

# Η ΝΕΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Δρακόπουλος Β.<sup>1</sup>

Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Πανεπιστημιούπολη,  
157 71, Αθήνα  
Μέση Εκπαίδευση

Ευαγγελάτου-Δάλλα Λ.<sup>2</sup>

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Πανεπιστημιούπολη,  
157 71, Αθήνα

## Περίληψη

Όσοι έχουν προσέξει κάποια παράξενα σχήματα που κοσμούν αφίσσες, κάρτες, δίσκους, περιοδικά και βιβλία, μιλούν για ωραίες εικόνες. Οι πιο προχωρημένοι πιστεύουν ότι πρόκειται περί αφηρημένης Τέχνης προερχομένης από συγκεκριμένες εξισώσεις. Εμείς εξηγούμε με λόγια απλά τις έννοιες της Γεωμετρίας των Fractals και της Θεωρίας του Χάους. Επίσης προτείνουμε τη διδασκαλία τους στη Μέση Εκπαίδευση ώστε να τονωθεί, μέσω απτών παραδειγμάτων, το ενδιαφέρον των μαθητών και για άλλα μαθήματα του αναλυτικού προγράμματος. Στην όλη αυτή προσπάθεια η συμβολή του υπολογιστή είναι καθοριστική.

## Η γέννηση των Fractals

Σχεδιάστε μια ευθεία σε ένα κομμάτι χαρτιού. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία μας λέει ότι αυτό είναι ένα σχήμα μιας διάστασης και συγκεκριμένα του μήκους. Τώρα επεκτείνετε την ευθεία. Στρέψτε τη γύρω γύρω, πίσω, εμπρός χωρίς να διασταυρώνονται οι γραμμές, μέχρις ότου γεμίσει όλο το χαρτί. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία λέει ότι αυτό συνεχίζει να είναι γραμμή, δηλ. μια μονοδιάστατη εικόνα. Αλλά η διαίσθησή μας μας λέει ότι αν η γραμμή γεμίσει πλήρως όλο το επίπεδο του χαρτιού μας θα πρέπει να είναι διδιάστατη.

Κάπως έτσι ξεκίνησαν μια επανάσταση στα Μαθηματικά πριν από εκατό περίπου χρόνια μαθηματικοί όπως οι Georg Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), David Hilbert (1862-1943), Felix Hausdorff (1868-1942), Helge von Koch (1870-1924) και Waclaw Sierpinski (1882-1962) όταν σχεδίασαν κάποιες καμπύλες, οι οποίες ως δημιουργήματα της, αρρωστημένης για πολλούς εκείνη την εποχή, φαντασίας τους ονομάστηκαν «τέρατα», «ψυχωτικές» ακόμα και «παθολογικές». Είναι αμφίβολο αν είχε διανοηθεί κανείς ότι θα

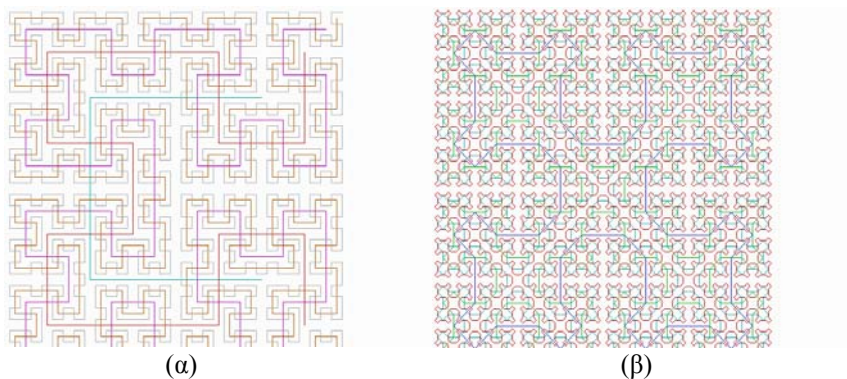
---

<sup>1</sup> E-mail: vasilios@di.uoa.gr

<sup>2</sup> E-mail: ldalla@math.uoa.gr

μπορούσε να υπάρχει στη φύση κάτι παρόμοιο μ' αυτές τις απίθανες και κομψές καμπύλες (Σχ. 1). Για το λόγο αυτό, οι ερευνητές των φυσικών επιστημών της εποχής εκείνης δεν έδειξαν το παραμικρό ενδιαφέρον για τα αντικείμενα αυτά.

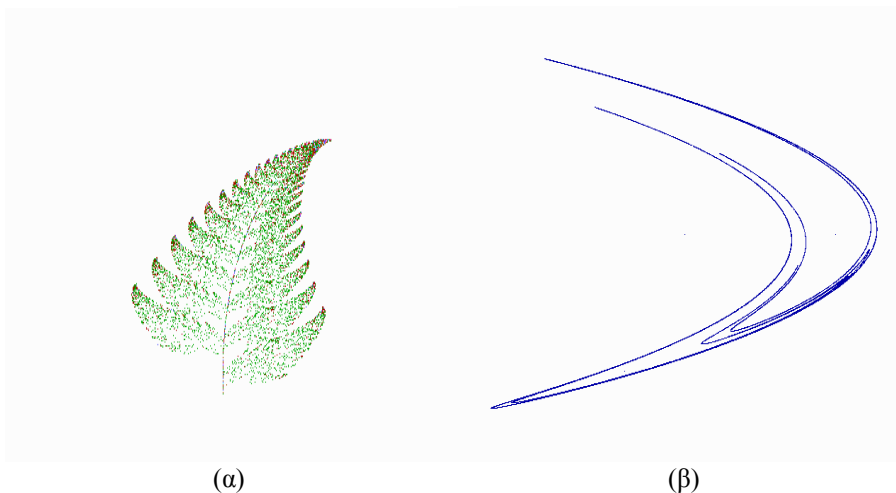
Αντιθέτως, οι μαθηματικοί που δημιούργησαν τα 'τέρατα' αυτά τα θεώρησαν σπουδαία, διότι αποτελούσαν απόδειξη ότι ο κόσμος των καθαρών Μαθηματικών περιελάμβανε έναν πλούτο δυνατοτήτων οι οποίες ξεπερνούσαν κατά πολύ τις μέχρι τότε απλούστερες δομές που είχαν παρατηρηθεί στη Φύση.



Σχήμα 1: (α) Η καμπύλη του Hilbert και (β) μία καμπύλη του Sierpinski.

### Αυτός ο κόσμος ο μικρός ο μέγας

Ένα δένδρο για κάποιον ο οποίος το παρατηρεί επιφανειακά είναι ένας κορμός με κλαδιά που φέρουν φύλλα και καρπούς. Κοινότοπο. Όπως ένα σύννεφο, ένας βράχος, μια ακτή, μία έρημος, ένας γαλαξίας: τοπία που επαναλαμβάνονται. Και όμως δεν υπάρχουν δύο όμοια δένδρα ούτε δύο όμοια σύννεφα. Ούτε υπάρχουν δύο βράχοι, δύο ακτές, δύο έρημοι, δύο γαλαξίες των οποίων η μορφή και οι διαστάσεις συμπίπτουν απολύτως.



Σχήμα 2: (α) Ένα φύλλο φτέρης και (β) η καμπύλη του Hénon (fractal διάσταση 1.26).

Ο κόσμος γύρω μας παλεύει να αναπαράγει την εικόνα του σε κάθε κλίμακα, σαν τον κορμό ενός δένδρου που απεικονίζεται σε μικρότερα αντίτυπά του πάνω σε κάθε του κλαδί. Αυτός ο φυσικός κόσμος πολλαπλασιάζεται με πείσμα, υπομονή και μνήμη του αρχετύπου, σαν ένα φύλλο φτέρης (Σχ. 2(α)) που αντιγράφει το ίδιο σχήμα σε καθένα από τα τμήματά του, όπως η ανάκλαση του ειδώλου ενός καθρέφτη μέσα στον ίδιο, χωρίς τέλος. Ακόμη όμως και αν τα φύλλα ενός δένδρου μοιάζουν με φωτοαντίγραφα του ίδιου φύλλου, στην πραγματικότητα είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Για να μη μιλήσουμε για τους χτύπους της καρδιάς, τον μεταβολισμό των κυττάρων του ήπατος, τις καταγίδες, τις παλίρροιες... Η φύση είναι πολύ πιο πολύπλοκη από ό,τι την έχουν ως τώρα περιγράψει οι επιστήμονες.

Αν η Γεωμετρία της φύσης ήταν Ευκλείδεια, θα ήταν πολύ εύκολο να αναπαραχθεί η πολυπλοκότητα κάθε τοπίου με τη βοήθεια ευθειών, τριγώνων, κώνων, κύβων, κύκλων ή σφαιρών. Θα μπορούσαμε να ζωγραφίσουμε την περιφέρεια ενός νέφους ή την κατατομή ενός βουνού, απεικονίζοντας ακόμη και τις βαθύτερες λεπτομέρειες χωρίς κανένα πρόβλημα. Όμως τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά.

### Τι είναι διάσταση;

Υπάρχουν αρκετοί ορισμοί της διάστασης, καθ' ένας εκ των οποίων βασίζεται σε εντελώς διαφορετικές ιδέες.

Ο πρώτος σχετίζεται με το πλήθος των συντεταγμένων που απαιτούνται για να προσδιοριστεί με βεβαιότητα η θέση ενός σημείου. Στο χώρο, αυτός ο αριθμός ισούται με τρία. Στο επίπεδο αρκούν δύο συντεταγμένες, ενώ σε μία ευθεία χρειάζεται μία μόνο συντεταγμένη. Με αυτήν την έννοια, ο χώρος είναι τριδιάστατος, το επίπεδο διδιάστατο και η ευθεία μονοδιάστατη. Συνεπώς, σύμφωνα μ' αυτόν τον ορισμό, η διάσταση είναι πάντοτε ακέραιος αριθμός.

Ένας δεύτερος τρόπος ορισμού της διάστασης βασίζεται στην παρατήρηση ότι για να χωρίσουμε ένα σχήμα σε ασύνδετα τμήματα, αρκεί να αφαιρέσουμε ένα σύνολο του οποίου η διάσταση είναι κατά 1 μικρότερη. Για παράδειγμα, για να χωρίσουμε μια ευθεία αφαιρούμε ένα σημείο της. Για να χωρίσουμε ένα επίπεδο σχήμα, το κόβουμε κατά μήκος κάποιας καμπύλης, ενώ ένα στερεό το χωρίζουμε κατά μία επιφάνεια. Επομένως η διάσταση μπορεί να οριστεί επαγωγικά: αντιστοιχούμε τη διάσταση 0 σ' ένα μοναδικό σημείο ή, γενικότερα, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο ή άπειρο αλλά αριθμήσιμο σύνολο. Η διάσταση οποιουδήποτε άλλου συνόλου υποθέτουμε ότι είναι μεγαλύτερη κατά 1 από τη διάσταση του συνόλου που το χωρίζει σε δύο ξένα τμήματα. Αυτή τη διάσταση την ονομάζουμε *επαγωγική* ή *τοπολογική* και είναι πάντοτε ακέραιος αριθμός.

Ένας τρίτος ορισμός της διάστασης προκύπτει ως μέτρο για το σχετικό βαθμό πολλαπλότητας και 'τραχύτητας' ενός σχήματος, ο οποίος σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από την

*Ευκλείδεια διάσταση* του αντίστοιχου χώρου όπου βρίσκεται το σχήμα. Η διάσταση αυτή μπορεί να είναι μη ακέραιος πραγματικός αριθμός και ονομάζεται *Hausdorff-Besicovitch* ή *fractal διάσταση*. Για παράδειγμα, η αρχική μας κατασκευή με την γραμμή η οποία όλο και πυκνώνει για να γεμίσει το επίπεδο του χαρτιού μας έχει Hausdorff-Besicovitch διάσταση κάπου ανάμεσα στο 1 και το 2. Όσο περισσότερο ‘γεμίζει’ το χαρτί μας με γραμμές, τόσο πιο κοντά στο 2 βρίσκεται η διάσταση της γραμμής μας. Αντιστοίχως, στο χώρο θα είχαμε απεικονίσεις των οποίων η Hausdorff-Besicovitch διάσταση βρίσκεται μεταξύ 2 και 3.

Η fractal διάσταση είναι ένα σημαντικότατο και, πολλές φορές, μετρήσιμο μέγεθος των φυσικών συστημάτων (Σχ. 2(β)). Επί πλέον, μπορούμε να την υπολογίσουμε μέσω διαφόρων θεωρητικών μοντέλων.

## Η έννοια και η χρησιμότητα των Fractals

Εδώ και αρκετά χρόνια είναι γνωστό το πρόβλημα της μέτρησης του μήκους των ακτών και των συνόρων μεταξύ χωρών, ιδιαίτερα τότε, όταν θελήσουμε να λάβουμε υπόψη μας κατά τη μέτρηση και το πιο μικρό πετραδάκι. Στην προκειμένη περίπτωση η περίμετρος δεν μπορεί να υπολογισθεί επειδή, λόγω των πάρα πολλών γωνιών και ακμών, η διαδικασία μέτρησης απαιτεί ‘άπειρο’ χρόνο. Με άλλα λόγια, κάθε φορά που κατά τη μέτρηση λαμβάνουμε μικρότερη μονάδα μήκους (π.χ. km, m, dm, cm, mm, κ.ο.κ) βρίσκουμε όλο και μεγαλύτερο αριθμό.

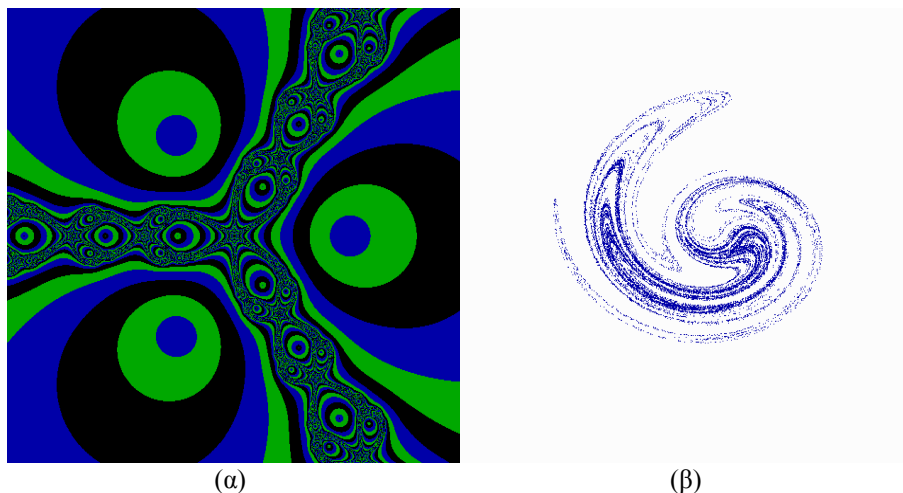
Μια νέα αντίληψη για τη Φύση εισήγαγε ο Γάλλος, πολωνικής καταγωγής, μαθηματικός Benoit Mandelbrot, ο οποίος ζει σήμερα στις Η.Π.Α. Το πρώτο του βιβλίο που εκδόθηκε το 1975 στα γαλλικά και το 1977 στα αγγλικά, συγκέντρωνε πολλά μαθηματικά και φυσικά παραδείγματα και τα κατέστησε κοινό κτήμα των επιστημόνων όλου του κόσμου. Η μεγαλύτερη όμως επιτυχία του ήταν ότι τα συνέδεσε και επινόησε ένα όνομα για όλα αυτά.

Τα αντικείμενα που έχουν μη ακέραιη διάσταση - ή μάλλον, τα αντικείμενα των οποίων η Hausdorff-Besicovitch διάστασή τους είναι γνησίως μεγαλύτερη της τοπολογικής τους διάστασης - ονομάστηκαν από τον Mandelbrot *Fractals*. Η λέξη προέρχεται από τη λατινική λέξη fractus που σημαίνει σπασμένος, κομματιασμένος, θραυσμένος. Δόκιμος όρος στην ελληνική γλώσσα δεν υπάρχει. Πολλές φορές αποδίδονται ως Μορφοκλασματικά, Πολυσχιδή ή Κλασματικά σύνολα.

Σύμφωνα λοιπόν με τη θεωρία των Fractals, η φράση της Γεωγραφίας “το μήκος των ακτών μιας περιοχής είναι τόσα χιλιόμετρα” είναι λανθασμένη, ενώ η φράση “το εμβαδόν της ίδιας περιοχής είναι τόσα τετραγωνικά χιλιόμετρα” συνεχίζει να είναι σωστή! Αυτό μας δείχνει ότι η έννοια του μήκους μιας fractal καμπύλης δεν έχει ιδιαίτερο νόημα.

Δύο σχήματα ονομάζονται *όμοια* αν το ένα από τα δύο είναι αντίγραφο του άλλου σε μεγέθυνση ή σε σμίκρυνση. Ένα Fractal καθορίζεται επίσης από το γεγονός της *αυτοομοιότητας*, δηλ. ότι ακόμα και στην απείρως μεγάλη μεγέθυνσή του, προκύπτει ένα όμοιο με αυτό

σχήμα. Το γεγονός αυτό εμπεριέχει την έννοια της ‘αναδρομής’, οπότε ο υπολογιστής παίζει εδώ το ρόλο μιας συσκευής, όπως το μικροσκόπιο για τον γιατρό ή το τηλεσκόπιο για τον αστρονόμο. Βεβαίως, κάθε υπολογιστής έχει στη διάθεσή του ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών έτσι, μετά από μεγάλο πλήθος επαναλήψεων, το σφάλμα στρογγύλευσης επηρεάζει τόσο πολύ τον υπολογισμό, ώστε το αποτέλεσμα είναι σχεδόν άχρηστο.



Σχήμα 3: (α) Μία καμπύλη Newton και (β) ύπαρξη χάους σε Δυναμικό Σύστημα.

Η κυριότερη διαδικασία η οποία ακολουθείται κατά τη δημιουργία τέτοιων ειδών Fractals είναι η ‘επανάληψη’ ή η, συνώνυμη προς αυτή, ‘ανάδραση’. Πρόκειται περί επαναληπτικής διαδικασίας η οποία παρομοιάζεται με μια ανακυκλούμενη μηχανή αποτελούμενη από τρεις μονάδες, Εισαγωγής - Επεξεργασίας - Εξαγωγής, που συναντάται και στη θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων (Σχ. 3(α)). Ένα Δυναμικό Σύστημα είναι γενικώς ένα σύνολο στοιχείων μαζί με τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους.

Ο Mandelbrot ισχυρίζεται ότι, όπως τα σχήματα της παραδοσιακής γεωμετρίας είναι ο φυσικός τρόπος αναπαράστασης ανθρώπινων κατασκευασμάτων, έτσι και οι fractal καμπύλες είναι ο φυσικός τρόπος αναπαράστασης αντικειμένων που εμφανίζονται στη Φύση, όπως παράλια, αλπικά τοπία, δένδρα. Έτσι τα Fractals έχουν διπλή αξία, ως καλλιτεχνικά αντικείμενα και ως ένας τρόπος αναπαράστασης φυσικών σκηνών.

Περαιτέρω, τα Fractals εμφανίζονται εκ του φυσικού στις εκφράσεις μαθηματικών φαινομένων όπως στην πρόβλεψη καιρικών συστημάτων και στην αύξηση ή μείωση των πληθυσμών, σε κολλοειδή εναπόθετα (λ.χ. σε αυτά που δημιουργούνται από σκόνη ή αιθάλη) καθώς και σε πολυμερή, ηλεκτροχημικά μίγματα και σε ενσωματώσεις ελεγχόμενες από διάχυση. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη Βιολογία, Γεωγραφία και ιδιαιτέρως στις τηλεπικοινωνίες ως μέσο συμπίεσης εικόνων για τη μετάδοση και ανακατασκευή τους. Επίσης fractal μορφές

διέπουν τα σώματα ζωντανών οργανισμών, δίνοντας το σχήμα των αγγειακών και νευρικών συστημάτων. Μέχρι και στην κατανομή των αστερών και των γαλαξιών στο σύμπαν συναντάται η μορφή τους.

Στη Φύση είναι πλέον κοινή πεποίθηση των ειδικών ότι τα πάντα είναι Fractals, διότι λείες γραμμές και επιφάνειες υπάρχουν μόνο στον ιδεατό κόσμο των Μαθηματικών.

## Η Τάξη και το Χάος

Θεωρητικώς, το μέλλον καθορίζεται πλήρως από το παρελθόν. Στην πράξη όμως υπάρχουν μικρές αβεβαιότητες, όπως είναι τα πολύ μικρά σφάλματα που γίνονται σε μετρήσεις, σφάλματα τα οποία όταν υπεισέρχονται στους υπολογισμούς γίνονται στη συνέχεια ολοένα και μεγαλύτερα με αποτέλεσμα, μολονότι η συμπεριφορά του υπό μελέτη φαινομένου βραχυπρόθεσμα είναι προβλέψιμη, δηλ. *αιτιοκρατική*, καθίσταται μακροπρόθεσμα μη προβλέψιμη, δηλ. *χαώδης* (Σχ. 3(β)).

Σκοπός της ερευνητικής περιοχής του *Χάους*, είναι γενικώς η προσπάθεια εξήγησης της πορείας μετάβασης από την *Τάξη* προς αυτό και αντιστρόφως. Η έννοια του Χάους συνδέεται άμεσα με την έννοια της προβλεπτικότητας: από παρόμοιες αρχικές υποθέσεις μπορούν να προκύψουν πολύ διαφορετικά συμπεράσματα.

Το γεγονός αυτό είχε αντιληφθεί πριν από έναν αιώνα περίπου ο Γάλλος μαθηματικός και φιλόσοφος Henri Poincaré (1854-1912): “Μία ελάχιστη αιτία που διαφεύγει της προσοχής μπορεί να προκαλέσει ένα σημαντικό αποτέλεσμα”, πράγμα που ερχόταν σε αντίθεση με την ‘αιτιοκρατία’ του Γάλλου μαθηματικού και αστρονόμου Pierre Simon de Laplace (1794-1829). Το παράδοξο όμως είναι ότι το Χάος μπορεί να παραχθεί και αιτιοκρατικώς, δηλ. από σταθερούς κανόνες οι οποίοι δεν εμπεριέχουν στοιχεία τύχης.

Ο μύθος της απόλυτης προβλεπτικότητας η οποία εθεωρείτο αχώριστος σύντροφος της αιτιοκρατίας, έχει καταρριφθεί. Σήμερα πιστεύουμε ότι οι έννοιες ‘απόλυτη αιτιοκρατία’ και ‘τυχαία μεταβολή’ όχι μόνο δεν αποκλείουν η μία την άλλη, αλλά μπορούν να συνυπάρχουν και ότι η συνύπαρξη αυτή αποτελεί νόμο της Φύσης. Η Θεωρία του Χάους και η Γεωμετρία των Fractals αναφέρονται ακριβώς στο θέμα αυτό της συνύπαρξης και η σχέση που υπάρχει μεταξύ τους δεν είναι καθόλου συμπτωματική. Ίσως ο καλύτερος τρόπος για να εκφράσει κανείς τη σχέση αυτή είναι να πει ότι η Γεωμετρία των Fractals είναι η Γεωμετρία του Χάους.

## Είναι χρήσιμη η διδασκαλία των fractals στα σχολεία;

Τα παιδιά που πρωτοέρχονται στο Γυμνάσιο ενθουσιάζονται μόλις αντικρύσουν τον υπολογιστή. Όταν όμως βρεθούν αντιμέτωποι με εντολές που πρέπει να θυμούνται, με προφορικές εξετάσεις και διαγωνίσματα τότε όλα απομυθοποιούνται και γίνεται η Πληροφορική

ένα μάθημα σαν όλα τα άλλα. Αυτό που δεν χάνει όμως την αξία του είναι ο μαγικός κόσμος των χρωμάτων και των γραφικών. Στα παιδιά του Γυμνασίου αρέσει περισσότερο η Ζωγραφική (Paintbrush) απ'ότι η Επεξεργασία Κειμένου, τα Λογιστικά Φύλλα ή οι Βάσεις Δεδομένων. Άρα στα παιδιά αρέσει περισσότερο η δημιουργία.

Στη σημερινή εποχή έχει αναγνωριστεί η σημασία της εικόνας, ως το χρησιμότερο μέσο περιγραφής πολύπλοκων αφηρημένων σχέσεων. Πολλοί άνθρωποι χρησιμοποιούν την αίσθηση του ωραίου, όχι τόσο για την ανεύρεση της αλήθειας, παρά για πληρότητα και για την κατανόηση διαφόρων φυσικών διεργασιών. Ένας απ'τους σημαντικότερους γερμανούς μαθηματικούς, ο Hermann Weyl, έλεγε: “Με την εργασία μου προσπαθώ να ενοποιήσω την αλήθεια με το ωραίο. Όταν όμως πρέπει να διαλέξω το ένα ή το άλλο, συνήθως επιλέγω το ωραίο”. Από τέτοιες φράσεις πηγάζει και το αίσθημα της συγγένειας επιστήμης και τέχνης.

Τα ‘Γραφικά με υπολογιστή’ (computer graphics) είναι ένα μέσο απεικόνισης, το οποίο ανοίγει νέους δρόμους για την εκμάθηση διαφόρων μαθημάτων και αυτό γιατί με τη βοήθεια οπτικοποιήσεων περιγράφουν και αναπαριστούν πολύπλοκες σχέσεις σε μικρό χρονικό διάστημα. Η οπτική αυτή έκφραση ξυπνάει και ικανοποιεί ακόμα και αισθητικές αναζητήσεις, διότι οι ωραίες εικόνες εντυπωσιάζουν τους μαθητές.

Δεν πρέπει να έχουμε όμως την αντίληψη ότι τα Fractals ως εικόνες ή σχήματα ή δομές είναι αντικείμενα μόνο στατικά, όπως λ.χ. στην περίπτωση ενός δένδρου ή νέφους ή μιας οροσειράς κ.ά. Στη Βοτανική π.χ., εκτός από την πολύπλοκη γεωμετρική εικόνα που παρουσιάζει ένα πλήρως ανεπτυγμένο φυτό, μας ενδιαφέρει πάρα πολύ να γνωρίσουμε την δυναμική ανάπτυξης του φυτού αυτού.

Πολλά από τα μαθήματα που διδάσκονται στο σχολείο μπορούν να ζωντανέψουν, με τη βοήθεια των Fractals και των Γραφικών, μέσα από την οθόνη ενός υπολογιστή, η οποία θα δείχνει λ.χ. την εξέλιξη ή τη γένεση μιας δομής, τα αποτελέσματα γεωλογικών μετασχηματισμών του φλοιού της γης και φαινομένων διάβρωσης, τη συσσώρευση ψευδαργύρου κατά τη διάρκεια ενός πειράματος ηλεκτρόλυσης, είτε τη δημιουργία του ανθρώπινου πνεύμονα. Επίσης τα βιβλία των Μαθηματικών και της Φυσικής πρέπει να αναφέρουν το κοινό μαθηματικό νήμα που συνδέει πολύπλοκες φυσικές διαδικασίες καθώς και εφαρμογές των Fractals και του Χάους.

Αποτελεί πλέον κοινό μυστικό ότι πρόκειται για μια θεωρία που έχει κυριεύσει όλους τους τομείς της επιστημονικής έρευνας: από τη διαστημική τεχνολογία ως τη δυναμική των υγρών, από τις ακτίνες laser ως τις χημικές αντιδράσεις, από τις τηλεπικοινωνίες ως την καρδιολογία, από την οικονομία ως τη νευροφυσιολογία και η οποία έχει αρχίσει προσφάτως να ενδιαφέρει ζωγράφους, μουσικούς, συγγραφείς και ψυχαναλυτές, με άλλα λόγια όλο σχεδόν το φάσμα της ανθρώπινης γνώσης.

Πρέπει να κατανοήσουμε ότι η Γεωμετρία των Fractals είναι πρώτα απ' όλα μια νέα γλώσσα η οποία χρησιμοποιείται για να περιγράψει, να δώσει πρότυπα και να αναλύσει τις πολύπλοκες μορφές που παρατηρούνται στη Φύση. Η διαφορά έγκειται στο ότι ενώ τα στοιχεία της 'παραδοσιακής' γλώσσας, της γνωστής δηλαδή Ευκλείδειας Γεωμετρίας, είναι βασικές συγκεκριμένες μορφές, τα στοιχεία της νέας γλώσσας δεν προσφέρονται για απ' ευθείας παρατήρηση. Τα στοιχεία αυτά είναι οι αλγόριθμοι δια των οποίων λαμβάνουμε σχήματα και δομές μόνο με τη βοήθεια των υπολογιστών. Από τη στιγμή που γίνεται δυνατή η εκμάθηση της νέας αυτής γλώσσας στο σχολείο, μέσω π.χ. της Logo, της Basic ή της Pascal, μπορεί κανείς να περιγράψει με ευκολία διάφορα φυσικά φαινόμενα, ενώ τα παιδιά πρέπει να καταλάβουν πως η δημιουργός αιτία (δηλ. ο αλγόριθμος) μιας πολύπλοκης δομής, είναι πολλές φορές μια πολύ απλή διαδικασία, πράγμα που αποτελεί και το δίδαγμα της Θεωρίας του Χάους και της Γεωμετρίας των Fractals.

### **Βιβλιογραφία** (στα ελληνικά)

- [1] Αρτεμιάδης Ν. Κ., *Η Γεωμετρία των Fractals*, Μαθηματική Επιθεώρηση **44** (1995), 1-15.
- [2] Δάλλα Λ., Δρακόπουλος Β., Μπεμ Α., *Στοιχεία από τη θεωρία των Fractals*, Μαθηματική Επιθεώρηση **43** (1995), 21-48.
- [3] Δρακόπουλος Β., *Εισαγωγή στα Πολυσχιδή και τη Χαοτική Δυναμική*, Master Thesis, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 1992.
- [4] Δρακόπουλος Β., Μπεμ Α., *Φύση: Γεωμετρία και Πολυπλοκότητα*, Ομιλία στην έκθεση ζωγραφικής της ζωγράφου Μάγιας-Μαρίας Ρεμούνη στο Χώρο Τέχνης 'ΖΜ', Θεσσαλονίκη, 28 Μαρτ.-12 Απρ. 1997.
- [5] Δρακόπουλος Β., Μπεμ Α., *Η Γεωμετρία της Φύσης στην Εκπαίδευση*, Πρακτικά εισηγήσεων Δημερίδας Πληροφορικής "Η Πληροφορική στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση", ΕΠΥ, 1997.
- [6] Μακρίδης Γ., *Fractals σαν εργαλείο δημιουργίας αλλά και εκτίμησης της δύναμης των Μαθηματικών από τους μαθητές*, 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ, 1993.
- [7] Hilbert D., *Θεμέλια της Γεωμετρίας*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα, 1995.
- [8] Poincaré H., *Η αξία της επιστήμης*, Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα, 1997.
- [9] Stewart I., *Οι αριθμοί της Φύσης*, Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα, 1996.
- [10] Stewart I. and Golubitsky M., *Είναι ο Θεός γεωμέτρης;*, Εκδόσεις Κωσταράκη, Αθήνα, 1995.
- [11] Weyl H., *Συμμετρία*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα, 1991.



### **Abstract**

Anyone that has ever noticed some strange figures that decorate posters, postcards, disks, magazines and books, speaks of pretty pictures. The ones that have a deeper knowledge on the subject, believe that they are expressions of abstract Art that comes from specific equations. We explain in simple words the concepts of Fractal Geometry and Chaos Theory. We also suggest their teaching in the Secondary Education in order to strengthen the students' interest, through tangible examples, in other courses of the analytic program. In this effort the computer's contribution is substantial.

### **Abstrakt**

Wer jemals auf sonderbare Figuren, die, Plakate, Postkarten, Schallplatten, Zeitschriften und Bücher schmücken, geachtet hat, spricht von "schönen Bildern". Diejenigen die etwas vom Fach verstehen, meinen, daß es abstrakte Kunst sei, die aus spezifischen Gleichungen herrührt. Wir erklären die Begriffe der Fraktalen Geometrie und der Chaos Theorie in einfachen Wörter. Ebenfalls schlagen wir ihre Lehre in den Gymnasien vor, damit das Interesse der Schüler auch für andere Unterrichtsfächer des analytischen Programs, durch greifbare Beispielen, gestärkt wird. In diesen Versuch ist der Beitrag des Computers unabdingbar.