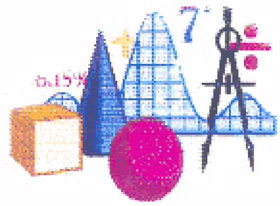
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Π.Μ.Σ. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

FRACTAL ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διδάσκουσα : Λ. Ευαγγελάτου - Δάλλα

ΕΞΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΑ FRACTALS



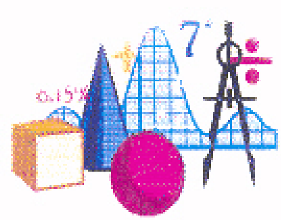
Σουρλάς Κώστας (980602)
Φλώρου Σοφία (980802)
Φουρναράκης Φίλιππος (980702)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Π.Μ.Σ. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

FRACTAL ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διδάσκουσα : Λ. Ευαγγελάτου - Δάλλα

ΕΞΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΑ FRACTALS



Σουρλάς Κώστας (980602)
Φλώρου Σοφία (980802)
Φουρναράκης Φίλιππος (980702)

ΕΞΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΑ FRACTALS

Στην εξαίρετη καθηγήτριά μας
κ. Λ. Ευαγγελάτου-Δάλλα με
ιδιαίτερη εκτίμηση

Σουρλάς Κώστας (980602)
Φλώρου Σοφία (980802)
Φουρναράκης Φίλιππος (980702)

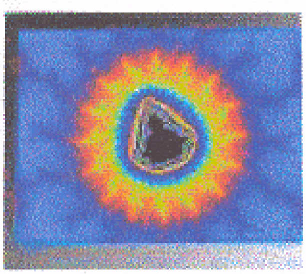
Αθήνα Ιανουάριος 2000

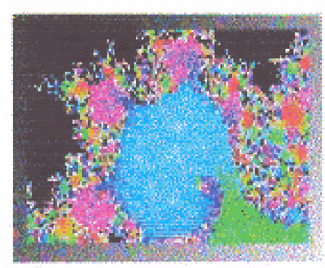
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΞΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΑ FRACTALS

Θέλω να γνωρίζω πως ο Θεός δημιούργησε τον κόσμο, δεν ενδιαφέρομαι για αυτό ή εκείνο που φαίνεται. Θέλω να ξέρω τις σκέψεις του, τα υπόλοιπα είναι λεπτομέρειες.

A. Einstein





1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όλοι έχουμε αντικρύσει εικόνες σαν τις παραπάνω και έχουμε ενδεχομένως αναρωτηθεί αν πρόκειται για αποτελέσματα θεωρητικής μαθηματικής έρευνας ή για αναπαραστάσεις φυσικών εικόνων. Ίσως είναι και τα δύο. Ίσως πρώτη φορά στην ιστορία του ανθρώπου η καθαρή μαθηματική έρευνα συναντά και αναπαριστά τη φύση με τόση αξιοπιστία.

Τα περισσότερα αντικείμενα της φύσης όπως τα βουνά, η θάλασσα, τα δένδρα δεν μπορούν να αναπαραχθούν με τη βοήθεια ευθειών, τριγώνων, κύκλων. *...Τα σύννεφα δεν είναι σφαίρες, τα βουνά δεν είναι κώνοι, τα παράλια δεν είναι κύκλοι, ο φλοιός ενός δένδρου δεν είναι λείος και η τροχιά του κεραυνού δεν είναι ευθεία γραμμή. (B. Mandelbrot)*

Τα μόνα που μπορούν να αναπαραχθούν είναι οι ανθρώπινες κατασκευές. Η φύση φαίνεται να είναι πολύ πιο πολύπλοκη από αυτές τις κατασκευές. Παραφράζοντας το Γαλιλαίο που λεει ότι: *το μεγάλο βιβλίο του κόσμου που στέκεται ανοιχτό μπροστά μας είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών και οι χαρακτήρες είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα* θα λέγαμε ότι οι χαρακτήρες είναι τα fractals.

Πριν εκατό περίπου χρόνια μεγάλοι μαθηματικοί όπως οι Cantor, Peano, Hilbert, Hausdorff, Koch, Sierpinski ξεκινούν με τη δημιουργία ιδιόμορφων καμπύλων (συνόλων σημείων) που οι περίεργες ιδιότητες τους και η παθολογική τους συμπεριφορά οδηγεί στο να χαρακτηρισθούν αποκυήματα νοσηρής φαντασίας. Έπρεπε να περάσουν αρκετά χρόνια, να παραχθούν θεωρήματα στην πραγματική, τη μιγαδική και τη συναρτησιακή ανάλυση, να εμφανισθούν υπολογιστές με ισχυρή υπολογιστική ικανότητα αλλά το πιο σημαντικό να παρουσιαστεί κάποιος με ισχυρή συνθετική ικανότητα, προκειμένου να δώσει πνοή σ' αυτό που ονομάζουμε fractals.

Αυτή η εκπληκτική σύνθεση πραγμάτων που φάνταζαν τόσο διαφορετικά έγινε πολύ πρόσφατα από τον B. Mandelbrot, ο οποίος ανέδειξε την κεντρική έννοια της αυτοομοιότητας στα μέσα της δεκαετίας του 60. Εργάσθηκε στο κέντρο ερευνών της IBM. Θεωρείται ο πατέρας των fractals αν και το πιο γνωστό fractal, το σύνολο Mandelbrot εμφανίσθηκε σε οθόνη Η/Υ μόλις το 1980.

Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε κομμάτι μιας από τις προηγούμενες εικόνες, το μεγενθύνουμε και στη συνέχεια επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία περισσότερες φορές διαδοχικά, το σχήμα που θα προκύπτει κάθε φορά θα διατηρεί τη δομή κάτω από αλλαγή κλίμακας. Αυτή η διαδικασία της επανάληψης που είναι απαραίτητη για τη δημιουργία των fractals φαίνεται να είναι κυρίαρχη στη φύση γύρω μας, από το φύλλο της ταπεινής φτέρης μέχρι την κατανομή των αστέρων και των γαλαξιών στο σύμπαν. Αποτέλεσμα των προηγούμενων διεργασιών είναι να έρθουν πολύ κοντά τα αποτελέσματα της καθαρής μαθηματικής έρευνας με το φυσικό κόσμο. ...Μάλλον αρχίζουμε να κατανοούμε λίγο καλύτερα το μεγάλο βιβλίο του κόσμου.

Τα περισσότερα από τα σχολικά μαθηματικά έχουν ήδη ηλικία αρκετών αιώνων, για να μην πούμε χιλιάδων χρόνων. Για παράδειγμα, η Ευκλείδεια Γεωμετρία χρονολογείται περίπου από το 300 π.Χ. Χωρίς αυτό να σημαίνει κάτι κακό, δίνει την εντύπωση κάποιου πράγματος που είναι τελειωμένο. Δεν υπάρχει τίποτε πλέον για να ανακαλυφθεί. Αντίθετα η έρευνα για τα fractals συνεχίζεται. Αυτή τη στιγμή που μιλάμε διαπερνά πολλούς και διαφορετικούς τομείς της επιστημονικής έρευνας, από τα μαθηματικά, τη φυσική, την ιατρική, τη διαστημική τεχνολογία , την κοσμολογία και τη γεωλογία ως την οικονομία, αλλά και τις τέχνες όπως τη ζωγραφική, τη μουσική, τη τέχνη του video και των υπολογιστών. Με άλλα λόγια διαπερνά ολόκληρο σχεδόν το φάσμα της ανθρώπινης γνώσης και δραστηριότητας.

Με τα fractals συμβαίνει ότι και στους περισσότερους τομείς της ανθρώπινης γνώσης. Δηλαδή, χρειάζεται μελέτη και υπομονή προκειμένου να γίνει προσπελάσιμη και κατανοητή. Υπάρχουν όμως αρκετά πράγματα σχετικά με τα fractals που είναι σχετικά εύκολο να κατανοηθούν και μπορούμε να εμπλέξουμε τους μαθητές μας σε μια κατασκευαστική προσέγγιση της γνώσης αυτού του θαυμαστού καινούργιου κόσμου, του κόσμου των fractals.

Η γεωμετρία των fractals φαίνεται να είναι μια νέα γλώσσα με την οποία μπορούμε να περιγράψουμε τη φύση. Τη γλώσσα αυτή μπορεί να τη μιλήσει κανείς μέσω των αλγορίθμων και των υπολογιστών. Δομές που εκ πρώτης όψεως φαίνονται πολύπλοκες μπορούν να αποκαλυφθούν μπροστά στα μάτια των παιδιών σαν αποτέλεσμα μιας πολύ απλής διαδικασίας (αλγόριθμου).

Η χρήση των υπολογιστών με τη βοήθεια γλωσσών όπως η Logo, η Basic και η Pascal μπορεί να κάνει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τη διδασκαλία των μαθηματικών ως μια διαδικασία επικοινωνίας-διαπραγμάτευσης, και να τους πείσει ότι τα μαθηματικά έχουν ένα θέμα, οι προτάσεις τους έχουν ένα νόημα και δεν αποτελούν μια εξωτερική μη φυσική πραγματικότητα

Η γεωμετρία των fractals και τα αποτελέσματά της τις περισσότερες φορές αντιμετωπίζονται σαν όμορφες εικόνες ή σα μέσο ψυχαγωγίας ενώ τα μαθηματικά της φαίνεται να καλύπτονται με ένα πέπλο μυστηρίου. Οι εντυπωσιακές εικόνες που βλέπουμε σε ημερολόγια και πίνακες ή ακόμα και σε μπλουζάκια αναπαριστούν μικρό μόνο μέρος του θαυμαστού κόσμου των fractals. Στη βασική (θεμελιώδη) μορφή τους, αυτά τα αυτοόμοια διακοσμητικά σχήματα είναι εύκολα προσπελάσιμα για όλους τους μαθητές τόσο με τη μορφή επαναληπτικών διαδικασιών και σχημάτων που υλοποιούνται μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας όσο και με τη μορφή προγραμμάτων και εικόνων που υλοποιούνται σε περιβάλλον Η/Υ και εντυπωσιάζουν περισσότερο.

Θα προσπαθήσουμε να εισάγουμε τους μαθητές στα fractals, να μελετήσουμε μαζί τους τις ιδιότητες μερικών διάσημων fractals και να τους ενθαρρύνουμε να δημιουργήσουν τα δικά τους fractals καλλιτεχνήματα. Ίσως δεν υπάρχει πιο πειστικό επιχείρημα για ένα δάσκαλο από το να καλέσει τους μαθητές του να εμπλακούν στην κατασκευή ενός πλατανόφυλλου ή ενός φύλλου φτέρης ή ενός δένδρου μέσω ενός αλγορίθμου. Οι μαθητές θα μάθουν για επαναληπτικές διαδικασίες (π.χ. γεωμετρική πρόοδος), για εκθετικές συναρτήσεις, όρια, γραφή γενικών τύπων, δημιουργία και στη συνέχεια υλοποίηση αλγορίθμων, υπολογισμό εμβαδών και περιμέτρων σχημάτων που η συνθετότητα τους ολοένα αυξάνει. Τα fractals είναι συναρπαστικά, γεμάτα εκπλήξεις και σχετίζονται άμεσα με το πώς ο κόσμος είναι οργανωμένος γύρω μας. Ίσως το πιο σημαντικό είναι ότι μπορούν να εξάψουν τη δημιουργική φαντασία και την περιέργεια των μαθητών. Φαίνονται να συνδέουν αυτό που γίνεται μέσα στην τάξη των μαθηματικών με αυτά που συμβαίνουν στον πραγματικό κόσμο. Αυτό το "σπάσιμο της απομόνωσης" και οι γέφυρες προς τον πραγματικό κόσμο είναι που έχει ανάγκη σίγουρα η διδακτική των μαθηματικών και όσοι ασχολούμαστε με αυτή.

II. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ FRACTALS ΣΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

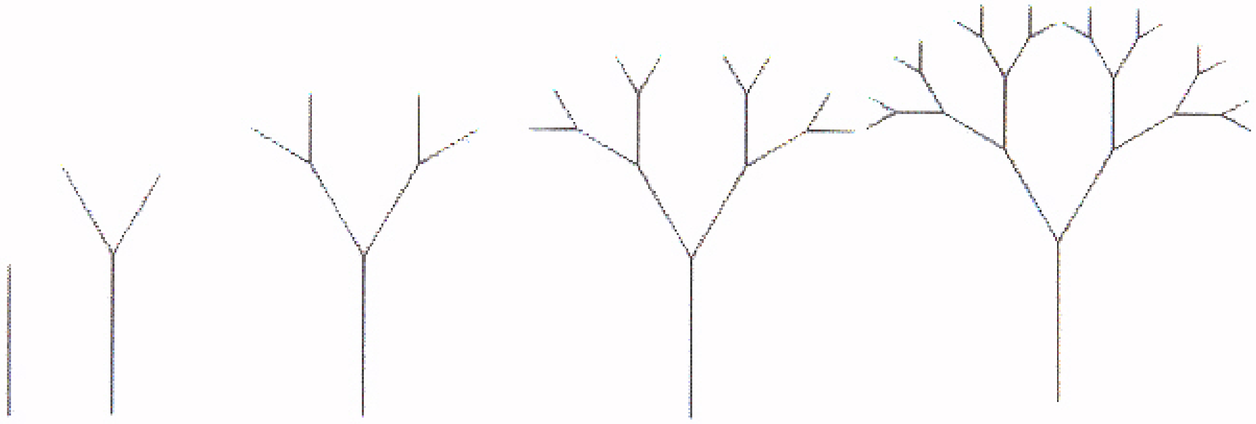
Η δραστηριότητα αυτή αποτελείται από τρεις μικρές έρευνες που μπορούν να διδαχθούν σε δύο διδακτικές ώρες. Για καθεμία από αυτές τις έρευνες υπάρχουν φύλλα εργασίας, στα οποία θα ζητηθεί από τους μαθητές να συμπληρώσουν τους αντίστοιχους πίνακες.

Η εργασία για το σπίτι είναι ένα σημαντικό μέρος της δραστηριότητας αυτής. Η εργασία στο σπίτι είναι συχνά όμορφη και δημιουργική. Αν θέλετε μπορείτε να εκθέσετε τα αποτελέσματά της στην τάξη ή σε ένα πίνακα ανακοινώσεων. Οι εργασίες που ενδεχομένως δεν τελείωσαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής ώρας μπορούν επίσης να δοθούν ως πρόσθετη εργασία στο σπίτι.

ΕΡΕΥΝΑ 1η: ΤΟ FRACTAL ΔΥΑΔΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

Αρχικά ρωτάμε αν κάποιος από τους μαθητές έχει ακούσει για τα fractals. Εξηγούμε στους μαθητές ότι η λέξη fractal βγαίνει από τη λατινική λέξη "fragere" που σημαίνει «σπάσιμο» και το λατινικό επίθετο "fractus" που σημαίνει σπασμένο και ακανόνιστο. Τα fractals είναι αντικείμενα που φαίνεται να είναι σπασμένα σε πολλά κομμάτια, καθένα από τα οποία είναι ένα αντίγραφο του συνολικού σχήματος.

Καλούμε τους μαθητές να ζωγραφίσουν μαζί μας ένα δυαδικό δένδρο ως εξής : Αρχίζουμε με τον κορμό του δένδρου. Κατόπιν ζωγραφίζουμε δύο κλαδιά, καθένα λίγο μικρότερο από τον κορμό. Μετά ζωγραφίζουμε με όμοιο τρόπο δύο κλαδιά σε καθένα από τα προηγούμενα κλαδιά και συνεχίζουμε όπως φαίνεται στην παρακάτω ακολουθία σχημάτων :



Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε ένα μικρό κομμάτι οποιουδήποτε κλαδιού και εστιάσουμε σ' αυτό θα φαίνεται ακριβώς όμοιο με το αρχικό δένδρο. Θεωρητικά, στα ιδανικά fractals η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ΄άπειρο. Στη φύση υπάρχει κάποιο είδος περιορισμού.

Το συνολικό δένδρο μπορεί να ειδωθεί σαν ένα κλαδί ενός μεγαλύτερου δένδρου. Στη συνέχεια μπορούμε να δώσουμε στους μαθητές το παρακάτω φύλλο εργασίας και να τους ζητήσουμε να ζωγραφίσουν ένα δυαδικό δένδρο του οποίου κάθε νέα ομάδα κλαδιών έχει το μισό μήκος της προηγούμενης ομάδας. Οι μαθητές μπορούν να δουλέψουν σε μικρές ομάδες. Μπορούμε να τους αφήσουμε 10 λεπτά για την εργασία αυτή.

1ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ : ΤΟ FRACTAL ΔΥΑΔΙΚΟ ΔΕΝΔΡΟ

- Ζωγραφίστε σε ένα φύλλο χαρτί ένα δυαδικό δένδρο του οποίου καθε νεα ομάδα κλαδιών να έχει το μισό μήκος της προηγούμενης ομάδας.

- Συμπληρώστε το παρακάτω πίνακα :

Βήμα	**Αριθμός νέων κλαδιών**	**Συνολικός αριθμός κλαδιών**	**Μήκος νέου κλαδιού**	**Συνολικό μήκος κλαδιών**
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
...				
12				
Γενικός τύπος ν-στο βήμα				

Εργασία για το σπίτι

Δημιουργείστε ένα δενδρο fractal που διακλαδίζεται διαφορετικα, ισως σε τρια κλαδιά σε κάθε βήμα, εναλλάσσοντας δύο ή τρία, ή κάποιον άλλο κανόνα.

Στη συζήτηση που θα ακολουθήσει θα τονίσουμε τη σημασία του γενικού τύπου. Τα fractals συχνά εμπεριέχουν εκθετικές συναρτήσεις.

Γενικοί τύποι

- Αριθμός νέων κλαδιών $= 2^n$
- Συνολικός αριθμός κλαδιών $=2^{n+1}-1$
- Μήκος κάθε νέου κλαδιού $= 1/2^n$
- Συνολικό μήκος των κλαδιών$= n+1$ όπου n ο αριθμός των βημάτων

Στο σημείο αυτό κρίνουμε σκόπιμο να αναδείξουμε, στα πλαίσια κατασκευής της γνώσης την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών μας και τα είδη των νοητικών δραστηριοτήτων που καλούνται να αναπτύξουν, σύμφωνα με την ταξινομία του R. Gras. Έτσι :

- Κατά τη διαδικασία κατασκευής των διαφόρων βημάτων αναπτύσσουν **τεχνική** δραστηριότητα εφ' όσον πρέπει να δημιουργήσουν με μεγάλη προσοχή τα σχήματα κατά τις φάσεις δημιουργίας του δυαδικού δένδρου.
- Επίσης, για να συμπληρώσουν τον πίνακα θα πρέπει να **απαριθμήσουν** (μετρήσουν) τον αριθμό των νέων κλαδιών, το συνολικό αριθμό κλαδιών, να υπολογίσουν σχετικά μήκη κ.λ.π. Έτσι αναπτύσσουν **υπολογιστική** δραστηριότητα.
- Η προσεκτική παρατήρηση των δεδομένων κάθε στήλης και η **εικασία** του προτύπου που εμφανίζεται, είναι αναγκαία για την πρόβλεψη, κατ' αρχήν του συγκεκριμένου αποτελέσματος στο 12° βήμα. Αναπτύσσεται λοιπόν, **προβλεπτική** δραστηριότητα. Αλλά προβλεπτική δραστηριότητα αναπτύσσεται επίσης και κατά την συμπλήρωση του γενικού τύπου κάθε στήλης.
- Η περαιτέρω επεξεργασία, κατά την οποία ελέγχεται η ορθότητα της πρόβλεψης του γενικού τύπου είτε με επαλήθευση δηλαδή με έλεγχο αν ο γενικός τύπος δίνει σωστό αποτέλεσμα για συγκεκριμένη (μικρή σχετικά) τιμή του ν, είτε με **απόδειξη** του γενικού τύπου αποτελεί σαφώς **λογική** δραστηριότητα.

- Τέλος με την εργασία για το σπίτι δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να **δημιουργήσουν** τα δικά τους προσωπικά παραδείγματα. Έτσι αναπτύσσουν και **δημιουργική** δραστηριότητα.

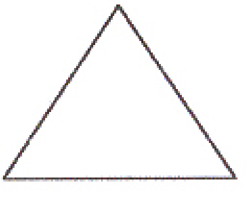
  Συμπερασματικά, είναι φανερό ότι με τη συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση οι μαθητές μας εμπλέκονται στη διαδικασία κατασκευής της γνώσης μέσα από την ανάπτυξη ποικίλων νοητικών δραστηριοτήτων.

ΕΡΕΥΝΑ 2η : Η ΧΙΟΝΟΝΙΦΑΔΑ ΤΟΥ KOCH

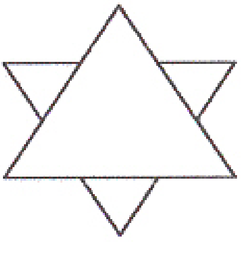
Καλούμε τους μαθητές να συμπληρώσουν τις ζητούμενες πληροφορίες σε κάθε βήμα της 2ης έρευνας στο 2ο φύλλο εργασίας ενώ ταυτόχρονα κατασκευάζουν το fractal σχήμα.

Βήμα 1ο Ξεκινώντας με ένα ισόπλευρο τρίγωνο (n=0) τριχοτομήστε κάθε πλευρά όπως φαίνεται στο σχήμα.

n=0



Βήμα 2ο Φτιάξτε μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα στο εξωτερικό του τριγώνου με δύο κορυφές πάνω στα σημεία τριχοτόμησης για να σχηματίσετε ένα αστέρι 6 σημείων (n=1).

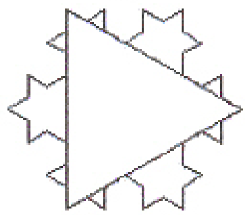


n=1

Βήμα 3ο Να εξάγετε (συμπεράνετε) λύσεις για τη δεύτερη σειρά της έρευνας. Το σχήμα έχει 12 πλευρές,καθεμιά μήκους 1/3. Η περίμετρος είναι 4.

Βήμα 4ο Ζωγραφίστε (σχεδιάσετε) τρίγωνα σε καθεμιά από τις 12 πλευρές (n=2).

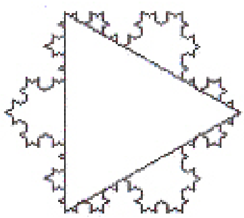
n=2



Συμπεράνετε λύσεις για την επόμενη σειρά στο φύλλο εργασίας. Το σχήμα έχει 48 πλευρές και περίμετρο 48/9 ή αλλιώς 16/3.

Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι πολλοί μαθητές σχεδιάζουν μόνο έξι νέα τρίγωνα στις πλευρές των τριγώνων που αυτοί πρόσθεσαν στο προηγούμενο βήμα. Συνεπώς, θα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι οι μαθητές προσθέτουν τρίγωνα πάνω σε όλες τις πλευρές του αστεριού των έξι σημείων.

n=3



2° ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ : Η ΧΙΟΝΟΝΙΦΑΔΑ ΤΟΥ KOCH

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα :

Βήμα	**Μήκος πλευράς**	**Αριθμός πλευρών**	**Περίμετρος**
0	**1**	**3**	**3**
1			
2			
3			
4			
...			
12			
Γενικός τύπος ν-στο βήμα			

Εργασία για το σπίτι

Γράψτε ένα fractal όπως τη χιονονιφάδα του Koch, αλλά χρησιμοποιείστε ένα γεωμετρικά σχήμα διαφορετικό από το τρίγωνο σαν το βασικό σχήμα.

Γενικοί τύποι

- Μήκος πλευράς = $(1/3)^n$
- Αριθμός πλευρών=$3(4)^n$
- Περίμετρος=$3(4/3)^n$, όπου n = ο αριθμός βήματος

Ερώτηση για συζήτηση

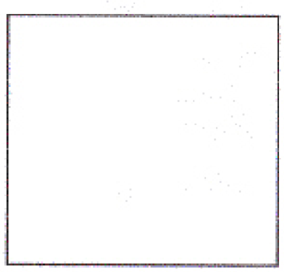
Τι συμβαίνει με την περίμετρο και το εμβαδόν αυτού του σχήματος καθώς το n πλησιάζει το άπειρο;

Η περίμετρος πλησιάζει το άπειρο, αλλά το εμβαδόν είναι πεπερασμένο. Πράγματι, αν σχεδιάζαμε ένα πλαίσιο γύρω από το σχήμα, το σχήμα ποτέ δεν θα έβγαινε έξω από το πλαίσιο όμως η περίμετρος θα γινόταν άπειρα μεγάλη.

Αυτό το σχήμα ονομάζεται χιονονιφάδα του Koch και ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του Σουηδού μαθηματικού Niels Fabian Helge Von Koch (1870-1924). Είναι στην πραγματικότητα τρεις καμπύλες του Koch τοποθετημένες μαζί. Κάθε πλευρά του αρχικού τριγώνου είναι η βάση για μια τέτοια καμπύλη.

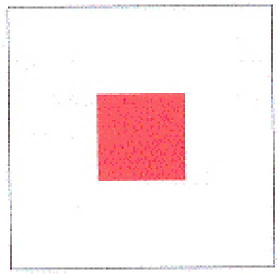
Έρευνα 3η : ΤΟ ΧΑΛΙ ΤΟΥ SIERPINSKI

Βήμα 1ο Αρχίστε με ένα τετράγωνο όπως φαίνεται στο σχήμα

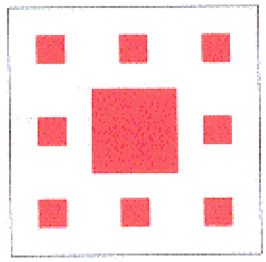


Βήμα 2ο Πολύ ελαφρά χωρίστε το τετράγωνο σε εννέα τετράγωνα.

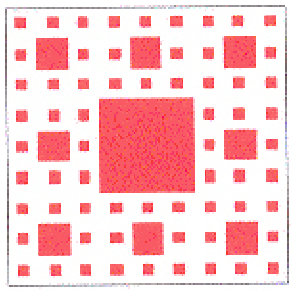
Βήμα 3° Σκιαγραφήστε πιο έντονα το κεντρικό τετράγωνο. Θεωρήστε ότι "απομακρύνετε" (σβήστε) αυτό το κομμάτι σαν μια τετράγωνη τρύπα σε ένα χαλί.



Βήμα 4° Παρόμοια "απομακρύνετε" τα κεντρικά τετράγωνα από τα εννέα τετράγωνα που μένουν.



Βήμα 5° Επαναλάβετε.



3^{o} ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ : ΤΟ ΧΑΛΙ ΤΟΥ SIERPINSKI

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα :

Βήμα	**Μήκος πλευράς του νέου τετραγώνου**	**Εμβαδόν κάθε νέου τετραγώνου**	**Αριθμός νέων τετραγώνων**	**Εμβαδόν "σβησμένο"**	**Συνολικό εμβαδόν που απομένει**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1/3**		**1**		
2					
3					
4					
…					
Γενικός τύπος στο ν βήμα					

Γενικοί τύποι

- Μήκος πλευράς του νέου τετραγώνου $=(1/3)^n$ όπου $n \geq 1$
- Εμβαδόν ενός τετραγώνου $= (1/9)^n$
- Αριθμός των νέων τετραγώνων $= 8^{n-1}$ για $n \geq 1$
- Εμβαδόν «σβησμένο» $= 8^{n-1}(1/9)^n = (1/8)(8/9)^n$ όπου $n \geq 1$
- Συνολικό εμβαδόν που απομένει $= (8/9)^n$ όπου $n \geq 1$

Ερωτήσεις για συζήτηση

- Τι συμβαίνει με το εμβαδόν του σχήματος καθώς το n πλησιάζει στο άπειρο;

  Το εμβαδόν του σχήματος πλησιάζει στο μηδέν.
- Ποια μέρη δεν θα σβηστούν ποτέ;

  Οι ακμές των τετραγώνων.