

# Στοιχεία από τη θεωρία των Fractals

Α. Ευαγγελάτου–Δάλλα\*    Β. Δρακόπουλος†    Α. Μπεμ‡

Ιούνιος 1995

## 1 Ιστορικά στοιχεία

Το πρώτο γνωστό μορφοκλασματικό αντικείμενο σχεδιάστηκε από τον ζωγράφο Albrecht Dürer (1471–1528) και είναι βασισμένο σε κανονικά πεντάγωνα. Ένας καλλιτέχνης, ο οποίος αξίζει επίσης ιδιαίτερης προσοχής, είναι ο Ολλανδός χαράκτης και ζωγράφος Maurits C. Escher (1902–1972), ο οποίος δημιούργησε χαρακτηριστικά με χαρακτηριστικό την αυτοομοιότητα.

Μαθηματικοί του 19ου αιώνα κατασκεύασαν τα πρώτα μορφοκλάσματα για να δώσουν αντιπαραδείγματα σε ωρισμένες εικασίες. Έτσι, ο Georg Cantor (1845–1918) κατασκεύασε ένα σύνολο στο διάστημα  $[0, 1]$ , το οποίο έχει μη αριθμήσιμο πλήθος σημείων, είναι μηδενικού μήκους, ολικώς ασύνδετο και τέλειο. Στη συνέχεια οι Giuseppe Peano (1858–1932), David Hilbert (1862–1943) και Helge von Koch δημιούργησαν μορφοκλασματικές καμπύλες, οι οποίες είναι συνεχείς, απείρου μήκους, πουθενά διαφορίσιμες, ενώ περιβάλλουν σύνολο πεπερασμένου εμβαδού. Ο Waclaw Sierpiński (1882–1969) κατασκεύασε το ομώνυμο τρίγωνο στον  $\mathbb{R}^2$ , το οποίο γενικεύθηκε ως σπόγγος Menger στον  $\mathbb{R}^3$  χρησιμοποιώντας μια κλασική πλέον κατασκευή μορφοκλασματικού συνόλου.

Οι Gaston Julia (1893–1978) και Pierre Fatou (1878–1929) όρισαν τα, στις μέρες μας επονομαζόμενα, Julia και Fatou σύνολα του μιγαδικού επιπέδου και απέδειξαν βασικές ιδιότητες χωρίς να ευτυχίσουν να δουν τα σύνολα αυτά στην οθόνη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια πολλοί μαθηματικοί κατασκεύασαν μορφοκλασματικά σύνολα για να δώσουν απαντήσεις σε προβλήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης και της Γεωμετρίας.

Αυτά εν ολίγοις αποτελούν την προϊστορία των μορφοκλασμάτων έως ότου ο Benoit Mandelbrot προσδώσει την ονομασία fractals σε όλα αυτά τα «περιέργα» αντικείμενα (1970). Ο ίδιος προσδιορίζει την απαρχή της Γεωμετρίας των μορφοκλασματικών συνόλων από το 1975, ενώ ο ορισμός που έδωσε για τον όρο fractal («σύνολο του οποίου η Hausdorff διάσταση

---

\*Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

†Μέση Εκπαίδευση, Τμήμα Πληροφορικής Πανεπιστημίου Αθηνών

‡Τμήμα Πληροφορικής Πανεπιστημίου Αθηνών

δεν είναι ακέραιος αριθμός»), δεν περιέγραφε όλα τα μορφοκλασματικά αντικείμενα, ενώ περιελάμβανε σύνολα, τα οποία δεν φαίνονται να είναι μορφοκλασματικά. Τελικώς κατέληξε ότι fractals είναι όλα τα αντικείμενα των οποίων η Hausdorff–Besicovitch διάσταση είναι γνησίως μεγαλύτερη της τοπολογικής.

Έχοντας στο νου τα προηγούμενα, θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τυπικά τα περιέργα αυτά αντικείμενα και να κατασκευάσουμε με διάφορες τεχνικές μερικά από αυτά.

## 2 Κατασκευή Fractals με Επαναλαμβανόμενα Συστήματα Συναρτήσεων

Οι ακόλουθοι ορισμοί είναι βασικοί για όσα θα επακολουθήσουν.

**Ορισμός 2.1** Ένας μετρικός χώρος είναι ένα ζεύγος  $(X, d)$ , όπου  $X$  είναι ένα μη κενό σύνολο και  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία πραγματική συνάρτηση, η οποία καλείται μετρική ή απόσταση και ικανοποιεί για όλα τα  $x, y, z \in X$  τις ιδιότητες :

$$(i) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ και } d(x, y) = 0 \text{ τότε και μόνον, εάν } x = y$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (συμμετρία)}$$

$$(iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (τριγωνική ανισότητα)}$$

**Ορισμός 2.2** Ένα  $K \subset X$  καλείται κλειστό αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  του  $K$  το  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in K$ . Ένα  $A \subset X$  καλείται ανοικτό αν το  $X \setminus A$  είναι κλειστό.

**Ορισμός 2.3** Καλείται θήκη του  $A \subset X$  και συμβολίζεται με  $\bar{A}$ , το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το  $A$ .

Ως σύνορο του  $A$  ορίζεται το σύνολο  $\partial A = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A})$ , δηλ. το σύνολο των σημείων του  $X$  τα οποία βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο  $A$  και στο συμπλήρωμά του.

**Ορισμός 2.4** Μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow X$  σε έναν μετρικό χώρο  $(X, d)$  καλείται συστολή, αν υπάρχει  $0 \leq s < 1$  ώστε  $d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y)$  για κάθε  $x, y \in X$ . Ο αριθμός  $s$  καλείται παράγων συσταλτικότητας της  $f$ .

Μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow X$  καλείται ομοιότητα αν υπάρχει  $s \in \mathbb{R}_+$  ώστε  $d(f(x), f(y)) = sd(x, y)$  για κάθε  $x, y \in X$ . Ο αριθμός  $s$  καλείται συντελεστής ομοιότητας της  $f$ .

Οι ανωτέρω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

**Ορισμός 2.5** Ένας μετρικός χώρος  $(X, d)$  καλείται πλήρης αν κάθε βασική ακολουθία του  $X$  είναι συγκλίνουσα, δηλαδή αν η  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  έχει την ιδιότητα :

Για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  για  $n, m \geq n_0$ , τότε υπάρχει  $x \in X$  ώστε  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Ορισμός 2.6** Ένας μετρικός χώρος  $(X, d)$  καλείται **συμπαγής**<sup>1</sup> αν κάθε ακολουθία  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  περιέχει μία υπακολουθία  $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$  με  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x \in X$ .

Στην περίπτωση που ο μετρικός χώρος είναι ο Ευκλείδειος χώρος  $(\mathbb{R}^n, d)$ , ένα σύνολο είναι συμπαγές αν και μόνον αν είναι κλειστό και φραγμένο.

**Ορισμός 2.7** Ένα υποσύνολο  $A$  του μετρικού χώρου  $(X, d)$  καλείται **συνεκτικό**, αν δεν υπάρχουν ανοικτά σύνολα  $U$  και  $V$ , τέτοια ώστε  $A \subset U \cup V$  και τα  $A \cap U$  και  $A \cap V$  να είναι μη κενά και ξένα μεταξύ τους.

Τα μόνα συνεκτικά σύνολα του μετρικού χώρου  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  είναι τα διαστήματα. Στον ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^2$  ένα ανοικτό σύνολο είναι συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος σημείων του υπάρχει πολυγωνική γραμμή εντός του συνόλου που τα συνδέει.

**Ορισμός 2.8** Έστω  $f: X \rightarrow X$  μία συνάρτηση σε έναν μετρικό χώρο. Ένα σημείο  $x_0 \in X$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = x_0$  καλείται **σταθερό σημείο** της συνάρτησης.

**Ορισμός 2.9** Ένα (υπερβολικό) επαναλαμβανόμενο σύστημα συναρτήσεων (ΕΣΣ) αποτελείται από έναν πλήρη μετρικό χώρο  $(X, d)$  μαζί με ένα πεπερασμένο σύνολο απεικονίσεων συστολής  $w_n: X \rightarrow X$ , με αντίστοιχους παράγοντες συσταλτικότητας  $s_n$ , για  $n = 1, 2, \dots, N$ . Τούτο συμβολίζεται με  $\{X; w_{1-N}\}$  και ο παράγων συσταλτικότητάς του είναι  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ .

**Θεώρημα 2.1 (Σταθερού σημείου του Banach)** Εάν ο μετρικός χώρος  $(X, d)$  είναι πλήρης και η  $f: X \rightarrow X$  είναι συστολή, τότε υπάρχει ακριβώς ένα σημείο  $x_0 \in X$  ώστε  $f(x_0) = x_0$  και  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ , για κάθε  $x \in X$ , όπου  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ , δηλ. η επανάληψη της  $f$   $n$ -φορές.

Η διαδικασία κατασκευής fractals που ακολουθούμε είναι η εξής:

Δημιουργούμε έναν πλήρη μετρικό χώρο  $(\mathbb{H}(X), h)$  μέσα στον οποίο «ζουν» τα fractals, ενώ με τη βοήθεια συστολών κατασκευάζουμε fractals ως σταθερό σημείο της συνάρτησης βάσει του θεωρήματος του Banach.

## 2.1 Κατασκευή του μετρικού χώρου στον οποίο ζουν τα fractals

Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος. Συνήθως χρησιμοποιούμε τους  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ , τη σφαίρα Riemann ή την οθόνη του υπολογιστή με τις συνήθειες μετρικές. Ορίζουμε ως  $\mathbb{H}(X)$  το σύνολο των συμπαγών, μη κενών υποσυνόλων του  $X$ . Για κάθε  $A, B \in \mathbb{H}(X)$  θέτουμε

$$d(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}, \quad d(B, A) = \max\{d(b, A) : b \in B\}$$

<sup>1</sup>Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται, στους μετρικούς χώρους, ως **ακολουθιακή συμπαγεία**.

όπου

$$d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\}.$$

Συνήθως  $d(A, B) \neq d(B, A)$ , π.χ. εάν το  $A$  είναι γνήσιο υποσύνολο του  $B$  τότε  $d(A, B) = 0$  ενώ  $d(B, A) > 0$ .

Ορίζουμε ως **μετρική Hausdorff** την

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Τότε ισχύουν :

- ι) Ο  $(\mathbb{H}(X), h)$  είναι μετρικός χώρος.
- ii) Εάν ο  $(X, d)$  είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε και ο  $(\mathbb{H}(X), h)$  είναι πλήρης μετρικός χώρος.
- iii) Εάν ο  $(X, d)$  είναι συμπαγής μετρικός χώρος τότε και ο  $(\mathbb{H}(X), h)$  είναι συμπαγής μετρικός χώρος (Θεώρημα επιλογής Blaschke).

**Θεώρημα 2.2** Έστω ότι  $\{X; w_{1-N}\}$  είναι ένα υπερβολικό ΕΣΣ με παράγοντα συσταλτικότητας  $s$ . Τότε η συνάρτηση

$$W: \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X) \text{ με } W(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B)$$

για κάθε  $B \in \mathbb{H}(X)$ , είναι μία συστολή πάνω στον πλήρη μετρικό χώρο  $(\mathbb{H}(X), h)$  με παράγοντα συσταλτικότητας  $s$ . Το μοναδικό σταθερό σημείο της,  $A \in \mathbb{H}(X)$ , ικανοποιεί την

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N w_n(A)$$

και δίνεται από την σχέση  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$  για κάθε  $B \in \mathbb{H}(X)$ .

**Ορισμός 2.10** Το μοναδικό σταθερό σημείο  $A \in \mathbb{H}(X)$  που περιγράφηκε στο προηγούμενο θεώρημα καλείται ο **ελκυστής** του ΕΣΣ.

Ο όρος ελκυστής επιλέχθηκε ώστε να υποδείξει την μετακίνηση του  $B$  προς το  $A$  κάτω από συνεχή εφαρμογή της  $W$ . Αντιθέτως, το  $A$  είναι επίσης το μοναδικό σύνολο του  $\mathbb{H}(X)$  το οποίο δεν αλλάζει με την  $W$ , διότι  $A = W(A)$  και υπό αυτήν την έννοια καλείται και **αμετάβλητο σύνολο** του ΕΣΣ.

## Παραδείγματα

1) Εάν  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  είναι ο πλήρης μετρικός χώρος των πραγματικών αριθμών και

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

τότε η  $W: \mathbb{H}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{R})$  με  $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A)$  είναι συνάρτηση συστολής με  $s = 1/3$ .

Ο ελκυστής της  $W$  είναι το «τριαδικό σύνολο Cantor» (Σχ. 3).

2) Εάν  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  είναι ο Ευκλείδειος μετρικός χώρος και

$$w_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2(x, y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3(x, y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

όπου  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , τότε η  $W: \mathbb{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{R}^2)$  με  $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A)$  είναι συνάρτηση συστολής με ελκυστή το «τρίγωνο Sierpinski» (Σχ. 5).

## 2.2 Αλγόριθμοι κατασκευής ελκυστών

**Κώδικες ΕΣΣ** Από εδώ και στο εξής ο  $X$  θα είναι το επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  ή κάποιο υποσύνολό του. Επίσης υποθέτουμε ότι είναι δοσμένο κάποιο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ότι όλες οι απεικονίσεις  $w_i$  είναι συσχετισμένες, όπου ένας μετασχηματισμός  $w$  είναι **συσχετισμένος** εάν μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν πίνακα  $A$  και μία μετατόπιση  $t$  όπως η

$$w(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

ή

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

### Εφαρμογή 1.

Ο αλγόριθμος ο οποίος παρουσιάζεται στη συνέχεια ονομάζεται **Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων** και βασίζεται στην ιδέα του άμεσου υπολογισμού μίας ακολουθίας συνόλων  $\{A_n = W^n(A)\}$  ξεκινώντας από ένα συμπαγές αρχικό σύνολο  $A_0$ . Για ευκολία περιοριζόμαστε στο υπερβολικό ΕΣΣ της μορφής

$$\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$$

όπου κάθε απεικόνιση είναι ένας συσχετισμένος μετασχηματισμός.

Επιλέξτε ένα συμπαγές σύνολο  $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ . Τότε υπολογίστε επανειλημμένως τα  $A_n = W^n(A_0)$  σύμφωνα με τη σχέση  $A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^N w_j(A_n)$  για  $n = 1, 2, \dots$ . Έτσι κατασκευάσατε μία ακολουθία

$$\{A_n : n = 0, 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{H}(X).$$

Τότε απ' το Θεώρημα 2.2 η ακολουθία αυτή συγκλίνει προς τον ελκυστή του ΕΣΣ υπό τη μετρική Hausdorff.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο παίρνουμε κάθε σημείο της οθόνης μας και εφαρμόζουμε σ' αυτό καθ' έναν από τους συσχετισμένους μετασχηματισμούς ο οποίος φτιάχνει το ΕΣΣ για μία συγκεκριμένη εικόνα. Τότε σχεδιάζονται τα καινούργια σημεία και μετά εφαρμόζεται ξανά η ίδια μέθοδος τόσες φορές όσες χρειάζονται ώστε να έχουμε ένα τελικό αποτέλεσμα. Με λίγα λόγια απαιτεί από εμάς να υπολογίζουμε σε κάθε βήμα την αλληλοεπικάλυψη των εικόνων  $w_1(E) \cup \dots \cup w_N(E)$  απ' το προηγούμενο βήμα  $E$  (Σχ. 7).

Σε αυτό το σημείο πρέπει να συνηθετοποιήσουμε ένα σημαντικό πρόβλημα του αιτιοκρατικού αλγόριθμου. Πρέπει να έχουμε αρκετή διαθέσιμη μνήμη. Μόνο ο καθορισμός όλων των σημείων στην τρέχουσα οθόνη μας, απαιτεί 224K θέσεων μνήμης και ένα ίσο πλήθος θέσεων απαιτούνται για αποθήκευση των μετασχηματιζόμενων σημείων καθώς αυτά παράγονται.  $\square$

## Εφαρμογή 2. Τυχαία επανάληψη.

Αντίθετα από την προηγούμενη μέθοδο, εδώ υπολογίζουμε σε κάθε βήμα μόνο ένα καινούργιο σημείο  $x_{n+1}$  απ' το προηγούμενό του  $x_n$ , μέσω της  $x_{n+1} = w_i(x_n)$  με ένα τυχαίως επιλεγμένο  $i$  από τα  $1, 2, \dots, N$ .

**Ορισμός 2.11 (Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων)** Δοθέντος του ΕΣΣ  $\{X; w_{1-N}\}$  αντιστοιχούμε πρώτα με κάθε  $w_i$  μία πιθανότητα  $p_i = D_i/D$ , υπολογισμένη απ' τους συντελεστές  $a_i$  έως  $d_i$  της απεικόνισης  $w_i$  μέσω των  $D_i = |a_i d_i - b_i c_i|$  και  $D = D_1 + \dots + D_N$ . Εδώ το  $D_i$  είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα της  $w_i$ .

**Επανάληψη.** Επιλέξτε ένα αρχικό σημείο  $x_0 \in X$ . Υπολογίστε τα διαδοχικά σημεία  $x_{n+1} = w_r(x_n)$  όπου σε κάθε βήμα το  $r$  δίνει μία από τις τιμές  $1, 2, \dots, N$  συμφώνως προς τον κανόνα: η πιθανότητα του  $\{r = i\}$  είναι  $p_i$ . Διαισθητικώς, τρέχουμε διαμέσου των επιλογών έτσι ώστε κάθε  $w_i$  να εμφανίζεται με μία ανάλογη προς το εμβαδόν  $D_i$  συχνότητα της εικόνας υπό την  $w_i$  ενός τετραγώνου με μοναδιαίο εμβαδόν. Έτσι οι υπεύθυνοι για την παραγωγή του μεγαλύτερου εμβαδού μετασχηματισμοί παρέχουν και τα περισσότερα σημεία (Σχ. 10).

**Γιατί πρέπει να λειτουργεί:**

**Πρόβλημα 1 Ξεκινώντας.** Δεν μας εγγυάται κανείς ότι το αρχικό σημείο  $x_0$  βρίσκεται στον ελκυστή  $A$ . Πάντως, συμπεραίνουμε από προηγούμενα αποτελέσματα ότι, δοθείσης μίας μικρής ανοχής  $\varepsilon$ , έστω ένα δέκατο της διαμέτρου του εικονοστοιχείου, όλα τα επανειλημμένα  $x_n$  μετά από κάποιο στάδιο  $k$  θα βρίσκονται  $\varepsilon$  κοντά στα σημεία του ελκυστή.

**Πρόβλημα 2 Ανακρίβεια.** Τι γίνεται με τα αθροιστικά σφάλματα κατά τον υπολογισμό της τροχιάς; Ευτυχώς η κατασκευή είναι αυτοδιορθωτική με την έννοια ότι οιοδήποτε ανακριβές σημείο  $x_m$  και να πάρουμε σε κάποιο ενδιάμεσο στάδιο της μεθόδου, παραμένει αληθές ότι  $W^n(E_0) \rightarrow A$  αν  $E_0$  είναι το απλό σημείο  $x_m$ . Επίσης αν  $x_{n+1}$  είναι υπολογισμένο ακριβώς από ένα πιθανώς αλάνθαστο  $x_n$ , τότε είναι πιά κοντά στο  $A$  απ' ό,τι το  $x_n$ , διότι αν  $a \in A$  και  $w_i(a) = b$ , τότε  $d(x_{n+1}, b) = d(w_i(x_n), w_i(a)) \leq r_i d(x_n, a)$ .

**Πρόβλημα 3 Κατανομή.** Δουθέντος του ότι τα εικονοστοιχεία που εμφανίζουμε είναι αρκετά κοντά προς το σωστό, τότε όλοι μας οι στιγματισμοί συγκεντρώνονται σε ωρισμένα μέρη του ελκυστή ή αναλύσκονται στο να επισκέπτονται το ίδιο μέρος ξανά και ξανά; Έτσι εμφανίζεται μόνο ένα μέρος του ελκυστή. Αυτή η ερώτηση είναι αποφασιστικής σημασίας.

Υπάρχουν δύο απαντήσεις.

Μία πρώτη βασίζεται στη θεωρία μέτρου και έχει συναρπαστικά αποτελέσματα. Η δεύτερη και κάπως έμμεση διότι βασίζεται στη συμβολική δυναμική, είναι ότι τα περιοδικά σημεία είναι πυκνά στον ελκυστή.  $\square$

### 3 Fractal παρεμβολή

Έστω ότι μας δίνεται ένα σύνολο δεδομένων  $\{(x_i, F_i) : i = 0, 1, \dots, N\}$  όπου  $N$  είναι φυσικός αριθμός και τα  $F_i = F(x_i)$ ,  $x_i$  είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ .

Ζητάμε να βρούμε μία συνεχή συνάρτηση  $f: [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε  $f(x_i) = F_i$ , για  $i = 0, 1, \dots, N$ . Η εύρεση κατάλληλης  $f$  εξαρτάται από την φύση του αντικειμένου που θέλουμε να περιγράψουμε. Για την περίπτωση που επιθυμούμε να αναπαραστήσουμε οριζόντια με σύννεφα, βουνοσειρές κ.ά. θεωρούμε ένα ΕΣΣ της μορφής

$$\{\mathbb{R}^2; w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$$

όπου οι απεικονίσεις είναι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί της ειδικής μορφής

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}, n = 1, 2, \dots, N, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ενώ οι σταθερές  $a_n, c_n, d_n, e_n, f_n$  δίνονται από τις σχέσεις

$$w_n \begin{pmatrix} x_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, w_n \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix} \text{ και } d_n \in \mathbb{R} \text{ για } n = 1, 2, \dots, N.$$

Αλλάζοντας την μετρική στον  $\mathbb{R}^2$  (εάν χρειάζεται) ορίζουμε άλλη ισοδύναμη της Ευκλείδειας μετρικής ώστε οι  $w_n, n = 1, \dots, N$  να γίνουν συναρτήσεις συστολής. Τότε υπάρχει ακριβώς μια συνεχής συνάρτηση  $f$  η οποία είναι **συνάρτηση παρεμβολής** των  $\{(x_i, F_i) : i = 0, 1, \dots, N\}$  και είναι ελκυστής κατάλληλης συστολής  $T: X \rightarrow X$  όπου  $X$  είναι ο πλήρης μετρικός χώρος των συναρτήσεων παρεμβολής (υποσύνολο του πλήρους μετρικού χώρου των συνεχών συναρτήσεων  $\mathbf{C}([x_0, x_N], d_\infty)$ ) (Σχ. 8).

## 4 Διάσταση

Στα συνήθη γεωμετρικά σχήματα του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$ , η διάσταση ορίζεται ως η διάσταση του ελάχιστου επιπέδου το οποίο τα περιέχει. Με τον ορισμό αυτό οι ευθείες και τα διαστήματα έχουν διάσταση 1, τα τρίγωνα, τα πολύγωνα και οι κύκλοι διάσταση 2, ενώ τα στερεά πολύεδρα, οι κύλινδροι, οι σφαίρες και οι κώνοι έχουν διάσταση 3.

Με τον ορισμό αυτό της διάστασης, το σύνολο άντορ έχει διάσταση 1 ενώ το μήκος του είναι 0, το ίδιο που ισχύει και για κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  (π.χ. οι ρητοί). Το σύνολο Sierpinski έχει διάσταση 2, άπειρο μήκος και εμβαδόν μηδέν.

Παρατηρούμε ότι ο συνήθης ορισμός της διάστασης με  $n$  φυσικό αριθμό, δεν διακρίνει τα σύνολα μεταξύ τους. Αντικείμενα που υπάρχουν στη φύση όπως ακτές, σύννεφα και τοπία δεν μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά με τη χρήση ακεραίας διάστασης. Δημιουργήθηκε λοιπόν η ανάγκη να οριστεί η διάσταση ενός συνόλου με μη αρνητικό πραγματικό αριθμό. Η ιδέα προέκυψε από τη γενίκευση της συνήθους διάστασης ως εξής:

Εάν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα στον  $\mathbb{R}^n$  το πλήθος των σημείων του είναι άπειρο, το μήκος του πεπερασμένος αριθμός, ενώ το εμβαδόν και ο όγκος του μηδέν. Εάν έχουμε ένα τετράγωνο, το πλήθος των σημείων του και το μήκος του είναι άπειρο, το εμβαδόν του πεπερασμένος αριθμός και ο όγκος του μηδέν. Υπάρχει δηλαδή ένας φυσικός αριθμός  $s$  ώστε

$$m^k(A) = \infty \text{ για } k < s \text{ και } m^k(A) = 0 \text{ για } k > s, k \in \mathbb{N},$$

όπου  $m^k$  είναι το «μέτρο» του συνόλου (εάν  $k = 1$  τότε  $m =$  μήκος, εάν  $k = 2$  τότε  $m^2 =$  εμβαδόν, εάν  $k = 3$  τότε  $m^3 =$  όγκος).

Η επέκταση του ορισμού γίνεται ως εξής : «Μετράμε» το σύνολο με μέτρο  $m^t$  όπου  $t$  μη αρνητικός πραγματικός αριθμός και βρίσκουμε τον αριθμό  $s$  για τον οποίο ισχύει  $m^t(A) = \infty$  για  $t < s$  και  $m^t(A) = 0$  για  $t > s$ .

Υπάρχουν πολλά είδη διάστασης, η Hausdorff–Besicovitch, η box, η ομοιότητας, η τοπολογική και άλλες. Εδώ θα ορίσουμε τις τρεις πρώτες, οι οποίες χρησιμοποιούνται και περισσότερο στα σύνολα fractals και αναφέρονται ως fractals διαστάσεις.

### 4.1 Μέτρο Hausdorff, διάσταση Hausdorff–Besicovitch (1920)

Έστω  $(\mathbb{R}^n, d)$  ο Ευκλείδειος χώρος,  $F \subset \mathbb{R}^n$  και  $s \geq 0$ . Για κάθε  $\delta > 0$  ορίζουμε

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{διαμ}(U_i))^s : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ και } 0 < \text{διαμ}(U_i) \leq \delta \text{ για } i = 1, 2, \dots \right\}$$

(όπου  $\text{διαμ}(U)$  είναι η διάμετρος του συνόλου  $U$ ).

Ορίζουμε ως  $\sigma$ -διάστατο μέτρο Hausdorff του συνόλου  $F$  το

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(F).$$

Τα μέτρα Hausdorff γενικεύουν τις συνήθεις έννοιες του μήκους, του εμβαδού, του όγκου, κ.λ.π. Για παράδειγμα, αν  $F$  είναι ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ , τότε

$$H^n(F) = c_n \text{vol}^n(F)$$

όπου η σταθερά  $c_n = \pi^{\frac{1}{2}n} / 2^n (\frac{1}{2}n)!$  είναι ο όγκος μίας  $n$ -διάστατης μοναδιαίας σφαίρας διαμέτρου 1. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει αριθμός  $s \geq 0$  τέτοιος ώστε

$$H^t(F) = \infty \text{ για } t < s$$

$$H^t(F) = 0 \text{ για } t > s.$$

Τον αριθμό  $s = \inf\{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}$  καλούμε **διάσταση Hausdorff (-Besicovitch)** και συμβολίζεται με  $\dim_H F$ .

Το  $H^s(F)$  για  $s = \dim_H F$  μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

#### Παραδείγματα 4.1

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα εξής:

- 1) Εάν  $C$  είναι το τριαδικό σύνολο Cantor τότε

$$\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309 \dots$$

- 2) Εάν  $T$  είναι το τρίγωνο Sierpinski τότε

$$\dim_H T = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5850 \dots$$

- 3) Εάν  $K$  είναι η καμπύλη von Koch, τότε

$$\dim_H K = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2619 \dots$$

## 4.2 Διάσταση Box

Μια άλλη διάσταση η οποία είναι πλέον εύχρηστη της Hausdorff είναι η **διάσταση box** (εντροπία Kolmogorov 1930).

Η διάσταση αυτή γίνεται κατανοητή μέσω παραδειγμάτων. Εάν έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς  $a$  και χωρίσουμε την πλευρά σε ίσα τμήματα μήκους  $\delta$  χρειαζόμαστε τουλάχιστον  $N_\delta = \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = a^2 \left(\frac{1}{\delta}\right)^2$  τετράγωνα πλευράς  $\delta$  για να καλύψουμε το αρχικό τετράγωνο. Αναλόγως για έναν κύβο πλευράς  $a$  χρειαζόμαστε  $N_\delta = a^3 \left(\frac{1}{\delta}\right)^3$  κύβους πλευράς  $\delta$  για να τον καλύψουμε.

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που εμφανίζεται στο  $1/\delta$  είναι η «διάσταση» του αντικειμένου. Γενικά  $N_\delta \sim c\delta^{-s}$  για  $s \geq 0$  και  $c$  σταθερά. Παίρνοντας λογάριθμους έχουμε

$$\log N_\delta \simeq \log c - s \log \delta$$

με την έννοια ότι  $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\log N_\delta - \log c + s \log \delta) = 0$ . Άρα

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}.$$

Ορίζεται ως **διάσταση box** ενός φραγμένου συνόλου  $F \subset \mathbb{R}^n$  ο αριθμός

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

(αν υπάρχει) όπου  $N_\delta(F)$  είναι το ελάχιστο πλήθος των κλειστών σφαιρών ακτίνας  $\delta$  που καλύπτουν το  $F$  ή το ελάχιστο πλήθος των κύβων πλευράς  $\delta$  που καλύπτουν το  $F$ .

#### Παραδείγματα 4.2

Αποδεικνύεται ότι στα παραδείγματα που αναφέραμε η διάσταση box συμπίπτει με τη διάσταση Hausdorff.

Ισχύει  $0 \leq \dim_H F \leq \dim_B F \leq n$ , για  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Δεν ισχύει γενικά η ισότητα, π.χ. εάν  $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$  τότε  $\dim_H F = 0$  ενώ  $\dim_B F = \frac{1}{2}$ .

### 4.3 Διάσταση ομοιότητας

Ένα σύνολο  $F$  καλείται **αυτοόμοιο** αν  $F = w_1(F) \cup w_2(F) \cup \dots \cup w_N(F)$  όπου  $w_i$  είναι ομοιότητες με κοινό συντελεστή ομοιότητας  $c$ , και τα σύνολα  $w_i(F)$  'δεν επικαλύπτονται'. Δηλαδή το σύνολο  $F$  είναι η ένωση  $N$  συνόλων (μη επικαλυπτομένων) τα οποία είναι όμοια του (άρα και μεταξύ τους όμοια). Ορίζουμε ως **διάσταση ομοιότητας** την

$$\dim_s F = \frac{\log N}{-\log c}.$$

#### Παραδείγματα 4.3

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2, για το σύνολο Cantor έχουμε  $N = 2, c = 1/3$  άρα  $\dim_s C = \frac{\log 2}{\log 3}$ , για το τρίγωνο Sierpinski  $N = 3, c = 1/2$  άρα  $\dim_s T = \frac{\log 3}{\log 2}$  και για την καμπύλη von Koch,  $\dim_s K = \frac{\log 4}{\log 3}$ . Παρατηρούμε ότι στα συγκεκριμένα παραδείγματα οι τρεις διαστάσεις συμπίπτουν. Ισχύει το εξής θεώρημα:

**Θεώρημα 4.1** Υποθέτουμε ότι  $w_1, w_2, \dots, w_N$  είναι ομοιότητες με συντελεστές ομοιότητας  $c_1, c_2, \dots, c_N$  και ότι υπάρχει ανοικτό (φραγμένο) σύνολο  $V$  ώστε

$$\bigcup_{i=1}^N w_i(V) \subset V \text{ με } w_i(V) \cap w_j(V) = \emptyset \text{ για } i \neq j.$$

Αν  $F$  είναι το αμετάβλητο σύνολο το οποίο ικανοποιεί την

$$F = \bigcup_{i=1}^N w_i(F)$$

τότε  $\dim_B F = \dim_H F = s$ , όπου το  $s$  δίνεται από τη σχέση

$$\sum_{i=1}^N c_i^s = 1.$$

Επί πλέον για την τιμή αυτή του  $s$ ,  $0 < H^s(F) < \infty$ . Ιδιαίτερος εάν  $c_i = c$ , για  $i = 1, 2, \dots, N$  έχουμε ότι  $Nc^s = 1$  ή  $s = \frac{\log N}{-\log c}$  άρα  $s = \dim_s F = \dim_B F = \dim_H F$ .

Το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της διάστασης πολλών fractals (Σχ. 9).

## 5 Σύνολα Julia

Τα σύνολα Julia είναι fractals τα οποία χωρίζουν το μιγαδικό επίπεδο σε χωρία ευστάθειας και αστάθειας και προκύπτουν με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή μιγαδικών συναρτήσεων μίας μιγαδικής μεταβλητής. Από τις μιγαδικές συναρτήσεις εκείνες που έχουν σημαντικότερο ενδιαφέρον είναι τα δευτεροβάθμια πολυώνυμα, διότι είναι εκείνα που οδήγησαν τον Mandelbrot στον ορισμό του αντίστοιχου συνόλου.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(z) = z^2 + c$ ,  $z \in \mathbb{C}$  και  $c$  σταθερό ( $\mathbb{C}$  συμβολίζει το σύνολο των μιγαδικών αριθμών). Για  $z \in \mathbb{C}$  θεωρούμε ως **τροχιά** του  $z$  την ακολουθία  $\{f^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$ -φορές). Η ακολουθία αυτή για κάποια  $z \in \mathbb{C}$  συγκλίνει στο άπειρο και για άλλα συγκλίνει σε μιγαδικό αριθμό.

Παραδείγματος χάρη, εάν  $f(z) = z^2$  τότε  $f^n(z) = z^{2^n}$  για  $z \in \mathbb{C}$ . Η  $f^n(z)$  για  $|z| > 1$  συγκλίνει στο άπειρο, ενώ για  $|z| < 1$  συγκλίνει στο μηδέν. Τα δύο αυτά υποσύνολα του  $\mathbb{C}$  χωρίζονται από τον μοναδιαίο κύκλο  $|z| = 1$ .

Στη γενική περίπτωση τα σύνολα διαχωρίζονται από κάποιο σύνολο το οποίο έχει ως fractals διάσταση έναν μη ακέραιο αριθμό. Το σύνολο αυτό ονομάζεται σύνολο Julia και σε κάθε σημείο του η  $f$  έχει χαοτική συμπεριφορά, δηλαδή σε κάθε σημείο του συνόλου Julia υπάρχουν σημεία  $z_1, z_2$  όσο θέλουμε κοντά του, τέτοια ώστε η  $\{f^n(z_1)\}_{n=1}^{\infty}$  τείνει στο άπειρο, ενώ η  $\{f^n(z_2)\}_{n=1}^{\infty}$  τείνει σε μιγαδικό αριθμό.

**Ορισμός 5.1** Υποθέτουμε ότι το  $z \in \mathbb{C}$  είναι ένα σταθερό σημείο μίας αναλυτικής συνάρτησης  $f$  και  $\lambda = f'(z)$ . Τότε το  $z$  είναι :

- (α) υπερελκυστικό αν  $\lambda = 0$ ,
- (β) ελκυστικό αν  $0 < |\lambda| < 1$ ,
- (γ) απωστικό αν  $|\lambda| > 1$ ,
- (δ) ρητώς αδιάφορο αν η  $\lambda$  είναι μία ρίζα της μονάδας,
- (ε) αρρήτως αδιάφορο αν  $|\lambda| = 1$ , αλλά η  $\lambda$  δεν είναι μία ρίζα της μονάδας.

**Ορισμός 5.2** Εάν υπάρχει  $p \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $f^p(z_0) = z_0$ , τότε το  $z_0$  ονομάζεται **περιοδικό σημείο** της  $f$ . Το μικρότερο  $p$ , για το οποίο ισχύει  $f^p(z_0) = z_0$  καλείται **περίοδος** του  $z_0$ .

Το σύνολο Julia μίας συνάρτησης ορίζεται με πολλούς τρόπους. Θα δώσουμε τους πιο εύχρηστους ορισμούς.

**Ορισμός 5.3** Έστω  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ένα μιγαδικό πολυώνυμο με  $\deg(f) \geq 2$ . Το **σύνολο Julia** του  $f$ , το οποίο συμβολίζεται με  $J(f)$ , είναι η κλειστότητα του συνόλου των απωστικών περιοδικών σημείων του  $f$ . Το συμπληρωματικό του συνόλου Julia καλείται **σύνολο Fatou** ή **σύνολο ευστάθειας** του  $f$  και συμβολίζεται με  $F(f)$ .

**Ορισμός 5.4** Έστω  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ένα πολυώνυμο με  $\deg(f) \geq 2$ . Το **γεμισμένο σύνολο Julia**,  $K(f)$ , του  $f$  είναι το σύνολο των σημείων των οποίων οι τροχιές δεν τείνουν προς το άπειρο, δηλαδή,

$$K(f) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) \neq \infty\} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{το } \{|f^n(z)|\}_{n=0}^{\infty} \text{ είναι φραγμένο}\}.$$

Αυτός είναι ο ορισμός που χρησιμοποιείται στη γραφική με υπολογιστή μόνο για ρητές ή πολυωνυμικές συναρτήσεις.

**Ορισμός 5.5** Έστω  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  μία συνάρτηση. Αν  $a$  είναι ένα (υπερ)ελκυστικό περιοδικό σημείο της  $f$  περιόδου  $p$ , γράφουμε

$$A(a) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z) = a\}$$

για τη **λεκάνη έλξης** του  $a$ , δηλαδή **λεκάνη έλξης** είναι το σύνολο των σημείων τα οποία προσεγγίζουν μία δοθείσα (υπερ)ελκυστική περιοδική τροχιά.

Ισχύουν επίσης τα ακόλουθα:  
Έστω  $a$  ένα (υπερ)ελκυστικό σταθερό σημείο του  $f$ .

- Το σύνολο  $\partial A(a) = J(f)$ .
- $A(a) \subset F(f)$ .

### Παράδειγμα 5.1

Ισχυριζόμαστε ότι το  $f(z) = z^2 + c$  έχει τουλάχιστον ένα απωστικό σταθερό σημείο εκτός εάν  $c = 1/4$ . Διότι, για μία ρίζα  $a = (1/2)(1 \pm \sqrt{1-4c})$  του  $f(z) = z$  ισχύει  $\lambda$  με  $|\lambda| = 2|a| = |1 \pm \sqrt{1-4c}|$ . Παίρνοντας τη θετική τετραγωνική ρίζα βρίσκουμε ότι  $|\lambda| > 1$  εκτός εάν  $1 - 4c = 0 \Leftrightarrow c = 1/4$ , όπου και οι δύο ρίζες είναι ίσες με  $1/2$  έχοντας  $\lambda = 1$ .

Αποδεικνύουμε τώρα ότι το αδιάφορο σταθερό σημείο  $1/2$  της  $f(z) = z^2 + 1/4$  βρίσκεται στο  $J = \partial A(\infty)$ . Για κάθε  $\delta > 0$ ,  $f(1/2 + d) = (1/2 + d)^2 + 1/4 = 1/4 + d^2 + d + 1/4 = d^2 + d + 1/2 > 1 + d/2$  και  $f^n(1/2 + d) \geq (1 + d/2)^n$  και έτσι το  $1/2$  έχει σημεία της  $A(\infty)$  αυθαιρέτως κοντά, οπότε το  $1/2 \in \overline{A(\infty)}$ . Αλλά αφού το  $1/2 \notin A(\infty)$  έχουμε  $1/2 \in \overline{A(\infty)} \setminus A(\infty) = \partial A(\infty) = J$ .  $\square$

**Θεώρημα 5.1** Τα ακόλουθα ισχύουν για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  με μία το πολύ εξαίρεση.

(α) Αν  $U$  είναι ένα ανοικτό σύνολο τέτοιο ώστε  $U \cap J(f) \neq \emptyset$ , τότε  $f^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

(β) Αν  $z \in J(f)$  τότε  $J(f) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(z)}$ , δηλαδή η  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(z)$  είναι πυκνή στο  $J$ .

Από το θεώρημα αυτό συμπεραίνουμε ότι, γνωρίζοντας ένα μόνο σημείο του συνόλου Julia, μπορούμε μέσω των αντίστροφων εικόνων του να κατασκευάσουμε ολόκληρο το σύνολο.

## 6 Το σύνολο του Mandelbrot

Για κάθε  $c \in \mathbb{C}$  θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(z) = z^2 + c$ ,  $z \in \mathbb{C}$  και  $J_c$  το αντίστοιχο Julia σύνολό της. Το σύνολο του Mandelbrot χαρτογραφεί το σύνολο των  $c$  για τα οποία το  $J_c$  είναι συνεκτικό.

**Ορισμός 6.1**  $M = \{c \in \mathbb{C} : \text{το } J_c \text{ είναι συνεκτικό}\}$

Το σύνολο  $M$  είναι υπερβολικά πολύπλοκο και περιέχει πολλές πληροφορίες σχετικά με τη δομή των συνόλων Julia. Για τη γραφική απεικόνιση με υπολογιστή του συνόλου  $M$  χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι χαρακτηρισμοί.

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty\} = \{c \in \mathbb{C} : \text{το } \{f_c^n(0)\}_{n=1}^{\infty} \text{ είναι φραγμένο}\}.$$

Επίσης ισχύει ότι :

Το σύνολο  $M$  είναι συνεκτικό.

## 7 Κατασκευάζοντας τα σύνολα Julia και Mandelbrot

### 7.1 Κατασκευάζοντας τα σύνολα Julia

**Κατασκευή 1.** Μέθοδος Αντίστροφης Επανάληψης (Inverse Iteration Method).

Επαναλαμβάνουμε όπισθεν ξεκινώντας από ένα σημείο  $z$  του συνόλου Julia.

- (α) Υπολογίστε τα σταθερά σημεία της  $f(z) = z^2 + c$  και πάρτε εκείνο το  $z$  με μέτρο μεγαλύτερο του  $1/2$ . Υπάρχει τέτοιο εκτός αν  $c = 1/4$ , οπότε παίρνουμε  $z = 1/2$ . Εναλλάξ, ξεκινήστε με οιοδήποτε σημείο (εκτός του  $0$  αν  $c = 0$ ) και βασιστείτε στο στιγματισμό διαφόρων σημείων μεταξύ των λίγων αρχικών που παράγονται απ' την επανάληψη.
- (β) Επαναλάβετε όπισθεν: για κάθε σημείο  $z_i$  έως εδώ υπολογισμένο, αποκτείστε καινούργια ως ρίζες της  $f(z) = z_i$ . Υπολογίστε ανά επίπεδο, όπου σημεία του επιπέδου  $k$  είναι εκείνα που υπολογίσθηκαν επιλύοντας  $k$  εξισώσεις. Σταματείστε όποτε η εικόνα γίνει ικανοποιητική ή μετά από εύλογο χρόνο (Σχ. 11).

*Βάση της μεθόδου.* Η ιδέα είναι ότι, αν το  $z \in J$  τότε κάθε σημείο του  $J$  έχει κάποια επανειλημμένη αντίστροφη εικόνα του  $z$  αρκετά κοντά (Θεώρημα 5.1).

(α) Το παράδειγμα 5.1 δείχνει ότι ένα από τα σταθερά σημεία της  $f(z) = z^2 + c$  είναι απωστικό και έτσι από το Θεώρημα 5.1 βρίσκεται στο  $J$ , εκτός εάν  $c = 1/4$ . Ένα διαφορετικό επιχείρημα δείχνει ότι σ' αυτήν την περίπτωση η διπλή ρίζα  $1/2$  της  $f(z) = z$  βρίσκεται στο  $J$ . Εμφανίζεται σύγκλιση προς το  $J$  για τα περισσότερα σημεία εκκίνησης, επειδή η μέθοδος ισοδυναμεί με τη χρήση ενός επαναλαμβανόμενου συστήματος συναρτήσεων (ΕΣΣ) με απεικονίσεις

$$w_1(z) = \sqrt{z - c}, \quad w_2(z) = -\sqrt{z - c}$$

όπου κάθε σύνολο σημείων  $A$  έως εδώ υπολογισμένο, αποφέρει ένα μεγαλύτερο σύνολο  $w_1(A) \cup w_2(A)$ . Όσον αφορά στην απαιτούμενη ιδιότητα συστολής σημειώστε ότι η  $w_1$  είναι η σύνθεση μίας μετατόπισης  $z \mapsto z - c$  με μία απεικόνιση  $re^{ij} \mapsto (\sqrt{r})e^{ij/2}$ , έτσι η  $w_1$  είναι ασφαλώς συστολική οποτεδήποτε  $r = |z - c| > 1$ . Στο βιβλίο του Barnsley [1] εξετάζεται λεπτομερώς αυτή η θεώρηση.

(β) Μετά από  $k$  βήματα της ΙΜ έχουμε  $2^k$  αντίστροφες εικόνες. Αυτό το πλήθος γρήγορα γίνεται πολύ μεγάλο καθώς το  $k$  αυξάνεται και ένα πρόβλημα της μεθόδου είναι ότι κάποια μέρη του  $J$  τα επισκεπτόμαστε συχνώς και άλλα σπανίως, έχοντας ως αποτέλεσμα μία ανομοιόμορφη εικόνα. Προς αποφυγή τούτου, μία τροποποιημένη ΙΜ (MIIM) προσθέτει τα εξής:

Διαιρέστε τον εν λόγω τόπο σε ένα πλέγμα μικρών τετραγώνων. Μην επαναλάβετε περισσότερα σημεία από ένα τετράγωνο μόλις αυτό δεχθεί ένα προκαθορισμένο πλήθος επισκέψεων, έστω 10 φορές.

**Κατασκευή 2.** Μέθοδος Ανίχνευσης του Συνόρου (Boundary Scanning Method). Ξεκινείτε με ένα πλέγμα μικρών τετραγώνων (όπως και προηγουμένως, μπορούν να είναι εικονοστοιχεία). Επιλέξτε μία μεγάλη απόσταση  $R$  και ένα πλήθος επαναλήψεων  $N$ . Κινηθείτε διαμέσου των κορυφών των τετραγώνων γραμμή γραμμή, σηματοδύοντας ένα σημείο  $v$  ως τύπου  $\infty$  αν  $|f^k(v)| > R$  για κάποιο  $k \leq N$ , και ως τύπου  $0$  διαφορετικώς. Τώρα σκιάστε κάθε τετράγωνο που έχει κορυφές και των δύο τύπων (Σχ. 12).

*Βάση της μεθόδου.* Έχουμε  $J = \partial A(\infty) = \partial K$ , όπου  $K = \mathbb{C} \setminus A(\infty)$ , το γεμισμένο σύνολο Julia. Προσεγγιστικώς η  $|f^k(v)| > R$  (για κάποιο  $k \leq N$ ) επάγει ότι  $v \in A(\infty)$ , διαφορετικώς  $v \in K$ . Έτσι παίρνουμε ένα τετράγωνο που έχει δύο ειδών κορυφές και ανήκει στο κοινό σύνορο  $J$  των  $A(\infty)$  και  $K$ .

**Κατασκευή 3.** Μέθοδος Συνόλου Στάθμης (Level Set Method). Ονομάζεται επίσης και **Μέθοδος του Χρόνου Διαφυγής** και κάνει το  $J$  να ξεχωρίζει μέσα σ' ένα φάσμα χρωματικών στεφανιών (ή κορώνων), προσεγγίζοντάς το εκ των έσω ή έξωθεν. Πρωτίστως διαιρούμε τον εν λόγω τόπο σε ένα πλέγμα μικρών τετραγώνων, π.χ εικονοστοιχεία, τοποθετώντας ένα αντιπροσωπευτικό σημείο  $v$  μέσα σε κάθε τετράγωνο (έστω στο κέντρο). Επιλέξτε ένα πλήθος επαναλήψεων  $N$  (έστω 100) και αριθμείστε τα χρώματα που θα χρησιμοποιήσετε από το 1 έως το  $N$ , ει δυνατόν περιοδικώς. Για παράδειγμα παραχωρείστε τις 1–10 σε ένα χρώμα, τις 11–20 σε άλλο, κ.ο.κ.

- (A) Προσεγγίζοντας το  $J$  έξωθεν. Επιλέξτε μία μεγάλη ακτίνα  $R$ . Αν το  $f^N(v)$  βρίσκεται εντός του δίσκου  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$  τότε χρωματίστε το αντίστοιχο τετράγωνο μαύρο ('καμμία διαφυγή'), αλλιώς, αν το  $f^k(v)$  είναι η πρώτη διαφεύγουσα επανειλημμένη εικόνα, δώστε το  $k$  χρώμα σ' αυτό το τετράγωνο (Σχ. 13).
- (B) Προσεγγίζοντας το  $J$  έσωθεν. Αυτό απαιτεί ένα ελκυστικό σταθερό σημείο  $a$ . Επιλέξτε έναν μικρό αριθμό  $\varepsilon$ . Έστω  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$ . Αν το  $f^N(v)$  βρίσκεται εκτός του  $D$ , χρωματίστε το σημείο  $v$  μαύρο, διαφορετικώς, αν  $f^k(v)$  είναι η πρώτη επανειλημμένη εικόνα που εισέρχεται στο  $D$ , δώστε το χρώμα  $k$  στο αντίστοιχο τετράγωνο (Σχ. 14).

*Βάση της μεθόδου.* Η προηγούμενη προσέγγιση (A) βασίζεται στο ότι  $J = \partial A(\infty)$  και η (B) στο ότι  $J = \partial A(a)$  για ένα ελκυστικό σταθερό σημείο  $a$ . Έτσι η LSM μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαφορετική μορφή της BSM. Σίγουρα η LSM είναι πιο ισχυρή. Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι οι δύο προσεγγίσεις έχουν κοινό το ότι μετρούμε το πλήθος  $k(v, T)$  των εφαρμοζόμενων σ' ένα σημείο  $v$  επαναλήψεων ώστε να εισέλθουμε σε ένα **σύνολο στόχος**  $T$ . Οι περιπτώσεις (A), (B) έχουν αντίστοιχα σύνολα στόχους  $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$  και  $T = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$ . Είναι διαισθητικώς χρήσιμο να ονομάσουμε  $k(v, T)$  το **χρόνο διαφυγής** του  $v$ . Το **σύνολο της  $k$  στάθμης** αποτελείται από εκείνα τα σημεία με χρόνο διαφυγής  $k$ , χρωματισμένο με το ίδιο χρώμα. Αυτή η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί

όχι μόνο προς το σύνολο του Mandelbrot, αλλά και σε μία πλειάδα ρητών απεικονίσεων και συνόλων στόχων, συμπεριλαμβανομένης και κάποιας προσέγγισης προς τις τοιχογραφίες τύπου Escher (βλ. [13]). Είναι μερικές φορές χρήσιμο να τυποποιούμε κατά κάποιο τρόπο περισσότερο καθορίζοντας ένα πηγαίο σύνολο για τα σημεία που θα επαναλαμβάνονται, όπως το  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$  για το σύνολο  $M$ .

Ακόμα κι αν γνωρίζουμε λίγα σχετικά με ηλεκτροστατική, ας δεχθούμε ότι αν ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος  $D$  δίνει ένα ηλεκτρικό φορτίο ομοιομόρφως κατανεμημένο, τότε μία επονομαζόμενη συνάρτηση δυναμικού  $\phi(x, y)$  είναι σταθερή σε οιοδήποτε ομόκεντρο κύκλο  $C$  εκτός του  $D$ .

**Κατασκευή 4.** Μέθοδος Συνεχούς Δυναμικού (Continuous Potential Method).

Είναι ανάλογη της LSM, αλλά χρησιμοποιεί μία συνάρτηση δυναμικού αντί για χρόνους διαφυγής. Το δυναμικό του  $K_c = K(f_c)$  αναπαρίσταται ως μία λεία παραμετρική επιφάνεια  $pot_c: \mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  η οποία δίνεται απ' τη γραφική παράσταση της

$$g_c(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |z_k|}{2^k}, \quad (1)$$

$z_k = z_{k-1}^2 + c$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , και δίνεται προσεγγιστικώς απ' την

$$pot_c(z_0) = \left( z_0, \frac{\log(|z_n|)}{2^n} \right)$$

όπου

$$z_k = z_{k-1}^2 + c, k = 1, 2, \dots, n, \quad n = k(z_0, T)$$

και

$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1/\varepsilon\},$$

για  $\varepsilon$  αρκετά μικρό (Σχ. 15).

**Κατασκευή 5.** Μέθοδος Εκτιμήτριας της Απόστασης (Distance Estimator Method).

(α) Ο Yuval Fisher στο [13], χρησιμοποιεί μία εκτιμήτρια για την απόσταση ενός σημείου από το  $J$  ή το  $M$  και έτσι γεμίζει δίσκο δίσκο τον τόπο εκτός του συνόλου.

(β) [J. Milnor και W. Thurston] Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δυναμικού  $G(c)$  μπορεί να δείξει κανείς ότι για κάποιο  $c \notin M$  η απόσταση  $d(c, M)$  του  $c$  απ' το σύνολο του  $M$  μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$d(c, M) \leq \frac{2 \sinh G(c)}{|G'(c)|}.$$

Για να προσεγγισθούν οι  $G(c)$  και  $|G'(c)|$  χρησιμοποιούνται η εξίσωση (1) και οι διαφορικές εξισώσεις των Cauchy-Riemann οπότε

$$\frac{\sinh G(c)}{|G'(c)|} \approx \frac{|z_n|}{|z'_n|} \log |z_n|, \quad \text{όπου } z'_n = \frac{dz_n}{dc}.$$

Καλύτερα αποτελέσματα επιτυγχάνουμε με συνεκτικά σύνολα (Σχ. 16).

## 7.2 Κατασκευάζοντας το σύνολο του Mandelbrot

**Κατασκευή 1.** Μέθοδος Συνόλου Στάθμης (Level Set Method).

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ακριβώς ανάλογος της LSM για το σύνολο  $J$ . Σταθεροποιούμε ένα τετράγωνο πλέγμα εικονοστοιχείων, επιλέγουμε έναν μεγάλο ακέραιο  $N_{\max}$  (ευκρίνεια επανάληψης) και ένα αυθαίρετο σύνολο  $T$  (σύνολο στόχος) που περιέχει το  $\infty$ , έτσι ώστε  $M \subset \mathbb{C} \setminus T$ . Τότε

$$k(c, T) = \begin{cases} k, & \text{αν } f_c^i(0) \notin T \text{ και } f_c^k(0) \in T \text{ για } 0 \leq i < k \text{ και } 1 \leq k \leq N_{\max} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(Σχ. 17).

**Κατασκευή 2.** Μέθοδος Συνεχούς Δυναμικού (Continuous Potential Method).

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ακριβώς ανάλογος της CPM για το σύνολο  $J$ , διότι χρησιμοποιούμε την Εξ. (1) για μια λεία παραμετρική επιφάνεια  $Pot_c: \mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  του δυναμικού που δίνεται από τη γραφική παράσταση της  $g_c$  και δίνεται προσεγγιστικώς από την

$$Pot(c) = \left( c, \frac{\log(|z_n|)}{2^n} \right),$$

όπου

$$z_k = z_{k-1}^2 + c, z_0 = c, k = 1, 2, \dots, n, \quad n = k(c, T)$$

και

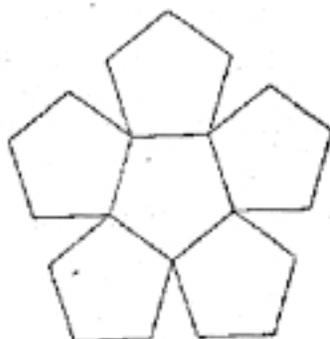
$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1/\varepsilon\}, \quad \varepsilon \text{ μικρό.}$$

Καμμία μέθοδος δεν είναι καλή για κάθε κατάσταση και οι διάφορες μορφές των μεθόδων είναι πολύτιμες για την παραγωγή ενός μεγάλου εύρους εξαιρετικών εικόνων.

## Αναφορές

- [1] Barnsley M.F., *Fractals everywhere*, 2nd ed., Academic Press Professional, San Diego, 1993.
- [2] Barnsley M.F. and Hurd L.P., *Fractal image compression*, AK Peters, Wellesley, 1992.
- [3] Cherbit G. (ed.), *Fractals, non-integral dimensions and applications*, Wiley, Chichester, 1991.

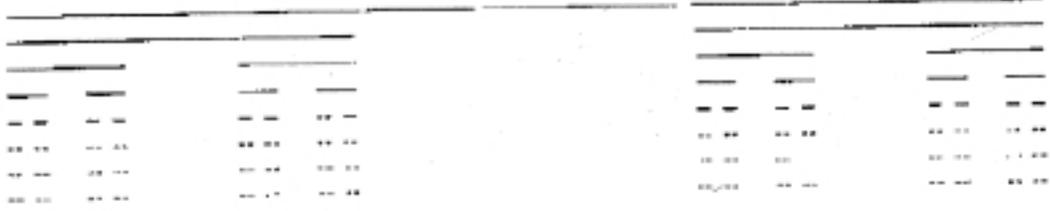
- [4] Devaney R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed., Addison–Wesley, Reading, 1989.
- [5] Falconer K.J., *The geometry of fractal sets*, Cambridge Univ. Press, London, 1985.
- [6] Falconer K.J., *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, Wiley, Chichester, 1990.
- [7] Feder J., *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
- [8] Gleick J., *Chaos: Making a new science*, Viking Penguin, New York, 1987.
- [9] Mandelbrot B.B., *Die fraktale Geometrie der Natur*, Birkhäuser, Basel, 1987.
- [10] Μπούντης Α.Χ., *Δυναμικά συστήματα και χάος*, Τόμοι Α' και Β', Εκδόσεις Βούλγαρη, Πάτρα, 1989.
- [11] Oliver D. and Hoviss D., *Fractal graphics for windows*, Sams Publishing, Indianapolis, 1994.
- [12] Peitgen H.–O and Richter P.H., *The beauty of fractals*, Springer–Verlag, New York, 1986.
- [13] Peitgen H.–O. and Saupe D.(eds), *The science of fractal images*, Springer–Verlag, New York, 1988.



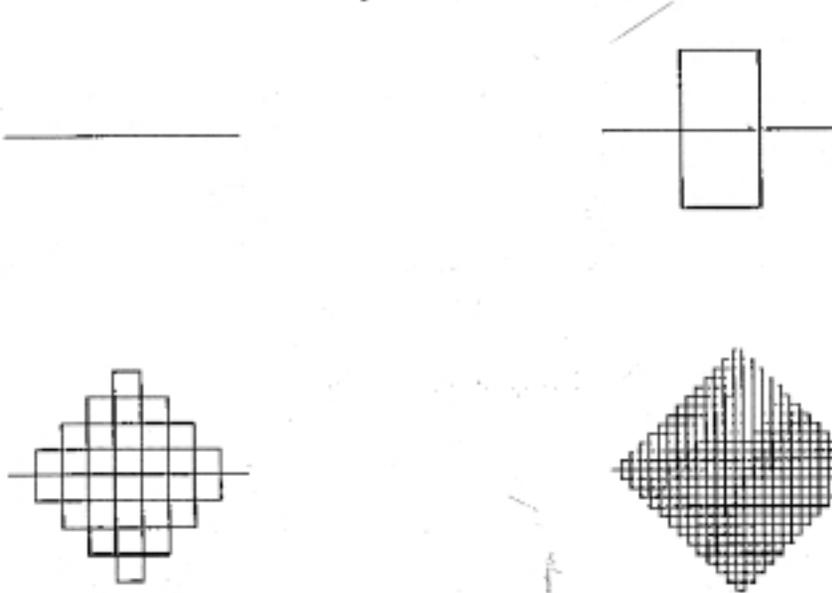
Σχ. 1 Πεντάγωνο Dürer



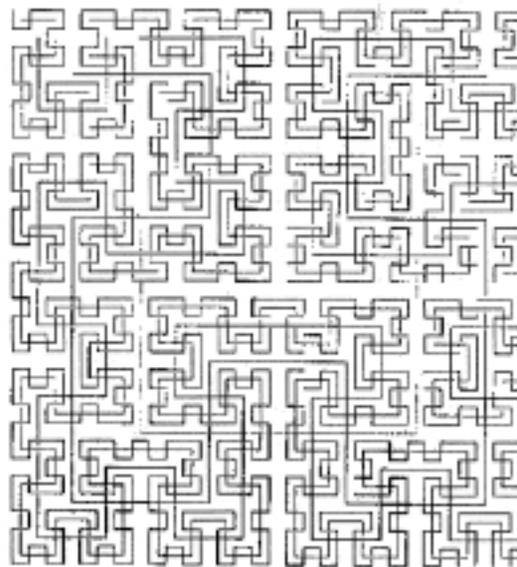
Σχ. 2 "Ψάρια και λέπια" Ξυλογραφία, E. C. ESCHER



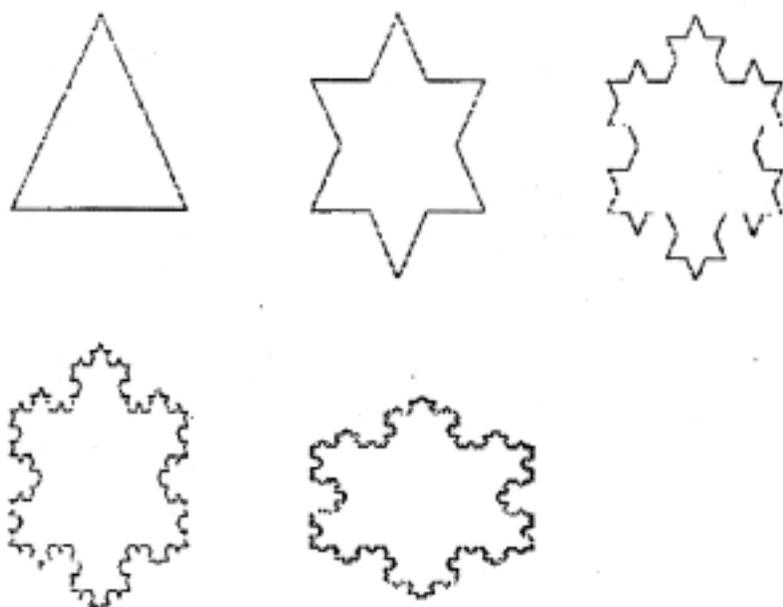
Σχ. 3 Τριαδικό Σύνολο Cantor



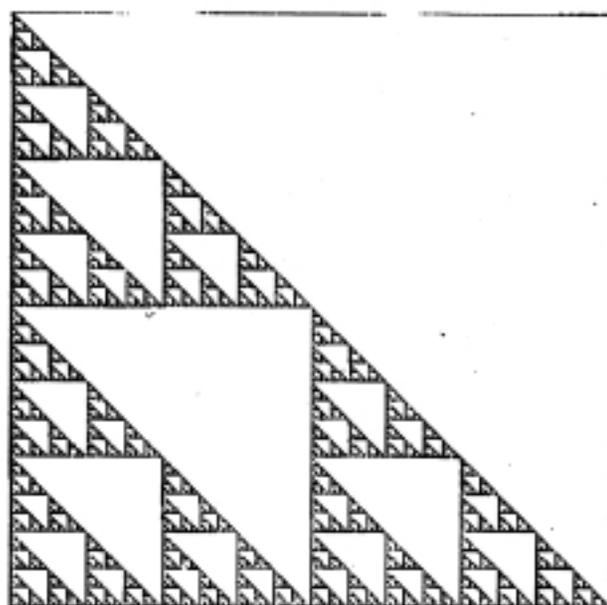
Σχ. 4 Καμπύλη Peano



Σχ. 4 Καμπύλη Hilbert



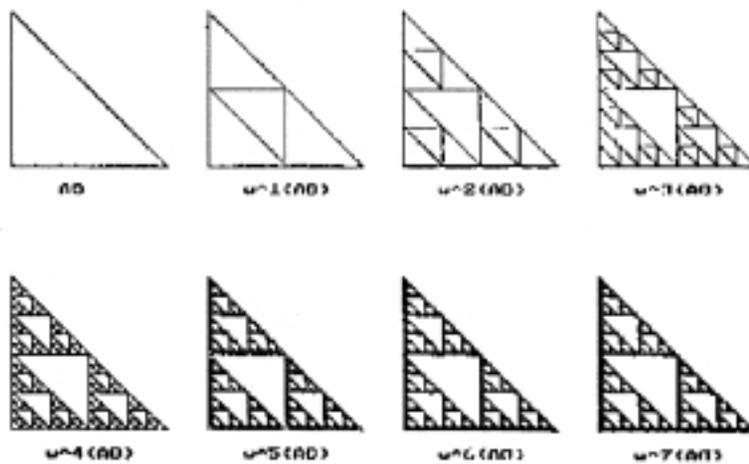
Σχ. 4 Καμπύλη von Koch



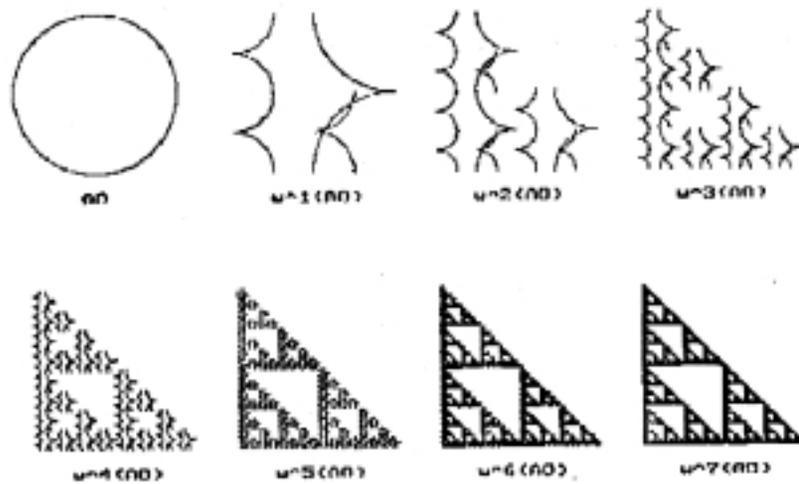
Σχ. 5 Τρίγωνο Sierpinski



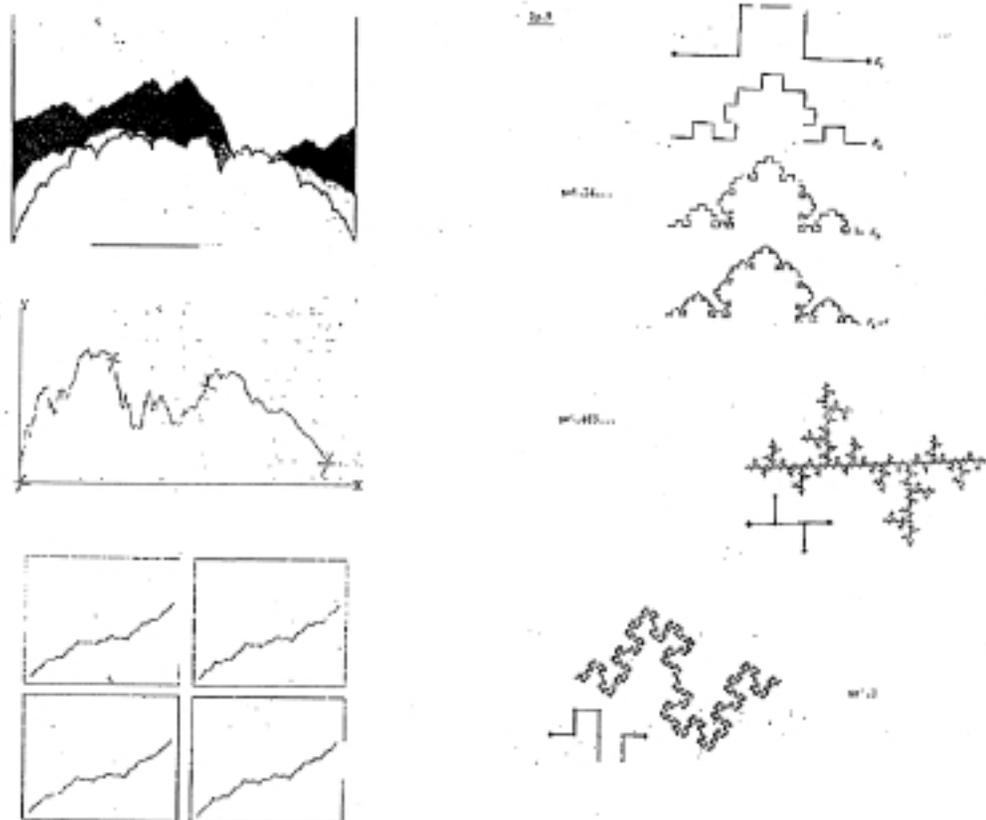
Σχ. 6 Σπόγγος Menger



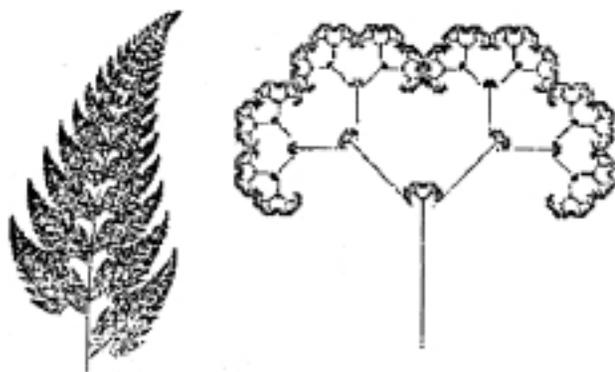
Σχ. 7 Κατασκευή Τριγώνου Sierpinski με βοήθεια Συστήματος Επαναλαμβανομένων Συναρτήσεων



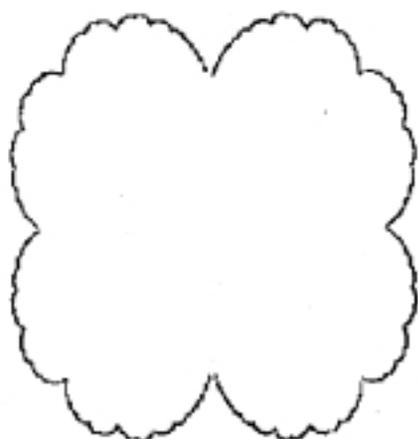
Σχ. 7



Σχ. 8 Fractal Παρεμβολή



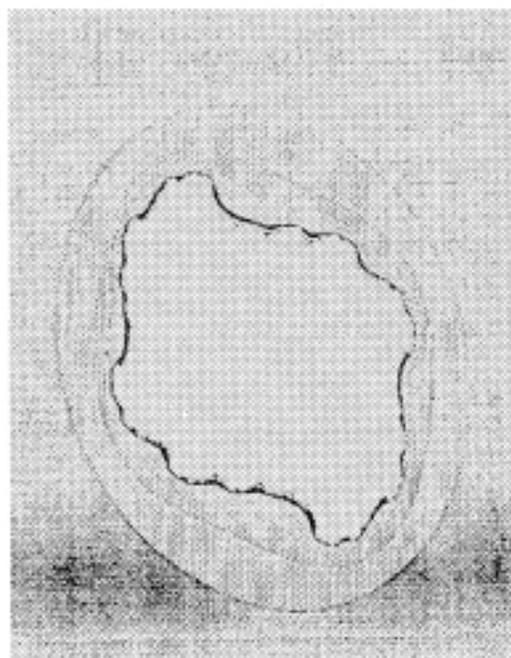
Σχ. 10 Κατασκευές μέσω του Αλγόριθμου Τυχαίων Επαναλήψεων



Σχ. 11 Σύνολο Julia (IM)



Σχ. 12 Σύνολο Julia (BSM)



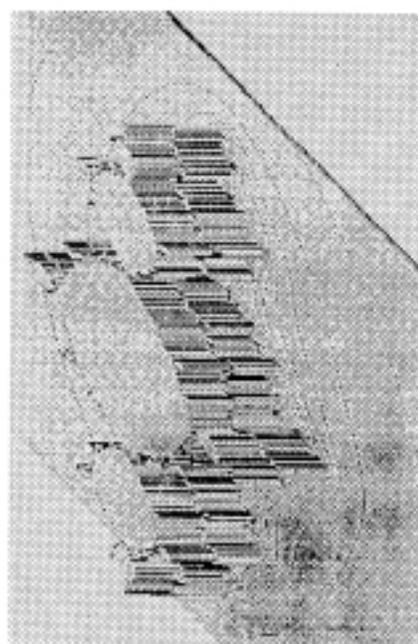
Σχ. 13 Σύνολο Julia (LSM)



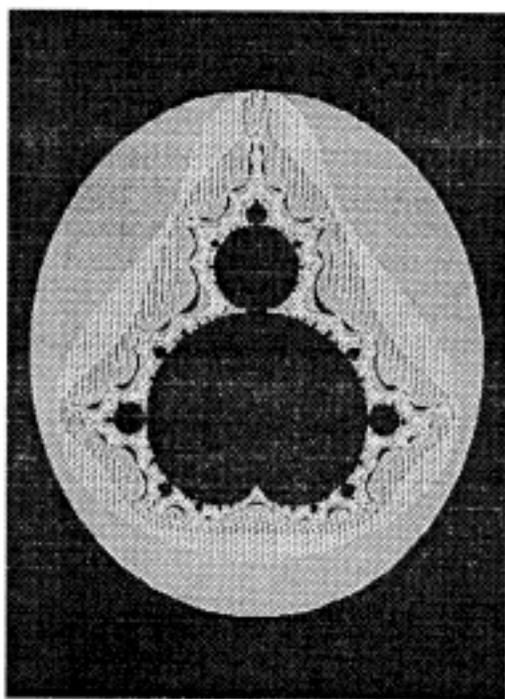
Σχ. 14 Σύνολο Julia (LSM)



Σχ. 16 Σύνολο Julia (DEM)



Σχ. 15 Σύνολο Julia (CPM)



Σχ. 17 Το σύνολο του Mandelbort (LSM)