

# ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

**ΜΑΘΗΜΑ:** Άλγεβρα

**ΤΑΞΗ:** Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΥΔΗ:** Πραγματικοί Αριθμοί - Ιδιότητες πράξεων – Δυνάμεις - Ταυτότητες

## A. Βασικές Πράξεις

1. Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση  
 $3(x - 2y) - 2(-4y - 5(2x - 3y) + 4xy) - 3(y - 2x)$ .

και να βρείτε την αριθμητική της τιμή για  $x = -1$  και  $y = \frac{2}{3}$ .

2. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

$$\text{i)} \frac{3}{2} - \frac{1}{5 + \frac{1}{2}}$$

$$\text{ii)} \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}$$

$$\text{iii)} \frac{5 + \frac{3}{1 + \frac{2}{5}}}{4 - \frac{2}{1 + \frac{3}{5}}}$$

3. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις και να βρείτε την αριθμητική τους τιμή για  $\alpha = \frac{-1}{2}$  και  $\beta = 0.01$ .

$$\text{i)} 3(2\alpha - 3\beta) - 4(-3\alpha + 2(\alpha + 2\beta - 1)),$$

$$\text{ii)} -2(-2\beta + \alpha(-2\beta + 1)) + 3(-2(\alpha + \beta) + (-2\alpha - 4\beta + 3)).$$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

$$-3(2(1 - 3x) - 3(-3(2x - 1) - 4(3x - 5) - 2x + 1)).$$

5. Αν  $x = 0.3$  και  $y = -1.17$  να βρείτε τον αντίστροφο του αριθμού  $a = \frac{5x - 3(2y - 2x)}{1 + \frac{x}{y}}$ .

6. Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζονται οι παραστάσεις;

$$\text{i)} \frac{5x - 10}{x}$$

$$\text{ii)} \frac{x}{(x - 1)(x + 5)}$$

$$\text{iii)} \frac{4x^2 - 1}{x(3x - 2)}$$

7. Να βρείτε τους περιορισμούς για το  $\alpha$  ώστε να ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις.

$$\text{i)} \frac{5\alpha - 3}{\alpha^2 + 1}$$

$$\text{ii)} \frac{2 - \frac{1}{\alpha}}{5 + \frac{2}{\alpha}}$$

$$\text{iii)} \frac{\alpha + \frac{3}{5}}{1 - \frac{2}{2\alpha + 1}}$$

8. Ποιός αριθμός έχει αντίθετο τον εαυτό του;

9. Ποιός αριθμός έχει αντίστροφο τον εαυτό του;

10. Αν  $x = 1$ , βρείτε το λάθος στον παρακάτω συλλογισμό:

$$x \cdot x = x \cdot 1 \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x - 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow 1 = 0.$$

11. Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ίσοι και διάφοροι του μηδενός, βρείτε το λάθος στον παρακάτω συλλογισμό.

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \alpha\beta - \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \beta(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \beta \Leftrightarrow \alpha = 0$$

12. Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\alpha - 5\gamma}{2\beta - 5\delta}$ .

13. Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha\beta + \gamma\delta}$ .

14. Τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα 27. Να βρείτε ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί αν είναι γνωστό πως είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 2, 3, 4.

15. Τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα 180. Να υπολογίσετε αυτούς τους αριθμούς λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 1, 3, 5.

16. Αν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha}{\delta} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$ .

17. Αν  $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ , να βρείτε το λόγο  $\frac{7x - 4y}{3x + y}$ .

18. Απλοποιήστε τις παρακάτω παραστάσεις

i)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

ii)  $(-2)^3 \cdot (-0.5)^{-2}$

iii)  $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 0.1^{-3}\right) : (-10)^2$

19. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για  $x=0.01$  και  $y=10^{-1}$ .

$$A = \left(\left(x^2 y^{-1}\right)^2 x^{-1} (y^3)^{-2}\right)^{-1} : \left(\frac{y^{-2}}{x^4}\right)^{-3}$$

20. Υπολογίστε τους αριθμούς

i)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{25} : \left(\frac{4}{3}\right)^{-22}$

ii)  $\left(0.5^{-3} \cdot \frac{1}{32}\right)^{-16} \cdot \left(6.4^{-1} : \left(\frac{1}{16}\right)^{-2}\right)^{-3}$

21. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για  $x=10^{-3}$  και  $y=-0.1^{-2}$ .

$$(x^3 y^{-1})^2 : (x^{-1} y \cdot (x^3 y^{-3-1}))^{-2}$$

22. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i)  $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^5 \cdot \left(\frac{4y}{x}\right)^6$

ii)  $\left(\frac{3a^2 b^{-1}}{2ab^3}\right) : \left(\frac{2ab^{-2}}{3a^3 b}\right)$

23. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης, αν  $a = 5^{-2}$ ,  $b = \frac{1}{10}$ ,  $c = 0.2$ .

$$\left( \frac{a^2bc^3}{a^{-1}b^2c^4} \cdot \frac{(a^{-1}bc^{-2})^2}{(bc^{-2})^{-3}} \right) : (a^3b^{-1}c^2)^{-2}$$

## B. Ταυτότητες

24. Να κάνετε τις πράξεις

i)  $5x(x-1)^2 - 3x(2x-3)^2 + (x-1)^3 - (2x+1)^3 + 2x(4x-3)(4x+3)$

ii)  $(1-2x)^2 - x(-x-1)^2 + (2-3x)(2+3x)$

iii)  $(a+2b)^3 - (2a-b)^3 - (a-b)^2(a+b)$

25. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(x^2 - x + 1)^2 - 2(2x - x^2 - 3)^2 + 3x(x - 2)^3$$

26. Να αποδείξετε την ισότητα:

$$(a+b+c)^2 - (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 - (a-b-c)^2 = 8ab$$

27. Να αποδείξετε την ισότητα:

$$(a^2 - b^2) + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

28. Δείξτε ότι

$$(a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2 + 2ab)^2$$

29. Αν  $a + b = 5$  και  $ab = 4$ , να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i)  $a^2 + b^2$

ii)  $a^4 + b^4$

iii)  $a^3 + b^3$

iv)  $a^6 + b^6$

30. Αν ισχύει ότι  $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2$ , να δείξετε ότι  $x=y$ .

31. Αν  $1 + \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = b$ , με  $ab \neq 0$ , να δείξετε ότι  $a = b$ .

32. Αν  $a - \frac{1}{a} = 5$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $a^2 + \frac{1}{a^2}$ .

33. α) Αποδείξτε ότι ισχύει η ταυτότητα:  $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ .

β) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών γράφεται πάντα ως διαφορά δύο τετραγώνων.

γ) Εφαρμόστε την παραπάνω ιδιότητα στο γινόμενο  $17 \cdot 13$ .

34. Αν  $a^2 + b^2 + 2 = 2(a+b)$ , να βρείτε τους  $a$  και  $b$ .

35. Αν  $x + y = 1$ , να δείξετε ότι  $x^3(y+1) - y^3(x+1) = x - y$ .

36. Αν  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 4$ , με  $ab \neq 0$ , να δείξετε ότι  $a = b$ .

37. Αν  $a + b = 1$ , να δείξετε ότι  $a^3 + b^3 + 3ab = 1$ .

38. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

39. Αν  $a^2 + b^2 = 1$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$y = (3a - 4a^3)^2 + (3b - 4b^3)^2$$

40. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i)  $7(3x+1)^2 - 28(x-2)^2$       ii)  $(a-1)^3(a^2-4) + 4 - a^2$       iii)  $x^2 - 2xy + y^2 - x + y$

iv)  $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$       v)  $(2a-3b)(x-3y) + (3a-b)(-x+3y)$

vi)  $x^3 + x^2 - x - 1$       vii)  $(2x-3)(x+1) + (3-2x)(2x+8) + 4x^2 - 9$

viii)  $a^4b - ab^4 + b^3 - a^3$

41. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα.

i)  $\frac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 + 4x}$       ii)  $\frac{a^5 - a^3 + a^2 - 1}{a^3 + a^2 - a - 1}$

42. Αν  $ax^2 + ax + a = bx^2 + bx + b$  να δείξετε ότι  $a = b$ .

43. Να κάνετε τις πράξεις  $\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)$ .

44. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

i)  $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$       ii)  $\frac{4k - k^3}{k^2 - 4k + 4}$       iii)  $\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$

iv)  $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$

## Γ. Ιδιότητες Αριθμών

45. Αν  $x \in \mathbb{Z}$  και ο αριθμός  $x^3$  είναι περιττός, να δείξετε ότι και ο  $x$  είναι περιττός.

46. Να αποδείξετε ότι η διαφορά των κύβων δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι άρτιος, αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4.

47. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα 4 διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το δύο, αλλά όχι με το 4.

48. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο 4 διαδοχικών ακεραίων αυξημένο κατά 1 γίνεται τετράγωνο ακέραιου.

49. Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 1, 2, 4 να δείξετε ότι το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 7.

50. Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων είναι περιττός αριθμός.

51. α) Να δείξετε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού παίρνει τη μορφή  $8n+1$  (όπου  $n$  ακέραιος).  
β) Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο περιττών αριθμών διαιρείται με το 8.