ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ FRACTALS

Ασκήσεις III

1. $A = \{a\}, a \in R^d$. Αποδείξτε ότι $dim_H A = dim_B A = 0$.

   Απόδειξη. Το $H^0(E)$ είναι το πλήθος των σημείων του $E \subseteq R^d$, δηλαδή το H^0 είναι το αριθμητικό μέτρο.
   Αν $A = \{a\}$ έχουμε $H^0(A) = 1$, επομένως απο τον ορισμό της διάστασης του Hausdorff έπεται οτι $dim_H A = 0$.
   Εξάλλου, για το μονοσύνολο $A = \{a\}$ ο ελάχιστος αριθμός κύβων του R^d, πλευράς δ που το καλύπτουν είναι $N_\delta(A) = 1$.

   Άρα $logN_\delta(A) = 0$, για κάθε $\delta>0$, οπότε $dim_B(A) = lim_{\delta\to 0} \frac{logN_\delta(A)}{-log\delta} = 0$.

   Σχόλιο: Λόγω του ότι $dim_H(E) \leq dim_B(E)$ για $E \subseteq R^d$, μας αρκούσε να αποδείξουμε οτι $dim_B(\{a\}) = 0$.

2. Αν $A \subseteq B \Longrightarrow dimA \leq dimB$ (όπου $dim : dim_H$ ή dim_B).

   Απόδειξη.

   - Για $t \geq 0$ θα έχουμε $H^t(A) \leq H^t(B)$. Άρα
     $\{t \geq 0 : H^t(B) = 0\} \subseteq \{t \geq 0 : H^t(A) = 0\}$ και

     $$dim_H(A) = inf\{t \geq 0 : H^t(A) = 0\} \leq inf\{t \geq 0 : H^t(B) = 0\} = dim_H(B).$$

   - Εφ'οσον $A \subseteq B$ θα έχουμε $N_\delta(A) \leq N_\delta(B)$, όπου $N_\delta(\cdot)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός κύβων πλευράς δ που καλύπτουν ένα σύνολο.
     Άρα $dim_B(A) = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{logN_\delta(A)}{-log\delta} \leq \lim_{\delta\to 0^+} \frac{logN_\delta(B)}{-log\delta} = dim_B(B)$.

3. Έστω $E, F \subseteq R^d$ και $f : E \to F$ απεικόνιση τέτοια ώστε

   $$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, x, y \in E.$$

   Αποδείξτε οτι $dimf(E) \leq dimE$ (οπου $dim : dim_H$ ή dim_B).

   Απόδειξη.

   - Για τη διάσταση Hausdorff.
     Έχουμε οτι $\delta(f(U)) \leq c\delta(U), U \subseteq R^n$. Επιπλέον, $H^t_{c\epsilon}(f(E)) = inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(V_i) : f(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i, \delta(V_i) \leq c\epsilon\} \leq$
     $inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(f(U_i)) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \delta(U_i) \leq \epsilon\} \leq cH^t_\epsilon(E)$. Άρα,

     $$H^t(f(E)) \leq cH^t(E).$$

     Επομένως,

     $$dim_H f(E) = sup\{t : H^t(f(E)) = +\infty\} \leq sup\{t : H^t(E) = +\infty\} = dim_H E.$$

- Για τη διάσταση Box.

  Εαν N_δ είναι ο ελάχιστος αριθμός κύβων πλευράς δ που καλύπτει το E, τότε ο ελάχιστος αριθμός κύβων πλευράς $\delta' = \delta c$ που καλύπτει το $f(E)$ είναι $N_{\delta c} \leq N_\delta$. Άρα,

$$dim_B f(E) = \lim_{\delta' \to 0} \frac{logN_{\delta'}}{-log\delta'} \leq \lim_{\delta \to 0} \frac{logN_\delta}{-log\delta} = dim_B E.$$

4. (α′) $dim_H(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = sup\{dim_H E_n : n \in N\}$.

   (β′) Αν είναι αριθμήσιμο σύνολο, τότε $dim_H A = 0$ και $H^s(A) = 0, \forall s>0$.

   (γ′) $dim_H Q = 0$.

   Απόδειξη. (α′) $dim_H E_n \leq dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n), \forall n \in N$ (απο άσκηση 1). Άρα

$$sup\{dim_H E_n : n \in N\} \leq dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n) \quad (1)$$

   Αντίστροφα, αν $sup\{dim_H E_n : n \in N\}<t<dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n)$, τότε από την πρώτη γνήσια ανισότητα προκύπτει οτι $H^t(E_n) = 0, \forall n \in N$. Επομένως, $H^t(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} H^t(E_n) = 0$, άρα $t \geq dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n)$, που είναι άτοπο. Συνεπώς,

$$dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n) \leq sup\{dim_H E_n : n \in N\} \quad (2)$$

   Απο (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

   (β′) Αφού το A είναι αριθμήσιμο, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}$. Απο (α′), έχουμε

$$dim_H(A) = dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i) = sup\{dim_H(\{a_i\}), i \in N\} = 0$$

   αφού για κάθε μονοσύνολο $\{a\}, dim_H(\{a\}) = 0$.

   Τώρα, αφού $dim_H A = 0 = inf\{t \geq 0 : H^t(A) = 0\}$, έπεται οτι $\forall s>0, H^s(A) = 0$ (Απο τον ορισμό της dim_H).

   (γ′) $dim_H Q = 0$, απο το (β) διότι το Q είναι αριθμήσιμο.

5. (α′) Έστω $A = [a, b]^d, a<b$. Αποδείξτε οτι $dim_H A = dim_B A = d$.

   (β′) Έστω $S_d = \overline{S}(a, r) = \{x \in R^d : ||x - a|| \leq r\}, (r>0, a \in R^d)$. Αποδείξτε οτι $dim_H S_d = dim_B S_d = d$.

(γ′) $dim_H R^d = d$.

Απόδειξη. (α′) Ο ελάχιστος αριθμός κύβων πλευράς $\delta = \frac{b-a}{n}$ που καλύπτει τον $A = [a,b]^d$ είναι n^d. Άρα $dim_B A = lim_{\delta\to 0}\frac{logN_\delta(A)}{-log\delta} = d$

Επειδή $H^d(A) = c_d\lambda_d(A) \in (0,+\infty)$, έχουμε οτι $dim_H A = d$.

(β′) Για τη σφαίρα S_d υπάρχει κύβος A με $S_d \subseteq A$. Άρα $dim_B(S_d) \leq dim_B(A) = d$. Επειδή $H^d(S_d) \in (0,+\infty)$ έχουμε οτι $dim_H S_d = d$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε οτι $d = dim_H S_d \leq dim_B S_d \leq d$. Δηλαδή $dim_H S_d = dim_B S_d = d$.

(γ′) $R^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{S_Q}(0,n)$, άρα $dim_H R^d = sup\{dim_H \overline{S(0,n)}\} = d$ (από την άσκηση 3 και το (β′)).

6. Έστω $A \subseteq R^d$, με $dim_H A = s \in (0,1)$. Τότε το A είναι ολικά μη συνεκτικό [1].

Απόδειξη. Έστω $B \subseteq A, B$ συνεκτικό και $x_0, y_0 \in B$ με $x_0 \neq y_0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : B \longrightarrow [0,+\infty],$$

με $f(x) = |x - x_0|$.

Τότε, $|f(x) - f(y)| = ||x - x_0| - |y - y_0|| \leq |x - y|$. Επομένως, αφού η f ικανοποιεί τις υποθέσεις της Άσκησης 3, έχουμε

$$H^s(f(B)) \leq H^s(B) \Longrightarrow dim_H(f(B)) \leq dim_H B \leq s = dim_H A < 1.$$

Άρα $H^1(f(B)) = 0 \Longrightarrow \lambda_1(f(B)) = 0$. Απο αυτό έπεται οτι

$$\exists r : 0 < r < f(y_0), r \notin f(B).$$

[Πράγματι, αν δεν υπήρχε τέτοιο r, τότε $\forall r : 0 < r < f(y_0), r \in f(B)$, και άρα $[0, f(y_0)] \subseteq f(B) \Longrightarrow 0 < \lambda_1([0, f(y_0)]) \leq \lambda_1(f(B))$. Άτοπο, διότι $\lambda_1(f(B)) = 0$.]

Άρα

$$B = B_1 \cup B_2, B_1 = \{x \in B : f(x) < r\}, B_2 = \{x \in B : f(x) > r\}$$

[1]

Ορισμός 1 *: A είναι συνεκτικό ανν δεν υπάρχουν μη κενά B, C ανοικτά σύνολα στον A τέτοια ώστε $A = B \cup C$.*

Ορισμός 2 *: A ολικά μη συνεκτικό ανν $\forall$ συνεκτικό μη κενό $B \subseteq A \Longrightarrow B =$ μονοσύνολο.*

όπου B_1, B_2 είναι ανοικτά στο B.

Τότε το B είναι ένωση ανοικτών υποσυνόλων του, με το x_0 να βρίσκεται στο $B_1 (f(x_0) = 0 < r$ και το y_0 να βρίσκεται στο $B_2, (f(y_0) > r)$, πράγμα άτοπο διότι το B είναι συνεκτικό εξ υποθέσεως.

Επομένως, το B θα πρέπει αναγκαστικά να είναι μονοσύνολο. Άρα το A είναι ολικά μη συνεκτικό.

7. Έστω $A \subseteq R^d$ φραγμένο σύνολο με $s = dim_B A > 0$ και $lim_{\delta \to 0^+} N_\delta \delta^t \in [0, +\infty]$ για κάθε $t > 0$.

   Αποδείξτε οτι

   $$dim_B A = inf\{t : lim_{\delta \to 0^+} N_\delta \delta^t = 0\} = sup\{t' : lim_{\delta \to 0^+} N_\delta \delta^{t'} = +\infty\}.$$

   Γενικά :

   $$\overline{dim}_B A = inf\{t : limsup N_\delta \delta^t = 0\} = sup\{s : limsup N_\delta \delta^s = +\infty\}$$

   $$\underline{dim}_B A = inf\{t' : liminf N_\delta \delta^t = 0\} = sup\{s' : liminf N_\delta \delta^{s'} = +\infty\}.$$

   Απόδειξη. Η συνάστηση $\phi(t, \delta) = N_\delta(A) \delta^t,\ t > 0, 0 < \delta < 1$ είναι φθίνουσα ως προς t.

   Εξ άλλου, αν

   $$\lim_{\delta \to 0^+} \phi(t, \delta) = \begin{cases} +\infty, & \text{τότε} \ \ \lim_{\delta \to 0^+} \phi(t', \delta) = +\infty \quad \text{για} \ \ 0 < t' < t, \\ 0, & \text{τότε} \ \ \lim_{\delta \to 0^+} \phi(t'', \delta) = 0 \quad \text{για} \ \ t > t'', \\ c(\in (0, +\infty)), & \text{τότε} \ \ \lim_{\delta \to 0^+} \phi(t', \delta) = \begin{cases} +\infty, \ \text{για} \ \ t' < t, \\ 0, \ \text{για} \ \ t' > t. \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

   Έχουμε οτι $s = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{log N_\delta(A)}{-log \delta} \in (0, d]$.

   Για $0 < \epsilon < s$ υπάρχει $\delta_0 = \delta_0(\epsilon) > 0$ ωστε $-\epsilon < \frac{log N_\delta(A)}{-log \delta} - s < \epsilon$, για $0 < \delta < \delta_0$.

   Επομένως, $\delta^\epsilon < N_\delta(A) \delta^s = \phi(s, \delta) < \delta^{-\epsilon}$, για $0 < \delta < \delta_0$.

   Άρα

   $$\phi(s + \epsilon, \delta) = \phi(s, \delta) \delta^\epsilon < 1, \quad \phi(s - \epsilon, \delta) = \phi(s, \delta) \delta^{-\epsilon} > 1 \tag{4}$$

   για $0 < \delta < \delta_0$.

   Απο τις (3) και (4) έχουμε οτι $\lim_{\delta \to 0^+} \phi(t, \delta) = 0$ για $t > s$ και

   $\lim_{\delta \to 0^+} \phi(t, \delta) = +\infty$ για $t < t'$ για κάποιο $0 < t' < s$.

   Απο την (3) έχουμε οτι υπάρχει το πολύ ένα t' ώστε $\lim_{\delta \to 0^+} \phi(t', \delta) \in (0, +\infty)$. Άρα υπάρχει το $s_0 = inf\{t > 0 : \lim_{\delta \to 0^+} N_\delta(A) \delta^t = 0\} = sup\{t' > 0 : \lim_{\delta \to 0^+} N_\delta(A) \delta^{t'} = +\infty\}$.

Απο τον τρόπο ορισμού του s_0, για $\epsilon>0$

$$N_\delta(A)\delta^{s_0+\epsilon}<1, \quad N_\delta(A)\delta^{s_0-\epsilon}>1,$$

αν $0<\delta<\delta_1$.

Άρα, λογαριθμώντας παίρνουμε $-\epsilon<\frac{logN_\delta(A)}{-log\delta} - s_0<\epsilon$, για $0<\delta<\delta_1$.

Οπότε, $dim_B A = s_0$.

8. (α′) Αν $A, B \subseteq R^d$ φραγμένα σύνολα, αποδείξτε οτι $dim_B(A \cup B) = max(dim_B A, dim_B B)$.
   (β′) $dim_B A = dim_B \overline{A}$.
   (γ′) $dim_B(Q \cap [0, 1])>dim_H(Q \cap [0, 1]) = 0$.
   (δ′) Ισχύει οτι $dim_B(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) = sup\{dim_B E_n : n \in N\}, E_n \subseteq R^d$ φραγμένα σύνολα.

   Απόδειξη. (α′) Απο την άσκηση 1, έχουμε $dim_B A \leq dim_B(A \cup B)$ και $dim_B B \leq dim_B(A \cup B)$. Άρα $max(dim_B A, dim_B B) \leq dim_B(A \cup B)$.

   Αντίστροφα, επειδή ισχύει

$$N_\delta(A \cup B)\delta^s \leq N_\delta(A)\delta^s + N_\delta(B)\delta^s, s>0$$

   αν υπήρχε, $t : dim_B A, dim_B B<t<dim_B(A \cup B)$, τότε $lim_{\delta\to0^+} N_\delta(A)\delta^t = lim_{\delta\to0^+} N_\delta(B)\delta^t = 0$, ενώ $lim_{\delta\to0^+} N_\delta(A \cup B)\delta^t = \infty$, λόγω της άσκησης 7. Άτοπο. Άρα $dim_B(A\cup B) = max(dim_B A, dim_B B)$.

   (β′) Επειδή $N_\delta(A) = N_\delta(\overline{A})$ έχουμε οτι $dim_B A = dim_B \overline{A}$.

   (γ′) $dim_B(Q \cap [0, 1]) = dim_B([0, 1]) = 1>dim_H(Q \cap [0, 1]) = 0$, (από (β) και άσκηση 4).

   (δ) Όχι. Για παράδειγμα, $Q\cap[0, 1] = \{q_n : n \in N\}$ με $dim_B(\{q_n\}) = 0$, ενώ $dim_B(\bigcup_{n=1}^\infty \{q_n\}) = 1$.

9. Έστω $E \subseteq R^d$ φραγμένο, $E+\tau =: E+\tau\widehat{S}(0, 1), \tau>0$ και $s = dim_B E>0$. Αποδείξτε οτι $dim_B E = d - \lim_{\tau\to0^+} \frac{log\lambda_d(E+\tau)}{log\tau}$, όπου λ_d είναι το μέτρο Lebesque. (**Ορισμός Minkowski**).

   Απόδειξη. Αν το E μπορεί να καλυφθεί απο $N_\delta(E)$ το πλήθος σφαίρες ακτίνας δ, τότε το E_δ μπορεί να καλυφθεί απο τις ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας 2δ. Άρα

$$vol^n(E_\delta) \leq N_\delta(E)c_n(2\delta)^n,$$

   όπου c_n ο όγκος της μοναδιαίας σφαίρας του R^n.

Λογαριθμώντας, $\frac{logvol^n(E_\delta)}{-log\delta} \leq \frac{logN_\delta(E)+nlog\delta+log2^nc_n}{-log\delta}$. Άρα

$$\overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{-\log\delta} \leq -n + \underline{dim}_B E.$$

Συνεπώς,

$$\underline{dim}_B E \geq n - \overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{\log\delta}. \tag{5}$$

Αντίστροφα, αν υπάρχουν N_δ ξένες μεταξύ τους σφαίρες ακτίνας δ με κέντρα στο E, τότε αφού αυτές περιέχονται στο E και $E \subseteq E_\delta$, οπότε

$$N_\delta(E)c_n\delta^n \leq vol^n(E_\delta).$$

Παίρνοντας λογαρίθμους,

$$\frac{N_\delta(E)}{-log\delta} + \frac{logc_n}{-log\delta} + \frac{nlog\delta}{-log\delta} \leq \frac{logvol^n(E_\delta)}{-log\delta}$$

Άρα,

$$\overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{N_\delta(E)}{-log\delta} - n \leq \overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{-log\delta}.$$

Συνεπώς,

$$\overline{dim}_B E - n \leq -\overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{log\delta} \tag{6}$$

Κι επειδή $\underline{dim}_B E \leq \overline{dim}_B E$,

$$\underline{dim}_B E \leq n - \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{log\delta}. \tag{7}$$

Απο (5) και (6),

$$\underline{dim}_B E = n - \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{log\delta}. \tag{8}$$

Επίσης, απο (7)

$$\overline{dim}_B E \leq n - \overline{lim}_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{log\delta} \leq n - \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{log\delta}. \tag{9}$$

Απο (8) και (9),

$$\overline{dim}_B E = n - \underline{lim}_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{log\delta}.$$

Και φυσικά, αν $\overline{dim}_B E = \underline{dim}_B E$, τότε $dim_B E = n - \lim_{\delta\to 0}\frac{logvol^n(E_\delta)}{log\delta}$.

Ένθετο

Σύνολα Αποκοπής

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη της box-διάστασης συνόλων απο τα οποία έχει αφαιρεθεί μια ακολουθία υποσυνόλων τους. Για παράδειγμα, το σύνολο του Cantor προκύπτει αν απο το [0,1] αφαιρέσω την ακολουθία $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})...$

Έστω, λοιπόν, $A = [a, b]$ φραγμένο κλειστό διάστημα στο R, και $A_1, A_2, ...$ ακολουθία ξένων υποσυνόλων του A με $\lambda_1(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1(A_i)$, όπου $\lambda_1(\cdot)$ είναι το μήκος ενός διαστήματος. Τότε, το $E = A - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ είναι συμπαγές με μέτρο Lebesgue μηδέν, και συμπληρωματικά διαστήματα τα A_n.

Ονομάζουμε το E σύνολο αποκοπής. Θέτω $a_i = |A_i|$ και διατάσσω τα $a_i : a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ....$

Έστω $E + r = E_r := \{x \in R : |x - y| \leq r,\ \text{για κάποιο}\ \ y \in E\}$.

Τότε, αν $r \leq \frac{1}{2}a_1$ και υπάρχει $n : a_{n+1} \leq 2r \leq a_n$,

$$V(r) := \lambda_1(E + r) = 2nr + 2r + \sum_{n+1}^{\infty} a_i, a_{n+1} \leq 2r \leq a_n. \tag{10}$$

Επιπλέον,

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i^{-a}(a_i - a_{i+1}) \leq (1 - a)^{-1} a_n (1 - a), \tag{11}$$

διότι το πρώτο μέλος της ανισότητας είναι το κατώτερο άθροισμα της συνάρτησης x^{-a}, ενώ το δεύτερο είναι το ορισμένο άθροισμα της x^{-a} απο το 0 μέχρι το a_n.

Οι σχέσεις (10) και (11) θα χρησιμεύσουν στη συνέχεια. Για αναλυτικότερη μελέτη των συνόλων αποκοπής μπορείτε να απευθυνθείτε στο [9]-1997 (σελίδα 150 των σημειώσεων του μαθήματος).

10. <u>Σύνολα αποκοπής</u> (cut-out)

Έστω $[a,b] \subseteq R$ και $I_i \subseteq [a,b], i \in N$ με I_i ανοικτά διαστήματα, ξένα ανα δύο και $\sum_{i=1} +\infty \lambda_1(I_i) = \lambda_1([a,b])$. Το συμπαγές σύνολο $E = [a,b] - \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$ καλείται σύνολο αποκοπής. Εστω $a_i = \lambda_1(I_i)$, με $a_1 \geq a_2 \geq ... > 0$ και

$$c_1 n^{-\gamma} \leq a_n \leq c_n n^{-\gamma}, n \geq n_0(\gamma) \tag{12}$$

για κάποιες σταθερές $c_1, c_2 > 0$. Αποδείξτε οτι :

(α′) $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{loga_n}{logn}) = \gamma > 1$,

(β′) $c_3\tau^{1-\frac{1}{\gamma}} \leq \lambda_1(E+\tau) \leq c_4\tau^{1-\frac{1}{\gamma}}$ για κάποιες σταθερές $c_3, c_4 > 0$,

(γ′) $dim_B E = \frac{1}{\gamma}$.

Απόδειξη. (α′) Αφού $c_1 n^{-\gamma} \leq a_n \leq c_n n^{-\gamma}$, τότε $\gamma \leq \lim_{n\to+\infty}(\frac{loga_n}{-logn}) \leq \gamma$ και άρα $\lim_{n\to+\infty}(\frac{loga_n}{-logn}) = \gamma$.

Τώρα, επειδή $c_1 n^{-\gamma} \leq a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_1 n^{-\gamma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda_1(A) < +\infty$.

Έτσι, $\sum_{n=1}^{\infty} c_1 n^{-\gamma} < +\infty$, και φυσικά $\gamma > 1$ (Αφού η σειρά συγκλίνει).

(β′) Αν το r είναι αρκετά μικρό και

$$a_{n+1} \leq 2r < a_n, \tag{13}$$

τότε απο (10), (12) και (13) έχουμε

$$V(r) \geq 2(n+1)r \geq 2c_1^{\frac{1}{\gamma}} a_{n+1}^{-\frac{1}{\gamma}} r \geq 2c_1^{\frac{1}{\gamma}} 2^{-\frac{1}{\gamma}} r^{1-\frac{1}{\gamma}} = c_3 r^{1-\frac{1}{\gamma}} = c_3 r^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

και

$$V(r) = 2(n+1)r + \sum_{n+1}^{\infty} a_i = (n+1)(2r - a_{n+1}) + \sum_{n+1}^{\infty}(i+1)(a_i - a_{i+1})$$

$\leq 4nr + 2\sum_{n+1}^{\infty} i(a_i - a_{i+1}) \leq 4c_2^{\frac{1}{\gamma}} a_n^{-\frac{1}{\gamma}} r + 2c_2^{\frac{1}{\gamma}}(1-\frac{1}{\gamma}) a_{n+1}^{1-\frac{1}{\gamma}} \leq ... \leq c_4 r^{1-\frac{1}{\gamma}}$, απο (11), (12) και (13) (όπου το c_4 προκύπτει αν βγάλουμε υστερα απο πράξεις κοινό παράγοντα το $r^{1-\frac{1}{\gamma}}$).

Τελικά, $c_3\tau^{1-\frac{1}{\gamma}} \leq \lambda_1(E+\tau) \leq c_4\tau^{1-\frac{1}{\gamma}}$.

(γ) Απο το (β), λογαριθμώντας και θεωρώντας το r επαρκώς μικρό, έχουμε

$$-\frac{logc_3}{logr}-(1-\frac{1}{\gamma})logr \leq \frac{log\lambda_1(E+\tau)}{-logr} \leq -\frac{logc_4}{logr}-(1-\frac{1}{\gamma})logr$$

και αφήνοντας το r να πάει στο 0,

$$\frac{1}{\gamma} \leq 1-\lim_{r\to 0}\frac{log\lambda_1(E+\tau)}{logr} \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Όμως, $1-\lim_{r\to 0}\frac{log\lambda_1(E+\tau)}{logr} = dim_B E$, σύμφωνα με τον ορισμό του Minkowski. Συνεπώς, έπεται το ζητούμενο.

11. Χρησιμοποιώντας την άσκηση (10), αποδείξτε οτι $dim_B E^p = \frac{1}{p+1}$, όπου $E^p = \{0, 1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, ...\}, (p>0)$.

    Απόδειξη. $a_n = n^{-p} - (n+1)^{-p} \approx pn^{-p-1} = (n^{-p})'$, (απο Θ.Μ.Τ.).

    Επομένως, $\lim_{n\to\infty}\frac{loga_n}{logn} = \lim_{n\to\infty}\frac{logpn^{-p+1}}{logk} = -(p+1)$.

    Τελικά, $dim_B E^p = \frac{1}{p+1}$.