποιείται τόσο στην Κυρτή Ανάλυση όσο και στον Γραμμικό Προγραμματισμό (Μέθοδος Simplex).



Σχήμα 1.2: Το σύνολο K ως πολύτοπο (αριστερά) και ως φραγμένο πολύεδρο (δεξιά).

Ορισμός 1.4 (Έδρες πολυτόπου)**.** Έστω $P \in \mathbb{R}^d$ ένα d-πολύτοπο. Εάν H είναι υπερεπίπεδο με $P \subseteq H^+$ (ή $P \subseteq H^-$) και $H \cap P \neq \emptyset$, τότε το H καλείται *φέρον υπερεπίπεδο* του P.

Έδρα (face) του P λέγεται ένα σύνολο της μορφής

$$F = P \cap H,$$

όπου H είναι φέρον υπερεπίπεδο του P. Εάν ισχύει $\dim(F) = d-1$, η F καλείται *όψη* (facet), εάν $\dim(F) = k \leq d-2$, η F καλείται *k-έδρα*, εάν $\dim(F) = 0$, η F είναι κορυφή.

Ορισμός 1.5 (**f**-διάνυσμα)**.** Στην περίπτωση d-πολυτόπου το **f**-διάνυσμα ορίζεται ως

$$\mathbf{f} = (f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}),$$

με $f_{-1} = 1$ και f_k το πλήθος των k-εδρών ($k = 0, 1, \ldots, d-1$). Στην περίπτωση που έχουμε 3-πολύτοπο, συμβολίζουμε συνήθως $V = f_0$ (vertices), $E = f_1$ (edges) και $F = f_2$ (faces).

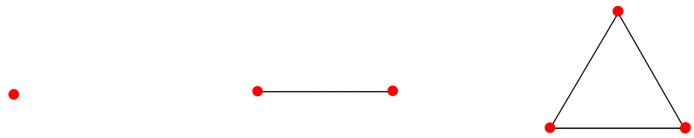
2 Μερικά γνώριμα πολύτοπα Κυκλικά και Γειτονικά πολύτοπα

2.1 Μερικά γνώριμα πολύτοπα

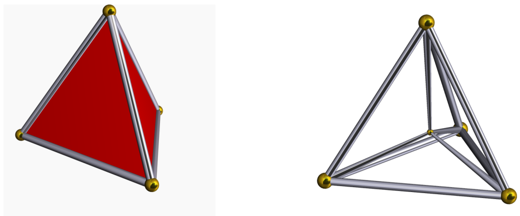
Κατ' αρχήν θα δοθούν οι ορισμοί πολυτόπων, που γενικεύουν τους αντίστοιχους του $\mathbb{R}^3$, θεωρώντας τη συνήθη ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d\}$.

Ορισμός 2.1 (Simplex d-πολύτοπο)**.** Ένα d-πολύτοπο είναι *simplex* του $\mathbb{R}^d$, αν είναι η κυρτή θήκη $d+1$ ανεξάρτητα συσχετισμένων σημείων του $\mathbb{R}^d$. Άρα ένα d–simplex είναι ένα πολύτοπο d–διάστασης με $d+1$ κορυφές, δηλαδή το d-simplex έχει το ελάχιστο πλήθος κορυφών ανάμεσα σε όλα τα d-πολύτοπα. Ο συμβολισμός για ένα d–simplex είναι Δ^d.
Ορισμός 2.2 (Cross πολύτοπο)**.** *Cross* πολύτοπο καλείται το πολύτοπο της μορφής:

$$C_d^{\Delta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sum_i |x_i| \leq 1\} = \mathrm{conv}\,\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d, -\mathbf{e}_d\}.$$

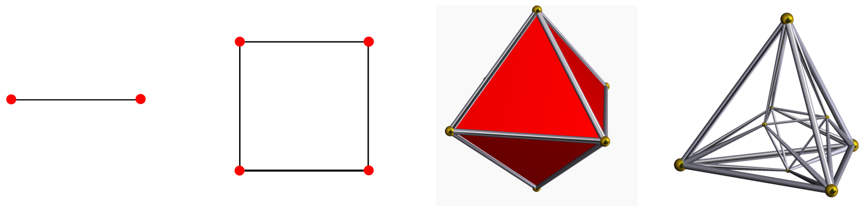


α 0-simplex β 1-simplex γ 2-simplex



δ 3-simplex ε 4-simplex

Σχήμα 2.3: Το (κανονικό) simplex στον (α) $\mathbb{R}^0$ (σημείο), (β) $\mathbb{R}^1$ (ευθύγραμμό τμήμα), (γ) $\mathbb{R}^2$ (τρίγωνο), (δ) $\mathbb{R}^3$ (τετράεδρο) και (ε) $\mathbb{R}^4$ (πεντάτοπο).



α 1-cross πολύτοπο β 2-cross πολύτοπο γ 3-cross πολύτοπο (οκτάεδρο) δ 4-cross πολύτοπο

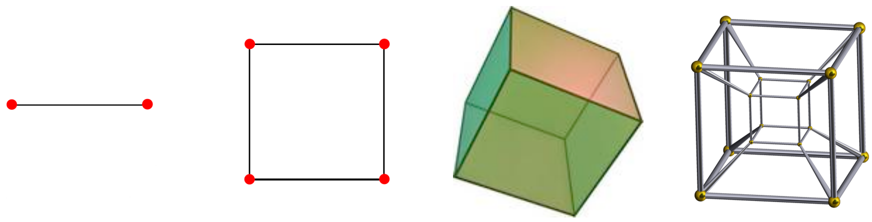
Σχήμα 2.4: Το cross πολύτοπο στον (α) $\mathbb{R}$, (β) $\mathbb{R}^2$, (γ) $\mathbb{R}^3$ και (δ) $\mathbb{R}^4$.

Ορισμός 2.3. Ένα πολύτοπο της μορφής:

$$C_d = [-1, +1]^d$$

ονομάζεται *υπερκύβος* διάστασης d.

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό του simplicial d-πολυτόπου, στην οικογένεια των οποίων θα αναζητηθούν τα πολύτοπα στα οποία τα άνω φράγματα λαμβάνονται.



α 1-κύβος β 2-κύβος γ 3-κύβος δ 4-κύβος

Σχήμα 2.5: Ο κύβος στον (α) $\mathbb{R}$, (β) $\mathbb{R}^2$, (γ) $\mathbb{R}^3$ και (δ) $\mathbb{R}^4$.

Ορισμός 2.4 (Simplicial d-πολύτοπο)**.** Ένα d-πολύτοπο $P \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ένα *simplicial* d-πολύτοπο, όταν κάθε όψη του P είναι ένα simplex πολύτοπο διάστασης $d-1$.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες για ένα d-πολύτοπο P:

$i.$ Το P είναι simplicial.
$ii.$ Κάθε γνήσια έδρα του P είναι ένα simplex.
$iii.$ Κάθε όψη έχει d κορυφές.
$iv.$ Κάθε k-διάστασης έδρα του P έχει $k+1$ κορυφές για $k \leq d-1$.

Ορισμός 2.5. Δύο d-πολύτοπα P και Q θα λέγονται *δυϊκά*, αν υπάρχει "1–1" και επί απεικόνιση φ μεταξύ των k εδρών του P και των $d-1-k$ εδρών του Q, με την ιδιότητα: αν F_1, F_2 είναι έδρες του P με $F_1 \subseteq F_2$ τότε $\varphi(F_2) \subseteq \varphi(F_1)$. Ειδικότερα οι κορυφές του Q αντιστοιχούν στις όψεις του P και αντίστροφα.

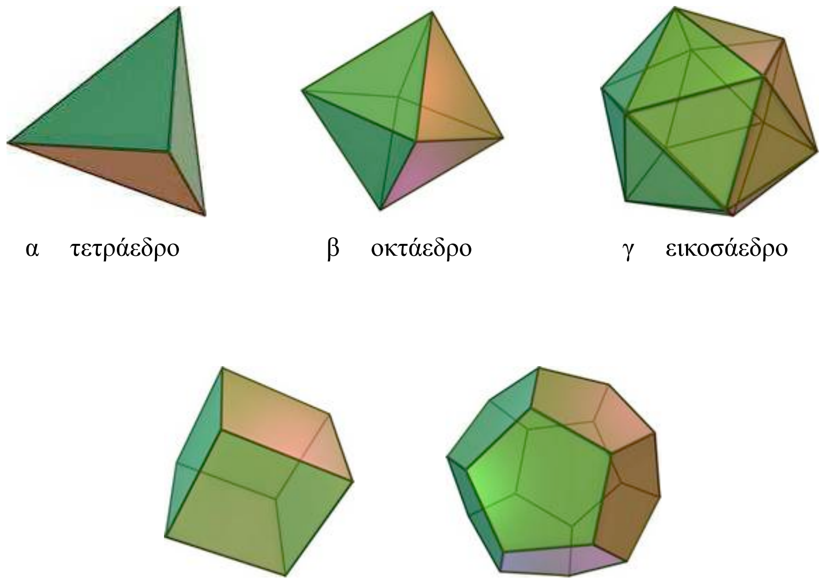
Θα δώσουμε το **f**-διάνυσμα για τα απλούστερα των πολυτόπων.

- Ένα d-simplex έχει:

$$f_k = \binom{d+1}{k+1} \quad k = 0, 1, \ldots, d-1.$$

  Ιδιαιτέρως, ένα 2-simplex έχει $\binom{3}{2} = 3$ πλευρές, δηλαδή είναι ένα τρίγωνο. Ένα 3-simplex έχει $\binom{4}{2} = 6$ πλευρές, και $\binom{4}{3} = 4$ τριγωνικές έδρες, δηλαδή είναι ένα τετράεδρο.

- Το d-cross C_d^{Δ} πολύτοπο έχει 2^d όψεις, που είναι Δ^{d-1} και αποδεικνύ-



α τετράεδρο β οκτάεδρο γ εικοσάεδρο

δ κύβος ε δωδεκάεδρο

Σχήμα 2.6: Τα Πλατωνικά στερεά. Τα (α) τετράεδρο (με δυϊκό τον εαυτό του), (β) οκτάεδρο (με δυϊκό τον κύβο), (γ) εικοσάεδρο (με δυϊκό το δωδεκάεδρο) είναι simplicial, ενώ τα (δ) κύβος και (ε) δωδεκάεδρο δεν είναι simplicial.

εται επαγωγικά ότι:

$$f_k = 2^{k+1}\binom{d}{k+1}.$$

Ιδιαιτέρως, το C_4^{Δ} cross-πολύτοπο έχει $f_0 = 2\binom{4}{1} = 8$ κορυφές, $f_1 = 2^2\binom{4}{2} = 24$ ακμές, $f_2 = 2^3\binom{4}{3} = 32$ έδρες, $f_3 = 2^4\binom{4}{4} = 16$ όψεις.

- Ο υπερκύβος C_d έχει αριθμό $f_k = 2^{d-k}\binom{d}{k}$. Ιδιαιτέρως, ο υπερκύβος C_4 έχει $f_0 = 2^{4-0}\binom{4}{0} = 16$ κορυφές, $f_1 = 2^{4-1}\binom{4}{1} = 32$ ακμές, $f_2 = 2^{4-2}\binom{4}{2} = 24$ έδρες, $f_3 = 2^{4-3}\binom{4}{3} = 8$ όψεις.

2.2 Κυκλικά, Γειτονικά πολύτοπα

Τα κυκλικά και τα γειτονικά πολύτοπα δεν είναι ιδιαίτερα γνωστά στον χώρο που υπάρχουμε, επειδή η διαφορετικότητα τους και η σχέση τους εμφανίζεται από τα 4-πολύτοπα και άνω. Επί παραδείγματι, όλα τα 3-πολύτοπα είναι γειτονικά, γεγονός που δεν ισχύει για τα 4-πολύτοπα.

Το d-κυκλικό πολύτοπο με n κορυφές $(n \geq d+1)$ ανακαλύφθηκε από τον Καραθεοδωρή (1907, 1911) σε εργασίες της Αρμονικής Ανάλυσης. Τα αποτελέσματά του στα κυκλικά πολύτοπα (ιδιαιτέρως η ύπαρξη αυτών) λησμονήθηκαν για πολλά χρόνια. Επανανακαλύφθηκε αργότερα πολλές φορές (από τον Gale και άλλους).

Η ιστορία των γειτονικών πολυτόπων αρχίζει ακόμη νωρίτερα από τα αποτελέσματα του Καραθεοδωρή. Σε εργασία του, που δημοσιεύτηκε το 1909, ο Brückner δείχνει ότι γνώριζε τα δυϊκά των 2-γειτονικών 4-πολυτόπων. Ακόμη νωρίτερα, είχαν ανακαλυφθεί τα 2-γειτονικά 4-πολύτοπα με n κορυφές $(n \leq 7)$. Τα παραδείγματα του Brückner αναπαράχθηκαν από τους P. H. Schoute (1846-1923) και D. Sommerville (1879-1934). Ο E. Steinitz (1871-1928) αναφέρει την ύπαρξη των δυϊκών των γειτονικών 4-πολυτόπων, στηριζόμενος στον Brückner, χωρίς να γνωρίζει την εργασία του Καραθεοδωρή πάνω στα κυκλικά πολύτοπα. Ο D. Gale (1921-2008) και ο T. S. Motzkin (1908-1970) ξανανακάλυψαν τα γειτονικά πολύτοπα. Ο Gale επηρεασμένος από την τυχαία ανακάλυψη ενός 2-γειτονικού 11-πολυτόπου με 24 κορυφές από τον H. W. Kuhn (1925-), ισχυρίστηκε την ύπαρξη k-γειτονικών, $(2k)$-πολυτόπων, για κάθε k.

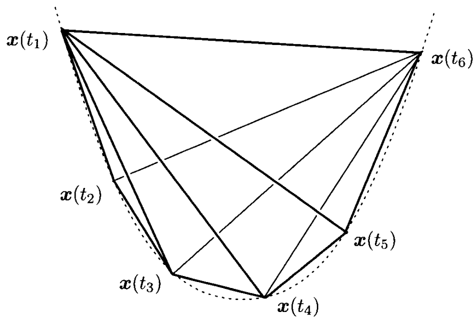
Μερικές ιδιότητες των κυκλικών πολυτόπων μπορεί να εκπλήξουν τον αναγνώστη. Θα δούμε, για παράδειγμα, ότι όλα τα 4-διάστατα κυκλικά πολύτοπα είναι τέτοια ώστε κάθε δύο από τις κορυφές τους προσδιορίζουν μια ακμή, σε αντίθεση με την τριδιάστατη περίπτωση όπου μόνο τα 3-simplex πολύτοπα έχουν αυτήν την ιδιότητα.

Ορισμός 2.6 (Κυκλικό πολύτοπο $C_d(n)$)**.** Στον $\mathbb{R}^d$ θεωρούμε την *καμπύλη ροπής* (moment curve) M_d, που ορίζεται παραμετρικά:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t, t^2, \ldots, t^d\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ένα d-πολύτοπο με n κορυφές $(n \geq d+1)$ ονομάζεται *κυκλικό d-πολύτοπο με n κορυφές* και συμβολίζεται με $C_d(n)$, αν είναι η κυρτή θήκη των n σημείων $\mathbf{x}(t_i)$ που ανήκουν στην M_d, με $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, δηλαδή

$$C_d(n) = \operatorname{conv}\{\mathbf{x}(t_i) \quad \text{με} \quad \mathbf{x}(t_i) \in M_d : \ t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}.$$



Σχήμα 2.7: Το κυκλικό πολύτοπο $C_3(6)$.

Παρατηρήση

Γενικότερα μια καμπύλη $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, καλείται d-κυκλική τότε και μόνο τότε αν για τυχαία, διάφορα μεταξύ τους σημεία $x(t_1), \ldots, x(t_n)$ με $n \geq d+1$ η κυρτή θήκη αυτών είναι d-πολύτοπο ιδίας μορφής με το $C_d(n)$. Ισοδύναμα (Grünbaum, 1967), αν δεν υπάρχει υπερεπίπεδο H του $\mathbb{R}^d$ που να τέμνει την καμπύλη σε περισσότερα από d σημεία.

Άρα, η μορφή των κυκλικών d-πολυτόπων δεν εξαρτάται από την d-κυκλική καμπύλη στην οποία επιλέγουμε τα n σημεία. Οπότε, μπορούμε να γράφουμε $C_d(n)$ χωρίς να υπάρχει σύγχυση.

Θεώρημα 2.1 (Gale, 1963). *Κάθε σύνολο το πολύ $d+1$ σημείων πάνω στην καμπύλη ροπής M_d στον $\mathbb{R}^d$ είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Για $i = 0, 1, \ldots, d$, έστω $\mathbf{x}(t_i) = \left(t_i, t_i^2, \ldots, t_i^d\right)$, όπου $t_0 < t_1 < \cdots < t_d$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\{\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \ldots, \mathbf{x}(t_d)\}$ είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο, το οποίο είναι ισοδύναμο με το μη μηδενισμό της ακόλουθης $(d+1) \times (d+1)$ ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^d \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_d & t_d^2 & \cdots & t_d^d \end{vmatrix}.$$

Είναι γνωστό αποτέλεσμα στοιχειώδους άλγεβρας ότι η ορίζουσα αυτή, επονομαζόμενη ορίζουσα του *Vandermode*, είναι ίση με

$$\prod_{0\le i<j\le d}(t_j - t_i)$$

και άρα είναι διάφορη του μηδενός. $\square$

Θεώρημα 2.2 (Gale, 1963)**.** *Τα κυκλικά πολύτοπα είναι simplicial.*

Απόδειξη. Έστω $F = H \cap C_d(n)$ μια όψη του $C_d(n)$ για κάποιο υπερεπίπεδο H. Το H έχει διάσταση $d-1$, άρα δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από d σημεία της M_d (αν περιείχε $d+1$ σημεία της M_d αυτά σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 θα ήταν συσχετισμένα ανεξάρτητα, οπότε $\dim(H) = d$, άτοπο). Άρα, η F είναι simplex. $\square$

Θεώρημα 2.3. *Έστω $C_d(n)$ η κυρτή θήκη των διακεκριμένων $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ σημείων, ($n \ge d+1 \ge 3$), στην καμπύλη ροπής M_d στον $\mathbb{R}^d$ και k ένας ακέραιος, με $1 \le k \le \left[\frac{d}{2}\right]$*[1]*. Τότε κάθε σύνολο k σημείων από τα $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ προσδιορίζει μια $(k-1)$-έδρα του $C_d(n)$ και $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ είναι οι κορυφές του $C_d(n)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k\}$ προσδιορίζει μια $(k-1)$-έδρα του $C_d(n)$. Για κάθε $i = 1,\dots,k$, έστω $\mathbf{x}_i = \left(t_i, t_i^2,\dots,t_i^d\right)$. Ορίζουμε το πολυώνυμο p πραγματικής μεταβλητής t ως

$$\begin{aligned} p(t) &= (t-t_1)^2(t-t_2)^2\cdots(t-t_k)^2 \\ &= t^{2k} + a_{2k-1}t^{2k-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \end{aligned}$$

όπου $a_0, a_1,\dots,a_{2k-1} \in \mathbb{R}$, και το υπερεπίπεδο

$$\begin{aligned} H = \{(x_1,\dots,x_d):\quad & a_1\cdot x_1 + \cdots + a_{2k-1}\cdot x_{2k-1} + a_{2k}\cdot x_{2k} \\ & + 0\cdot x_{2k+1} + \cdots + 0\cdot x_d = -a_0\}. \end{aligned}$$

Επειδή $p(t) \ge 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και επίσης $p(t) = 0$ τότε και μόνο τότε εάν $t \in \{t_1,\dots t_k\}$, το H είναι φέρον υπερεπίπεδο του $C_d(n)$ και η

$$\operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k\} = C_d(n) \cap H$$

είναι $(k-1)$-έδρα του $C_d(n)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 το $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k\}$ είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο και άρα η $\operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k\}$ είναι $(k-1)$-simplex. Το ότι τα $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ αποτελούν τις κορυφές του $C_d(n)$ προκύπτει από το αποτέλεσμα που μόλις αποδείχτηκε στην περίπτωση $k = 1$. $\square$

[1] όπου $[\cdot]$ το ακέραιο μέρος ενός αριθμού

Πόρισμα 2.4. *Το πλήθος* f_{k-1} *των* $(k-1)$*-εδρών, για* $1 \leq k \leq \left[\frac{d}{2}\right]$*, ενός* $C_d(n)$ *είναι*

$$f_{k-1}\Big(C_d(n)\Big) = \binom{n}{k}.$$

Θεώρημα 2.5 (Gale eveness condition, 1963)**.** *Έστω* W *ένα σύνολο* d *σημείων του συνόλου* V *των κορυφών ενός κυκλικού πολυτόπου* $C_d(n)$ *στον* $\mathbb{R}^d$ $(n \geq d+1)$*. Η* $\operatorname{conv}(W)$ *είναι όψη του* $C_d(n)$*, τότε και μόνο τότε, εάν κάθε δύο σημεία του* $V \backslash W$ *χωρίζονται από την καμπύλη ροπής* M_d *από άρτιο πλήθος σημείων του* W*.*

Απόδειξη. Έστω ότι το W αποτελείται από τα d σημεία $\big(t_i, t_i^2, \ldots, t_i^d\big)$, για $i = 1, \ldots, d$, και έστω το πολυώνυμο p πραγματικής μεταβλητής t

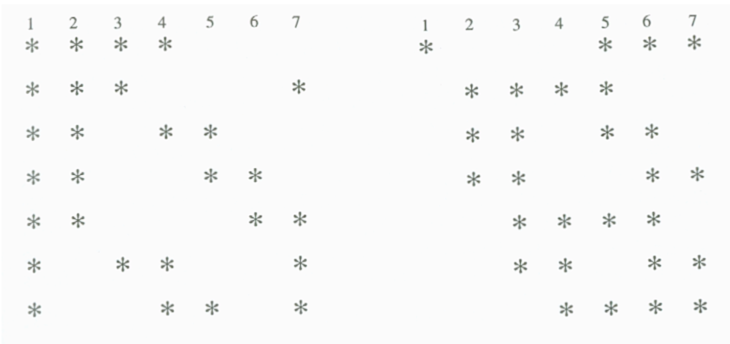
$$\begin{aligned} p(t) &= (t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_d) \\ &= t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \end{aligned}$$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$. Τότε, το υπερεπίπεδο H στον $\mathbb{R}^d$ το οποίο περιέχει το W έχει εξίσωση

$$a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{d-1}x_{d-1} + x_d = 0.$$

Η $\operatorname{conv}(W)$ θα είναι όψη του $C_d(n)$, τότε και μόνο τότε, αν το H είναι φέρον υπερεπίπεδο του $C_d(n)$. Αυτό θα ίσχυε, τότε και μόνο τότε, εάν *όλοι* οι αριθμοί $p(t)$, όπου t τέτοιο ώστε $(t, t^2, \ldots, t^d) \in V \backslash W$, είχαν το ίδιο πρόσημο. Όπως το t παίρνει διάφορες τιμές, το πολυώνυμο p αλλάζει πρόσημο, συγκεκριμένα όταν το t περνά από τις τιμές $t_1, \ldots, t_d$. Άρα οι τιμές $p(r)$ και $p(s)$, όπου $r, s \in \mathbb{R}$ με $r \neq s$, και επιπλέον δεν ισούνται με κανένα από τους $t_1, \ldots, t_d$, θα έχουν το ίδιο πρόσημο τότε και μόνο τότε εάν άρτιο πλήθος εκ των $t_1, \ldots, t_n$ βρίσκεται μεταξύ των r και s. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι τώρα άμεση. □

Παράδειγμα 2.1. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.5 για να υπολογίσουμε το πλήθος των όψεων του κυκλικού πολύτοπου $C_4(7)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να προσδιορίσουμε πόσα υποσύνολα W με τέσσερα στοιχεία ενός πλήρως διατεταγμένου συνόλου V επτά στοιχείων υπάρχουν, και από αυτά ποια είναι τέτοια ώστε μεταξύ δύο στοχείων του $V \backslash W$ να υπάρχει άρτιος πλήθος στοιχείων του W. Η εικόνα τέτοιων υποσυνόλων W του V φαίνεται στο σχήμα 2.8, όπου το V αντιπροσωπεύεται με τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7 στην πραγματική ευθεία στη συνήθη τους διάταξη, και τα σημεία του W φαίνονται με αστερίσκους. Διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 14 τέτοια υποσύνολα και άρα το $C_4(7)$ έχει 14 όψεις. Αφού κάθε 2-έδρα του $C_4(7)$ είναι μια τομή των όψεών του, βρίσκουμε ότι το $C_4(7)$ έχει 28 2-έδρες που αντιστοιχούν στα παρακάτω υποσύνολα του V: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,6\}$, $\{1,2,7\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,7\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,4,7\}$, $\{1,5,6\}$, $\{1,5,7\}$, $\{1,6,7\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,3,6\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,4,5\}$, $\{2,5,6\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{3,4,7\}$, $\{3,5,6\}$, $\{3,5,7\}$, $\{4,5,6\}$, $\{4,5,7\}$, $\{4,6,7\}$, $\{5,6,7\}$. Δεν μας εκπλήσσει το μεγάλο πλήθος 2-εδρών, αφού είναι το αναμενόμενο μεγαλύτερο πλήθος που μπορεί να έχει ένα 4-πολύτοπο με 7 κορυφές (όπως αποδείχτηκε από το Θεώρημα του Άνω Φράγματος).



Σχήμα 2.8: Η εικόνα υποσυνόλων W του ενός πλήρως διατεταγμένου συνόλου V επτά στοιχείων, όπου το V αντιπροσωπεύεται με τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7 στην πραγματική ευθεία στη συνήθη τους διάταξη, και τα σημεία του W σημειώνονται με αστερίσκους.

Θεώρημα 2.6. *Το κυκλικό πολύτοπο $C_d(n)$ στον $\mathbb{R}^d$ $(n \geq d+1)$ έχει*

$$\binom{n-\left[\frac{d+1}{2}\right]}{n-d}+\binom{n-\left[\frac{d+2}{2}\right]}{n-d}$$

όψεις.

(Η απόδειξη γίνεται με τη βοήθεια του Gale eveness condition, Θεώρημα 2.5.)

Επειδή στο πρόβλημα του Άνω Φράγματος το μέγιστο θα πρέπει να αναζητηθεί σε πολύτοπα στα οποία κάθε σύνολο κορυφών παράγει έδρες, ο επόμενος ορισμός είναι αναγκαίος και προκύπτει φυσιολογικά.

Ορισμός 2.7 (Γειτονικά d-πολύτοπα)**.** Έστω φυσικός αριθμός $k > 0$ και P ένα d-πολύτοπο του $\mathbb{R}^d$. Το P θα λέγεται k-*γειτονικό*, αν κάθε υποσύνολο του συνόλου των κορυφών του, έστω V, που αποτελείται από k σημεία, προσδιορίζει μια έδρα $F = \text{conv}\,(V)$ του P, τέτοια ώστε, $V = \text{vert}\,(F)$.

Το P θα λέγεται *γειτονικό* αν είναι $\left[\frac{d}{2}\right]$-γειτονικό.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού 2.7 είναι οι ακόλουθες:

i. Κάθε d-πολύτοπο είναι 1-γειτονικό, αν $d \geq 1$. Ιδιαιτέρως, τα 3-πολύτοπα είναι γειτονικά ($\left[\frac{3}{2}\right] = 1$).
ii. Κάθε d-simplex είναι k-γειτονικό για κάθε k με $1 \leq k \leq d$. Προφανώς, δεν υπάρχει d-πολύτοπο που να είναι k-γειτονικό αν $k > d$.
iii. Κάθε d-γειτονικό είναι προφανώς simplex.

Υπάρχουν γειτονικά d-πολύτοπα με πλήθος κορυφών $n > d+1$; Η κατασκευή του Καραθεοδωρή (1907, 1911) έδωσε στον Gale (1963) πληθώρα γειτονικών πολυτόπων με τυχαίο πλήθος κορυφών για οποιοδήποτε d.

Θεώρημα 2.7. *Το κυκλικό πολύτοπο $C_d(n)$ με $n \geq d+1 \geq 3$ είναι γειτονικό.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3 έχουμε ότι το κυκλικό πολύτοπο $C_d(n)$ με $n \geq d+1 \geq 3$ είναι $\left[\frac{d}{2}\right]$-γειτονικό. □

Θεώρημα 2.8. *Έστω P ένα k-γειτονικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$, $k < d$. Τότε κάθε σύνολο k κορυφών του P είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο και κάθε $(k-1)$-έδρα του P είναι ένα $(k-1)$-simplex.*

Απόδειξη. Έστω k κορυφές $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ του P οι οποίες είναι συσχετισμένα εξαρτημένες, έστω $\mathbf{v}_k \in \text{aff}\,\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$. Αφού το P έχει περισσότερες από k κορυφές, τότε υπάρχει μια κορυφή $\mathbf{v}_0$ του P διαφορετική από τις $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Όμως το P είναι k-γειτονικό και άρα η $F = \text{conv}\,\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ είναι μια έδρα του P με $\{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\} = \text{vert}\,(F)$, με $\mathbf{v}_k \in \text{aff}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\} \subseteq \text{aff}\,(F)$ και $\mathbf{v}_k \in \text{vert}\,(P)$. Άρα $\mathbf{v}_k \in \text{vert}\,(F) = \{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, κάθε σύνολο k κορυφών του P είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο. □

Πόρισμα 2.9. *Έστω P ένα k-γειτονικό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$ με n κορυφές και έστω $j \in \{1, \ldots, k\}$. Τότε το P είναι j-γειτονικό και για το πλήθος των $(j-1)$-εδρών του P ισχύει ότι*

$$f_{j-1}(P) = \binom{n}{j} \quad , \quad 1 \leq j \leq k.$$

Απόδειξη. Έστω X ένα σύνολο από j κορυφές του P. Τότε $X \subseteq W$ για κάποιο σύνολο W των k κορυφών του P. Έχουμε ότι το $\text{conv}\,(W)$ είναι simplex και επίσης έδρα του P (Θεώρημα 2.8), οπότε το $\text{conv}\,(X)$ είναι έδρα του $\text{conv}\,(W)$ και άρα και του P. Αυτό δείχνει ότι το P είναι j-γειτονικό.

Από το γεγονός ότι το P είναι j-γειτονικό και το Θεώρημα 2.8 συμπεραίνουμε ότι το P έχει τόσες $(j-1)$-έδρες όσοι είναι οι τρόποι να επιλέξουμε ένα σύνολο j σημείων από n σημεία, δηλαδή $\binom{n}{j}$. □

Θεώρημα 2.10. *Έστω P ένα d-πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$, το οποίο είναι k-γειτονικό για κάποιο k με $k > \left[\frac{d}{2}\right]$. Τότε το P είναι d-simplex.*

Απόδειξη. Έστω ότι το P *δεν* είναι d-simplex. Τότε το σύνολο των κορυφών V του P πρέπει να περιέχει κάποιο υποσύνολο W $d+2$ σημείων. Από το Θεώρημα του Radon το W μπορεί να χωριστεί σε δύο μη κενά υποσύνολα X και Y τέτοια ώστε

$$W = X \cup Y, \;\; X \cap Y = \emptyset,$$

και

$$(\text{conv}\,(X)) \cap (\text{conv}\,(Y)) \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Ένα εκ των X και Y, έστω το X δεν έχει περισσότερα από $\left[\frac{d}{2}\right] + 1$ σημεία. Επειδή $\left[\frac{d}{2}\right] + 1 \leq k$, σύμφωνα με το Πόρισμα 2.9, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\text{conv}\,(X)$ είναι μια έδρα του P και άρα $\text{aff}\,(X) \cap (\text{conv}\,(V \backslash X)) = \emptyset$. Όμως,

$$(\text{conv}\,(X)) \cap (\text{conv}\,(Y)) \subseteq (\text{aff}\,(X)) \cap (\text{conv}\,(V \backslash X)) = \emptyset,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση (2.1). Άρα το P είναι d-simplex. □

Πόρισμα 2.11. *Έστω P γειτονικό πολύτοπο.*

1. *Εάν το P είναι $2d$-πολύτοπο, τότε το P είναι simplicial.*
2. *Υπάρχει $(2d+1)$-πολύτοπο P που δεν είναι simplicial (για κάθε $d \geq 1$).*

Απόδειξη.

1. Έστω F μια όψη του P. Τότε η F είναι d-γειτονικό $(2d-1)$-πολύτοπο και αφού $d > \left[\frac{2d-1}{2}\right]$, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.10 έχουμε ότι η F είναι simplex. Άρα το P είναι simplicial.
2. Θεωρούμε ένα κυκλικό $2d$-πολύτοπο K στον $\mathbb{R}^{2d}$ που δεν είναι simplex (δηλαδή με κορυφές $n > 2d+1$) και το τοποθετούμε στον $\mathbb{R}^{2d+1}$ στο επίπεδο $x_{2d+1} = 0$. Το πολύτοπο (πυραμίδα) P με βάση το K και κορυφή το e_{2d+1} είναι $\left[\frac{2d+1}{2}\right]$, δηλαδή d-γειτονικό (το K είναι d-γειτονικό και οι υπόλοιπες έδρες του P είναι simplices), αλλά δεν είναι simplicial (η όψη K δεν είναι simplex).

□

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι το εξής: Ποια η σχέση μεταξύ κυκλικών και γειτονικών πολυτόπων;

Όπως είδαμε: Κάθε $C_d(n)$ κυκλικό πολύτοπο με $n \geq d+1 \geq 3$ είναι γειτονικό. Τα $C_d(n)$ είναι πάντοτε simplicial πολύτοπα, αλλά ένα γειτονικό δεν είναι κατ' ανάγκην simplicial (Πόρισμα 2.11). Οπότε η σχέση (αν υπάρχει) θα είναι μεταξύ των κυκλικών πολυτόπων και των simplicial γειτονικών πολυτόπων.

Στην περίπτωση όπου έχουμε "λίγες κορυφές" υπάρχει το εξής:

Θεώρημα 2.12. *Έστω P πολύτοπο με n κορυφές, όπου $n \leq 2d+3$. Εάν το P είναι simplicial $(2d+1)$-πολύτοπο ή το P είναι $2d$-πολύτοπο, τότε το P είναι κυκλικό, αν και μόνο αν το P είναι γειτονικό.*

Υπάρχει παράδειγμα γειτονικού (simplicial) 4-πολυτόπου με $n = 8$ που *δεν* είναι κυκλικό!

Η έρευνα για να δοθούν επιπλέον ιδιότητες στα simpilcial γειτονικά πολύτοπα, ώστε να ταυτίζονται με τα κυκλικά, συνεχίζεται.

3 Το Θεώρημα του άνω φράγματος για πολύτοπα κάθε διάστασης (The upper bound theorem for polytopes)

Ένα ερώτημα που απασχόλησε τις τελευταίες δεκαετίες τους ασχολούμενους με την Συνδυαστική Θεωρία των κυρτών πολυέδρων[2] μαθηματικούς είναι:

> "Ποιο d-πολύτοπο με $n \geq d+1$ κορυφές έχει το μέγιστο πλήθος k-εδρών για κάθε k με $1 \leq k \leq d-1$;"

Το 1957 ο Motzkin διατύπωσε την ακόλουθη *εικασία του άνω φράγματος*:

> "Για κάθε k, με $1 \leq k \leq d-1$, τα κυκλικά d-πολύτοπα με n κορυφές $C_d(n)$, με $n \geq d+1$, έχουν το μέγιστο πλήθος k-εδρών ανάμεσα σε όλα τα d-πολύτοπα με n κορυφές."

Ο Gale το 1963 απέδειξε ότι για ένα κυκλικό d-πολύτοπο με n-κορυφές, το συνολικό πλήθος των όψεων $(k = d-1)$ είναι:

$$f_{d-1} = \binom{n - \left[\frac{d+1}{2}\right]}{n-d} + \binom{n - \left[\frac{d+2}{2}\right]}{n-d}.$$

Έγιναν πολλές προσπάθειες για να αποδειχτεί η εικασία του άνω φράγματος, με αξιολογότερες αυτές των Gale και Grünbaum.

Οι P. McMullen, G.C. Shephard, J.E. Reeve και A.A. Ball έδιναν σειρά διαλέξεων σε σεμινάριο του Πανεπιστημίου East Anglia, Norwich (1968-1970), βασισμένες στο βιβλίο "Convex Polytopes" του Branko Grünbaum. Στο βιβλίο αυτό υπήρχε η απόδειξη της εικασίας για $d \leq 8$ και για πολύτοπα που έχουν "λίγες κορυφές", π.χ. $n \leq d+3$, όπου d η διάσταση του πολυτόπου P και n το πλήθος των κορυφών του. Κατά τη διάρκεια των σεμιναρίων έδωσαν διαφορετικές και απλούστερες αποδείξεις σε θεωρήματα του βιβλίου που ακολουθούσαν. Αποφάσισαν να τυπώσουν τις σημειώσεις τους και ενώ αυτές βρίσκονταν στο τυπογραφείο ο Peter McMullen, τον Ιούλιο του 1970, απέδειξε πλήρως το Θεώρημα του Άνω Φράγματος, αφού είχαν προηγηθεί αποδείξεις για ειδικές περιπτώσεις κατά τη διάρκεια του σεμιναρίου. Για την

[2] Η συνδυαστική θεωρία των κυρτών πολυέδρων, μπορεί να περιγραφεί ως η μελέτη των πλεγμάτων των εδρών ενός πολυτόπου (face-lattice).

απόδειξη χρησιμοποίησε την ιδιότητα της "shellability" (αποφλοίωσης) ενός d-πολυτόπου, τις εξισώσεις Dehn-Sommerville και όρισε το **h**-διάνυσμα που αποτέλεσε το νέο στοιχείο στη θεωρία των πολυτόπων.

Οι Bruggesser και Mani, επίσης το 1970, είχαν αποδείξει ότι κάθε d-πολύτοπο είναι shellable, δηλαδή μπορεί να αποφλοιωθεί.

Για να προσεγγίσουμε το Θεώρημα του Άνω Φράγματος θα αναφερθούμε κατ' αρχάς στην αποφλοίωση.

3.1 Αποφλοιώσιμα συμπλέγματα
Η αποφλοίωση των πολυτόπων

Η έννοια της αποφλοίωσης ενός πολυτόπου P προήλθε από την προσπάθεια να βρεθεί μια επαγωγική απόδειξη για τον τύπο του Euler-Poincaré, σε κάθε διάσταση.

Ο τύπος του Euler γενικεύτηκε για οποιαδήποτε διάσταση από τον Schläfli το 1852, αλλά η πρώτη σωστή απόδειξη έγινε το 1893 από τον Poincaré με χρήση Αλγεβρικής Τοπολογίας. Χρησιμοποιώντας το **f**-διάνυσμα και το γεγονός ότι $f_{-1} = 1$, $f_d = 1$, ο τύπος του Euler παίρνει την κομψή μορφή:

$$\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j f_j = 1-(-1)^d \iff \sum_{j=0}^{d}(-1)^j f_j = 1 \iff \sum_{j=-1}^{d}(-1)^j f_j = 0.$$

Παρατηρήθηκε ότι όλες οι γνωστές αποδείξεις, υπέθεταν ότι το σύνορο ενός πολυτόπου μπορεί να δομηθεί επαγωγικά με έναν "όμορφο" τρόπο, που ονομάστηκε αποφλοίωση. Ουσιαστικά η αποφλοίωση είναι η ιδιότητα που έχουν κάποια πολυτοπικά συμπλέγματα και όλα τα πολύτοπα (όπως απέδειξαν το 1970 οι Mani και Bruggesser), ώστε να υπάρχει κάποιος τρόπος διάταξης των όψεών του (shelling) που ικανοποιεί κάποιες συνθήκες.

Ορισμός 3.1. Μια πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{C}$ πολυέδρων (πολυτόπων) του $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται *πολυεδρικό (πολυτοπικό) σύμπλεγμα* όταν:

i. Το κενό πολύεδρο (πολύτοπο) ανήκει στη συλλογή $\mathcal{C}$.
ii. Αν $P \in \mathcal{C}$, τότε όλες οι έδρες του P ανήκουν στη συλλογή $\mathcal{C}$.
iii. Αν $P, Q \in \mathcal{C}$, τότε η τομή $P \cap Q$ είναι έδρα του P *και* του Q.

Η διάσταση $\dim(\mathcal{C})$ της $\mathcal{C}$, είναι η μεγαλύτερη διάσταση ενός πολυέδρου (πολυτόπου) της συλλογής. Το **f**-διάνυσμα ενός d-πολυεδρικού (πολυτοπικού) συμπλέγματος $\mathcal{C}$ είναι το διάνυσμα:

$$\mathbf{f}(\mathcal{C}) = (f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{N}^{d+2},$$

όπου $f_k = f_k(\mathcal{C})$, $k = 0, 1, \ldots, d-1$, είναι το πλήθος των k-εδρών του $\mathcal{C}$, f_d το πλήθος των d πολυέδρων (πολυτόπων) του $\mathcal{C}$ και $f_{-1} = 1$.

Ορισμός 3.2. Ένα πολυτοπικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ ονομάζεται *αγνό*, αν κάθε μια από τις έδρες περιέχεται σε μια έδρα διάστασης $\dim(\mathcal{C})$, δηλαδή, αν όλες οι μεγιστικές έδρες του $\mathcal{C}$, δηλαδή οι όψεις του, έχουν την ίδια διάσταση. Το *βασικό σύνολο του* $\mathcal{C}$ είναι η ένωση όλων των εδρών του,

$$|\,\mathcal{C}\,| = \bigcup_{F \in \mathcal{C}} F.$$

Ο ορισμός της αποφλοίωσης είναι επαγωγικός στη διάσταση. Κατ' αρχάς θεωρούμε ότι κάθε αγνό πολυεδρικό σύμπλεγμα 0-διάστασης είναι αποφλοιώσιμο.

Ορισμός 3.3 (Αποφλοίωση)**.** Έστω ένα αγνό πολυεδρικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ d-διάστασης $(d \geq 1)$. Μια *αποφλοίωση* του $\mathcal{C}$ είναι μια ακολουθία, $F_1, \ldots, F_s$, των όψεων του, έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$i.$ Το συνοριακό πλέγμα $\mathcal{C}(\partial F_1)$ της πρώτης όψης F_1 δέχεται αποφλοίωση.
$ii.$ Για κάθε j, με $1 < j \leq s$, η τομή της όψης F_j με τις προηγούμενες όψεις είναι μη κενή έδρα και αποτελεί το αρχικό τμήμα μιας αποφλοίωσης, για το $(d-1)$-διάστασης συνοριακό σύμπλεγμα της F_j, δηλαδή

$$F_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-i} F_i) = G_1 \cup \cdots \cup G_\tau,$$

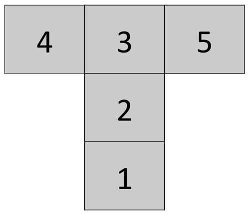
για κάποια αποφλοίωση $G_1, \ldots, G_\tau, \ldots, G_t$ του $\mathcal{C}(\partial F_j)$ με $1 \leq \tau \leq t$. Καθώς η τομή πρέπει να αποτελεί το αρχικό τμήμα μιας αποφλοίωσης για το $(d-1)$-διάστασης σύμπλεγμα, το ∂F_j θα πρέπει να είναι αγνό $(d-1)$-διάστασης και συνεκτικό για $d > 1$.

Ένα αγνό πολυεδρικό σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ καλείται *αποφλοιώσιμο*, εάν δέχεται μια αποφλοίωση.

Παραδείγματα αποφλοιώσιμων συμπλεγμάτων

1. Από τον ορισμό προκύπτει ότι κάθε 0-διάστασης σύμπλεγμα είναι αποφλοιώσιμο.

2. Ένα 1-διάστασης σύμπλεγμα είναι αποφλοιώσιμο, μόνο αν είναι συνεκτικό, δηλαδή χωρίς μεμονωμένες κορυφές.



Σχήμα 3.9: Ένα αποφλοιώσιμο σύμπλεγμα δύο διαστάσεων.

Παραδείγματα μη αποφλοιώσιμων συμπλεγμάτων

1. Στο σχήμα 3.10 (α) η τομή των όψεων είναι μια κορυφή, δηλαδή 0-διάστασης σύμπλεγμα, ενώ θα έπρεπε αφού το σύμπλεγμα είναι 2-διάστασης, να είναι 1-διάστασης.

2. Στο σχήμα 3.10 (β) η τομή της όψης 8 με την ένωση των προηγουμένων είναι μη συνεκτικό σύμπλεγμα.

(α) (β)

Σχήμα 3.10: Μη αποφλοιώσιμα συμπλέγματα

Πρόταση 3.1. Αν P είναι ένα d-πολύτοπο και $F_1, \ldots, F_s$ είναι μια αποφλοίωση του, τότε η αντίστροφη ακολουθία $F_s, \ldots, F_1$ είναι επίσης μια αποφλοίωση για το P.

Η πιο πάνω πρόταση δεν ισχύει για οποιαδήποτε πολυτοπικά συμπλέγματα, όπως για παράδειγμα για το πολυτοπικό σύμπλεγμα του σχήματος 3.9. Η ακολουθία των όψεων 1, 2, 3, 4, 5, είναι μια αποφλοίωση για το πολυτοπικό σύμπλεγμα, αλλά η αντίστροφη 5, 4, 3, 2, 1, δεν αποτελεί αποφλοίωση καθώς η τομή της όψης 4 με την προηγούμενή της όψη 5 είναι το κενό πολύτοπο.

Πρόταση 3.2. Για ένα πολύτοπο P ισχύουν:

i. Αν F, F' δύο όψεις του P, θα υπάρχει μια αποφλοίωση του P, τέτοια ώστε η F να έρχεται πρώτη στη σειρά και η F' τελευταία.
ii. Για κάθε κορυφή v του P, υπάρχει αποφλοίωση του P, στην οποία οι όψεις που περιέχουν την κορυφή v να σχηματίζουν το αρχικό τμήμα της αποφλοίωσης.

Το ακόλουθο Θεώρημα των Bruggesser και Mani (1970) απέδειξε και τη βασική ιδιότητα της αποφλοίωσης για τυχαίο d-πολύτοπο. Η απόδειξη έχει απλουστευθεί από πολλούς (π.χ. Jean Gallier).

Θεώρημα 3.1. *Κάθε d-πολύτοπο P είναι αποφλοιώσιμο.*

Απόδειξη. Κάθε πολύτοπο έχει ένα "line shelling" (γραμμική αποφλοίωση) η οποία μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Έστω $\mathbf{c}$ ένα σημείο που ανήκει στο εσωτερικό του P. Επιλέγουμε μια ευθεία ℓ που να διέρχεται από το $\mathbf{c}$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

i. η ευθεία ℓ να τέμνει κάθε υπερεπίπεδο που περιέχει τις όψεις του P,
ii. η ευθεία ℓ να μην τέμνει την τομή κάθε δύο υπερεπιπέδων που περιέχουν δύο όψεις του P (σχήματα 3.11 (α) και 3.11 (β)).

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρούμε ότι $\ell = \{\lambda\mathbf{c},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, όπου το $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ είναι εσωτερικό σημείο του P και

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m\},$$

με

$$F_i = \{\mathbf{x} \in P : \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 1\}, \quad i = 1, \dots, m$$

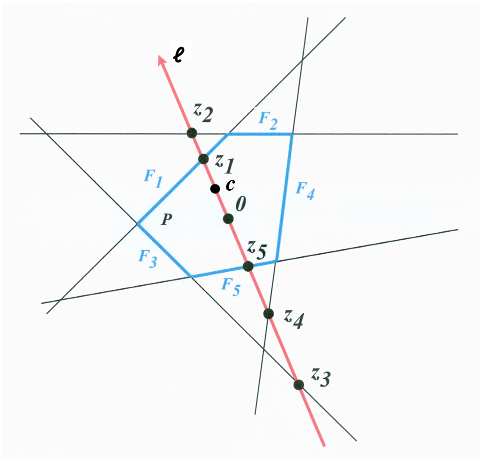
τις όψεις του P.

Η ευθεία ℓ τέμνει κάθε υπερεπίπεδο $\operatorname{aff}(F_i)$ σε σημείο $\mathbf{z}_i = \lambda_i\,\mathbf{c}$, $(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{z}_i = 1)$ για κάποιο $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, m$. Διατάσσουμε τα $1/\lambda_i$, $i = 1, \dots, m$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι

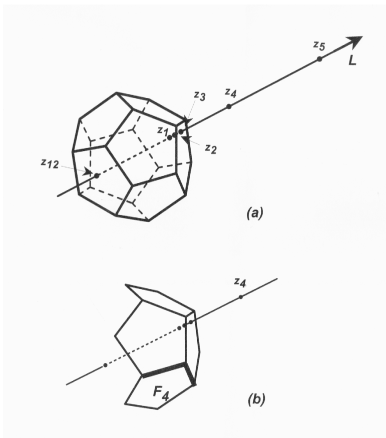
$$\frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_2} > \cdots > \frac{1}{\lambda_m}.$$

Από αυτήν την επιλογή των $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ θα έχουμε το εξής:

> Έστω ότι είμαστε σε έναν πύραυλο που βρίσκεται στην επιφάνεια ενός πλανήτη P, στο σημείο όπου η προσανατολισμένη ευθεία ℓ εγκαταλείπει τον πλανήτη, και θα κινηθεί πάνω στην ευθεία ℓ. Αυτό το σημείο $\mathbf{z}_1$ ανήκει μόνο στην όψη F_1 και στην αρχή της πτήσης η F_1 είναι η μόνη ορατή όψη από τον πύραυλο. Μετά από λίγο μια νέα όψη θα εμφανιστεί στον ορίζοντα, η F_2, καθώς ο πύραυλος διέρχεται από το $\mathbf{z}_2$ του υπερεπίπεδου $\operatorname{aff}(F_2)$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, με $\lambda \to +\infty$, θα εμφανίζονται οι όψεις



(α)

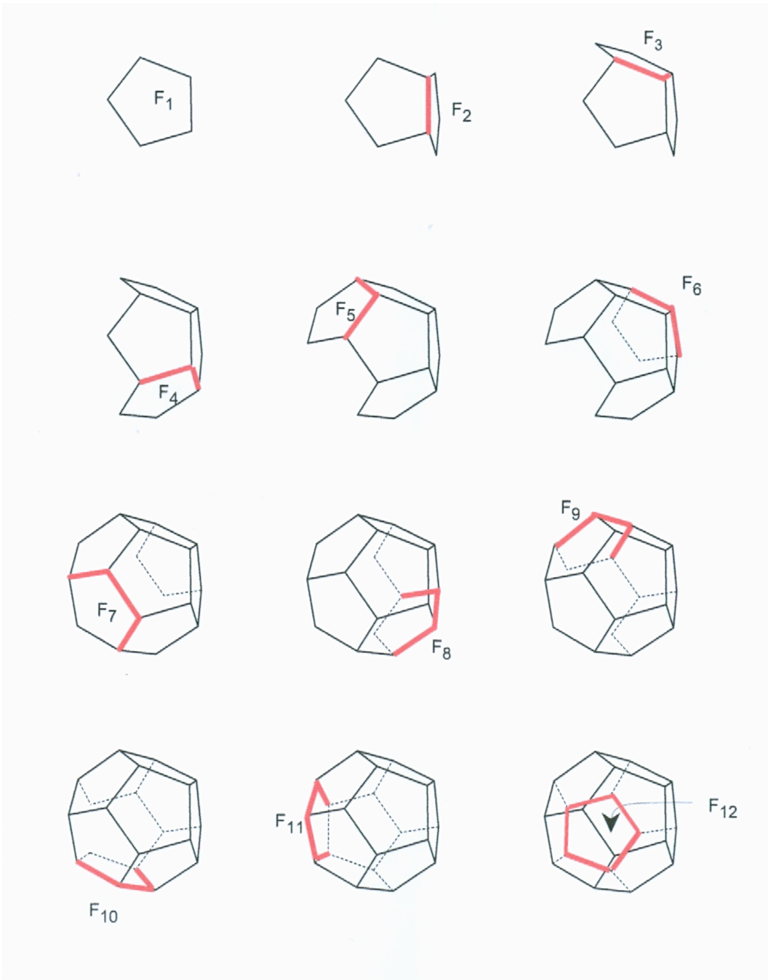


(β)

Σχήμα 3.11: Επεξήγηση στην απόδειξη του θεωρήματος 3.1.

$F_3, F_4, \ldots, F_s$ με τη σειρά που η ευθεία ℓ θα διέρχεται από τα υπερεπίπεδα $\text{aff}\,(F_3), \text{aff}\,(F_4), \ldots, \text{aff}\,(F_s)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s > 0)$. Τώρα περνάμε από το σημείο $+\infty$ και φανταζόμαστε ότι ο πύραυλος επιστρέφει στον πλανήτη από το $-\infty$. Συνεχίζουμε παίρνοντας τις όψεις με τη σειρά με την οποία διέρχεται ο πύραυλος από τα υπερεπίπεδα $\text{aff}\,(F_i)$, $i = s+1, \ldots, m$, $(\lambda_{s+1}, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_m < 0)$ (βλέπε σχήματα (α) και (β)). Για να δούμε ότι η σειρά των όψεων είναι πράγματι μια αποφλοίωση, θεωρούμε την τομή $\partial F_j \cap$

$(F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1})$ (βλέπε σχήμα 3.12).



Σχήμα 3.12: Επεξήγηση στην απόδειξη του θεωρήματος 3.1.

Αν η F_j προστίθεται πριν περάσουμε από το $+\infty$, τότε η τομή αυτής είναι ακριβώς το σύνολο εκείνων των όψεων που είναι ορατές από το σημείο $\ell \cap \mathrm{aff}(F_j) = \mathbf{z}_j$, στο οποίο η F_j εμφανίζεται στον ορίζοντα. Από επαγωγή στη διάσταση γνωρίζουμε ότι αυτή η συλλογή των όψεων F_j είναι αποφλοιώσιμη, και μπορούμε να συνεχίσουμε την αποφλοίωση όλου του ∂F_j. Ανάλογα με τις F_j, με $\lambda_j < 0$. $\square$

3.2 Το h-διάνυσμα ενός simplicial d-πολυτόπου Οι εξισώσεις Euler-Poincaré και Dehn-Sommerville με τη βοήθεια του h-διανύσματος

Ο ορισμός του **h**-διανύσματος δόθηκε από τον Peter McMullen (1970) στην προσπάθειά του να αποδείξει το Θεώρημα του Άνω Φράγματος. Το **h**-διάνυσμα ορίζεται σε simplicial d-πολύτοπα. Για τυχαία πολύτοπα υπάρχει το toric **h**-διάνυσμα του Stanley.

Καθώς το P είναι ένα d-simplicial πολύτοπο, το σύνορό του $C(\partial P)$ θα έχει διάσταση $d-1$. Έστω $V = \text{vert}\,(P)$ και $f_0(P) = n$ το πλήθος των κορυφών του P. Ταυτίζουμε μια έδρα F του P με τις κορυφές vert (F), δηλαδή ταυτίζουμε το "γεωμετρικό simplicial σύμπλεγμα $\mathcal{C}$" με το αφηρημένο simplicial σύμπλεγμα στο πεπερασμένο σύνολο V. Αφού οι όψεις του P είναι $(d-1)$-simplices (καθώς το P είναι simplicial), θα αντιστοιχούν σε υποσύνολο του V με d στοιχεία. Το σύμπλεγμα $\mathcal{C}$ είναι αγνό $(d-1)$-διάστασης και έτσι προσδιορίζεται από την οικογένεια των όψεων που τη συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$. Όλες οι υπόλοιπες έδρες στο $\mathcal{C}$ αντιστοιχούν σε υποσύνολα των όψεων της $\mathcal{F}$.

Έστω τώρα μια αποφλοίωση $F_1, F_2, \dots$ των όψεων της $\mathcal{F}$. Για κάθε όψη F_j ορίζουμε το σύνολο

$$R_j = \{v \in F_j / F_j \backslash v \subseteq F_i, \text{ για κάποιο } i,\ 1 \leq i < j\}.$$

Οι νέες έδρες G, που προστίθενται στο j βήμα (όταν η όψη F_j προστίθεται στην αποφλοίωση), είναι ακριβώς οι έδρες που ανήκουν στο σύνολο

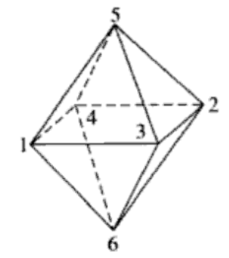
$$I_j = \{G \subseteq V / R_j \subseteq G \subseteq F_j\}.$$

Άρα δημιουργείται η διαμέριση $\{I_1, \dots, I_s\}$ του συνόλου των εδρών του simplicial συμπλέγματος στα παραπάνω τμήματα.

Έστω τώρα $h_i = |\{j / |R_j| = i, \quad 1 \leq j \leq s\}|$, για $i = 0, 1, \dots, d$, δηλαδή το $h_i = h_i(\mathcal{C})$ συμβολίζει το πλήθος των τμημάτων της διαμέρισης, των οποίων οι αντίστοιχοι περιορισμοί R_j έχουν μήκος i. Τότε ορίζεται το **h**-διάνυσμα του $\mathcal{C}$ ως εξής:

$$\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_0, h_1, \dots, h_i, \dots, h_d)\,.$$

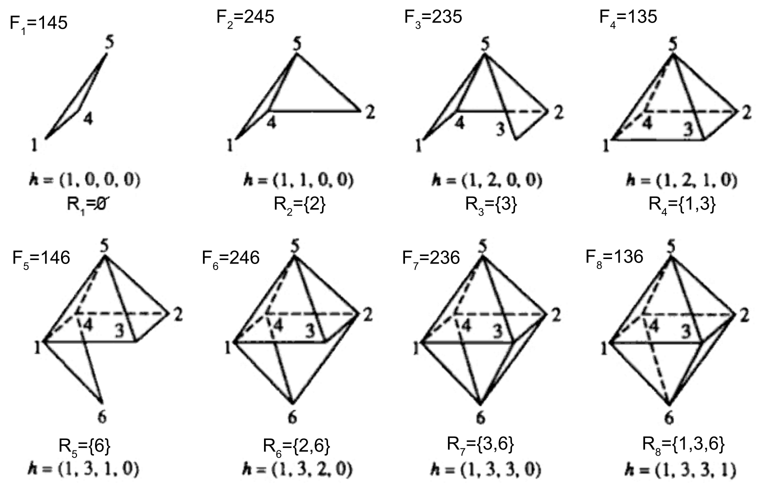
Παράδειγμα 3.1. Η αποφλοίωση του C_3^{Δ} και ο προσδιορισμός του **h**-διανύσματός του.



Σχήμα 3.13: Το πολύτοπο C_3^{Δ}.

$$\mathbf{f}\left(C_3^{\Delta}\right) = (1, 6, 12, 8)$$

Θα προσδιορισθεί το $\mathbf{h}\left(C_3^{\Delta}\right)$ με τα βήματα μιας αποφλοίωσης.



Σχήμα 3.14: Τα βήματα της αποφλοίωσης του C_3^{Δ}, $\mathbf{h}(C_3^{\Delta}) = (1, 3, 3, 1)$.

Γενικά, παρατηρούμε ότι αν $|R_j| = i$, τότε υπάρχουν ακριβώς $\binom{d-i}{k-i}$ $(k-1)$-έδρες που περιέχονται στα τμήματα I_j. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

> Το **f**-διάνυσμα ενός αποφλοιώσιμου simplicial πολυτόπου μπορεί να υπολογιστεί από το **h**-διάνυσμα.

Αναλυτικά:

$$\begin{aligned} f_{k-1} &= \sum_{j=1}^{s} \binom{d-|R_j|}{k-|R_j|} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i} h_i \\ &= h_k + \binom{d-k+1}{1} h_{k-1} + \cdots + \binom{d-1}{k-1} h_1 + \binom{d}{k} h_0, \end{aligned}$$

με $1 \leq k \leq d$. Ας σχηματίσουμε το πολυώνυμο $f(x) = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} x^{d-i}$ με $f_{-1} = 1$ και το $h(x) = \sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i}$, τότε

$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} h_i (x+1)^{d-i} = h(x+1)$$

και άρα $h(x) = f(x-1)$. Συγκρίνοντας τους συντελεστές στα δύο μέλη της σχέσης $h(x) = f(x-1)$ έχουμε

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1},$$

$h_0 = 1$, $h_1 = f_0 - d$ και $h_d = f_{d-1} - f_{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1} f_0 + (-1)^d$. Αποδεικνύεται ότι $h_k \geq 0$ για $1 \leq k \leq d$ και το **h**-διάνυσμα είναι ανεξάρτητο της αποφλοίωσης.

Μια απλή μέθοδος υπολογισμού του **h**-διανύσματος από το **f**-διάνυσμα χρησιμοποιεί το τρίγωνο του Pascal και είναι γνωστή ως "τέχνασμα του Stanley":

> Γράφουμε τους αριθμούς f_i στις τελευταίες εισόδους των γραμμών του τριγώνου, και υπολογίζουμε τις άλλες εισόδους, βρίσκοντας κάθε φορά τη διαφορά: δεξιός αριθμός - αριστερός αριθμός (για γειτονικούς αριθμούς της γραμμής), και αυτή η διαφορά τοποθετείται στην παρακάτω γραμμή:

- Έστω για κάποιο $\mathcal{C}$ ότι **f** $= (1, 6, 7)$.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & & 1 & & \mathbf{6} & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & \mathbf{7} & & \\
\hline
\mathbf{h} & = & (& 1 & & 4 & & 2 & &)
\end{array}
$$

- Για το C_3^Δ με **f**$(C_3^\Delta) = (1, 6, 12, 8)$ έχουμε:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & & 1 & & \mathbf{6} & & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & \mathbf{12} & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 7 & & \mathbf{8} & & \\
\hline
\mathbf{h} & = & (& 1 & & 3 & & 3 & & 1 & &)
\end{array}
$$

Θεώρημα 3.2 (Οι εξισώσεις Euler-Poincaré και Dehn-Sommerville)**.** *Έστω P ένα simplicial d-πολύτοπο, με* **h***-διάνυσμα:*

$$\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, \ldots, h_k, \ldots, h_d)\,.$$

Τότε $h_k = h_{d-k}$ για $k = 0, 1, \ldots, d$.

Απόδειξη. (McMullen, 1970)Έστω $F_1, \ldots, F_s$ μια αποφλοίωση του P. Αφού το P είναι πολύτοπο, η $F_s, \ldots, F_1$ θα είναι μια αποφλοίωση του P. Ακόμα, αν η όψη F_i έρχεται πριν την F_j στην αρχική αποφλοίωση, $(i < j)$, τότε στην αντίστροφη, η F_i, εμφανίζεται μετά την F_j. Άρα ο περιορισμός R_j, στην αντίστροφη αποφλοίωση θα είναι το $F_j \backslash R_j$, δηλαδή το συμπλήρωμα του R_j ως προς την F_j. Έτσι, αν η F_j συνεισφέρει το "1" στο h_k για την αρχική αποφλοίωση, όπου $|R_j| = k$, θα συνεισφέρει το "1" στο h_{d-k} στην αντίστροφη, όπου $|F_j \backslash R_j| = d - k$. Άρα η τιμή του h_k με την αρχική αποφλοίωση είναι ίδια με την τιμή του h_{d-k} υπολογισμένης με την αντίστροφη, και έχουμε ότι $h_k = h_{d-k}$. □

Παρατήρηση

Οι εξισώσεις Euler-Poincaré και Dehn-Sommerville αποδείχτηκαν με μεθόδους της εποχής (1927) και ήταν στη μορφή:

$$(-1)^k \binom{k+1}{k+1} f_k + (-1)^{k+1} \binom{k+2}{k+1} f_{k+1} + \cdots$$
$$+ (-1)^{d-1} \binom{(d-1)+1}{k+1} f_{d-1} = (-1)^{d-1} f_k,$$

με $k = -1, 0, 1, \ldots, d-2$. Για $k = -1$ προφανώς έχουμε τον τύπο των Euler-Poincaré. Το ανωτέρω σύστημα d εξισώσεων δεν είναι ανεξάρτητο. Αν και το σύστημα για $0 \leq k \leq d/2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο δεν μας δίνει αρκετές πληροφορίες για επίλυση προβλημάτων simplicial πολυτόπων που σχετίζονται με "μεγάλες" διαστάσεις. Παρατηρούμε την εντυπωσιακή απλοποίηση ($h_k = h_{d-k}$, $k = 0, 1, \ldots, d$) των εξισώσεων αυτών που επιτεύχθηκε με τον εμπνευσμένο ορισμό του **h**-διανύσματος.

3.3 Η διατύπωση του Θεωρήματος του Άνω Φράγματος (Upper Bound Theorem) και τα βήματα της απόδειξης

Η απάντηση στο πρόβλημα του Άνω Φράγματος διατυπώνεται ως εξής:

> Από όλα τα d-πολύτοπα με $f_0 = n$ κορυφές το αντίστοιχο κυκλικό πολύτοπο έχει το μέγιστο πλήθος k-εδρών ($1 \leq k \leq d-1$).

Αναλυτικότερα, αν P είναι ένα d-πολύτοπο με $f_0 = n$ κορυφές, τότε $f_{k-1}(P) \leq f_{k-1}(C_d(n))$. Εάν ισχύει η ισότητα για κάποιο $\left[\frac{d}{2}\right] \leq k \leq d$, τότε το P είναι γειτονικό. Τα βήματα για την απόδειξη είναι σε γενικές γραμμές τα ακόλουθα:

1. Έστω P ένα d-πολύτοπο. Οι κορυφές του P μπορούν να αναδιαταχτούν με τέτοιο τρόπο, ώστε να δημιουργηθεί ένα νέο d-πολύτοπο P' που έχει τις ίδιες κορυφές με το P και είναι simplicial, ενώ ισχύει:

$$f_{k-1}(P) \leq f_{k-1}(P') \quad \text{για κάθε } k, \quad 0 \leq k \leq d.$$

   Η ισότητα μπορεί να ισχύει για κάποιο $k > \left[\frac{d}{2}\right]$, μόνο αν το P είναι simplicial. Άρα, το μέγιστο πλήθος k-εδρών αναζητείται μεταξύ των simplicial d-πολυτόπων με $f_0 = n$ κορυφές.

2. Επειδή κάθε πολύτοπο είναι αποφλοιώσιμο, ορίζεται το **h**-διάνυσμά του, με $h_i \geq 0$.
3. Αποδεικνύεται (McMullen) επαγωγικά και με τη χρήση των εξισώσεων Dehn-Sommerville το κρίσιμο λήμμα:

   Για P simplicial d-πολύτοπο με $f_0 = n$ κορυφές έχουμε $h_k(P) \leq \binom{n-d-1+k}{k}$, $0 \leq k \leq d$. Η ισότητα ισχύει για κάθε k με $0 \leq k \leq \ell$ αν και μόνο αν το $\ell \leq \left[\frac{d}{2}\right]$ και το P είναι ℓ-γειτονικό.

4. Το $f_{k-1}(P)$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει των $h_0, \ldots, h_k$ ως:

   $$f_{k-1}(P) = \sum_{i=0}^{k} \binom{d-i}{k-i} h_i(P),$$

   οπότε προκύπτει άνω φράγμα του $f_{k-1}(P)$ και οι περιπτώσεις ισότητας από το 3.

Επιμύθιο

Ανάλογα με την εικασία του Άνω Φράγματος είχε διατυπωθεί και η εικασία του Κάτω Φράγματος για οποιοδήποτε simplicial d-πολύτοπο P. Τύχει αγαθεί ο David Barnette απέδειξε λίγους μήνες πριν από την απόδειξη του Άνω Φράγματος ότι:

$$\begin{aligned} f_k &\geq \binom{d}{k} f_0 - \binom{d+1}{k+1} k \quad \text{για} \quad 1 \leq k \leq d-2, \\ f_{d-1} &\geq (d-1) f_0 - (d+1)(d-2). \end{aligned}$$

Αν και το άνω και κάτω φράγμα ευρέθησαν, η έρευνα για το **f**-διάνυσμα d-πολυτόπου δεν σταμάτησε. Συνεχίζεται στην προσπάθεια χαρακτηρισμού του **f**-διανύσματος τυχαίου (όχι κατ' ανάγκη simplicial πολυτόπου) ή πολυτόπου με συμμετρίες. Η διερεύνηση των d-πολυτόπων κεντρίζει το ενδιαφέρον έχοντας σαν αφετηρία την προσφιλή σε όλους μας σχέση $V - E + F = 2$ του Euler για τα πολύεδρα που αντιλαμβανόμαστε συνενώνοντας την αφή με την όραση, αφήνοντας στη δύναμη του νου τις οντότητες των d πολυτόπων πέρα από τον κόσμο των αισθήσεων, για $d = 4, 5, 6, \ldots$.

Αναφορές

[1] A. Barvinok, *A course in Convexity*, Graduate Studies in Mathematics v. 54, 2002.

[2] M. M. Bayer and C. W. Lee, *Combinatorial aspects of convex polytopes*, Handbook of Convex Geometry, Proceedings of Symposium in Pure Mathematics **7** (1991), pp. 225–232.

[3] T. Bisztziczky, *Characterization of cyclic polytope*, J. Geom., **84** (2005), 30-36.

[4] A. Bondesen and A Brøndsted, *A dual proof of the upper bound conjecture for convex polytopes*, Math. Scand., **46** (1980), 95–102.

[5] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen*, Math. Ann., **64** (1907), 95–115.

[6] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen*, Rend. Circolo Mat. Palermo, **32** (1911), 193–217.

[7] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Dover, New York, 1973.

[8] P. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1995.

[9] D. Gale, *Neighborly and cyclic polytopes*, Proceedings of Symposium in Pure Mathematics, American Mathematical Symposium on Convexity **7** (1963), pp. 225–232.

[10] J. Galier, *Geometric methods and applications*, Springer-Verlag, 2006.

[11] J. Galier, *Geometric methods in Computer Science*, Lecture notes for CIS 610, Computer and Information Science, UCI, Summer Semester 2009.

[12] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, John-Wiley and Sons, London - New York - Sydney, 1967.

[13] B. Grünbaum, *Some results on the upper-bound conjecture for convex polytopes*, SIAM J. Appl. Math., **17** (1969), 1142–1149.

[14] M. Henk, J. Richter-Gebert and G. M. Ziegler, *Basic properties of convex polytopes*, in Handbook on Discrete Computational Geometry (eds J. E. Goodman and J. O'Rourke), CRC Press, (1997), pp. 243–270.

[15] P. McMullen, *The maximum number of faces of a convex polytopes*, Mathematika, **17** (1970), 179–184.

[16] P. McMullen, *On the upper-bound conjecture for convex polytopes*, J. Combinatorial Theory, **277** (1971), 187–200.

[17] P. McMullen, *The numbers of faces of simplicial polytopes*, Israel J. Math, **9** (1971), 559–570.

[18] P. McMullen and G. C. Shephard, *Convex polytopes and the upper-bound conjecture*, Cambridge University Press, 1971.

[19] I. Shemer, *Neighborly polytopes*, Israel J. Math, **43** (1982), 291–314

[20] I. Shemer, *How many cyclic subpolytopes can a non-cyclic polytope have?*, Israel J. Math, **49** (1984), 331–342.

[21] R. Webster, *Convexity*, Oxford Science Publications, 1994.

[22] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Springer-Verlag, 1995.

[23] Χ. Αθανασιάδης, *Αλγεβρική και Απαριθμητική Συνδυαστική, Τόμος Α*, Σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Άνοιξη 2009, (http://users.uoa.gr/~caath/).

[24] Λ. Ευαγγελάτου-Δάλλα, *Κυρτά σύνολα και εφαρμογές*, Σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, (http://users.uoa.gr/~ldalla/).