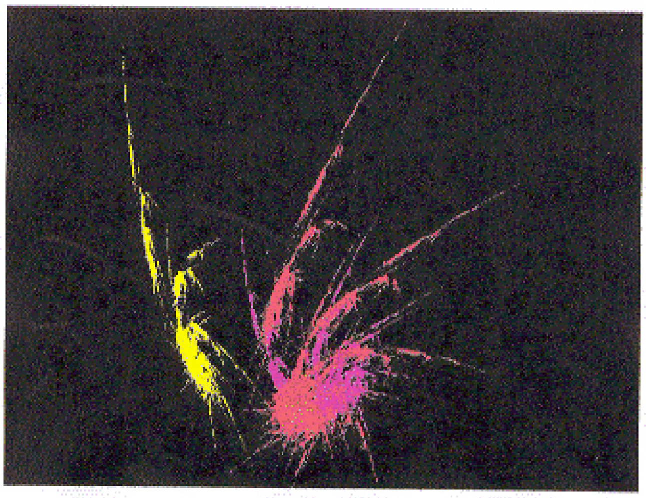
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι

ΣΤΟΙΧΕΙΑ FRACTAL ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ



Χαράλαμπος Σ. Σαΐτης

Χειμερινό Εξάμηνο 2002 - 2003

HAUSDORFF – BESICOVITCH ΔΙΑΣΤΑΣΗ

HAUSDORFF – BESICOVITCH ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Ορισμοί

1. Έστω ο χώρος $\langle IR^d, d\rangle$, όπου d η Ευκλείδεια μετρική στον IR^d.

   Ορίζουμε ως **εξωτερικό μέτρο Hausdorff** H^s για $s \geq 0, s \in IR$, του συνόλου $E \subseteq IR^d$ το

   $$H^s(E) = \sup\{H^s_\varepsilon(E), \varepsilon > 0\} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} H^s_\varepsilon(E)$$

   όπου $H^s_\varepsilon(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, i \in IN\right\} \forall \varepsilon > 0$

2. Ορίζουμε ως **Hausdorff – Besicovitch διάσταση** του $E \subseteq IR^d$ και συμβολίζουμε με $\dim_H E$ τον πραγματικό αριθμό

   $$s_0 = \sup\{s \geq 0 : H^s(E) = +\infty\} = \inf\{s \geq 0 : H^s(E) = 0\}$$

   όπου $0 \leq s_0 \leq d$.

   Ο αριθμός αυτός συμπεραίνεται ότι είναι ο μοναδικός θετικός ή ίσος με μηδέν πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει

   $$H^{s_0}(E) \neq +\infty \text{ και } H^{s_0}(E) \neq 0.$$

3. Έστω φραγμένο σύνολο $F \subseteq IR^d$ και $N_\delta(F)$ ο ελάχιστος αριθμός κύβων του IR^d πλευράς δ που καλύπτουν το F. Ορίζουμε ως box-διάσταση του συνόλου τον αριθμό

   $$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Προτασεις

1. Αν $A \subseteq B \subseteq IR^2 \Rightarrow \dim_B A \geq \dim_B B$.

2. Έστω $E \subseteq IR^2$ φραγμένο και υπαρχουν οι $\dim_H E, \dim_B E$, τοτε ισχύει $\dim_H E \leq \dim_B E$

Οι παραπάνω ορισμοί και προτασεις χρησιμευουν στην αποδειξη των επόμενων προτάσεων.

Πρόταση Η1

Έστω $E=\{x\}, x\in IR^d$. Τότε $\dim_H E=0$.

Απόδειξη α΄

Το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του IR^d και άρα ορίζεται η box διάσταση του. Αρκεί ένας μόνο κύβος οσοδήποτε μικρής πλευράς δ για να καλύψουμε το $\{x\}$, δηλαδή $N_\delta(\{x\})=1$. Από τον ορισμό της box διάστασης έχουμε

$$\dim_B\{x\}=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\log 1}{-\log\delta}=0 .$$

Από την πρόταση (2) έχουμε ότι $\dim_H\{x\}\le\dim_B\{x\}=0$, από όπου έπεται το ζητούμενο.

Απόδειξη β'

Ισχυρίζομαι ότι το $H^0(E)$ ισούται με τον πληθάριθμο $N(E)$ του συνόλου $E \subseteq IR^d$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Hausdorff έχουμε $\forall \varepsilon > 0$

$$H_\varepsilon^0(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^0(U_i), E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, i \in IN\right\} = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} 1, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, i \in IN\right\}$$

Καλύπτοντας κάθε στοιχείο του E με ένα σύνολο εκ των $U_i, i \in IN$, τότε ο φυσικός i θα αντιπροσωπεύει το πλήθος των στοιχείων του E και κατά συνέπεια το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\infty} 1$ θα ισούται με τον πληθάριθμο του E.

Άρα $H^0(E) = \lim_{\varepsilon \to 0}(\inf\{N(E)\}) = \lim_{\varepsilon \to 0} N(E) = N(E)$.

Για $E = \{x\}, x \in IR^d$, θα έχω $H_\varepsilon^0(\{x\}) = 1$ και τελικά

$$H^0(\{x\}) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon^0(\{x\}) = \lim_{\varepsilon \to 0} 1 = 1.$$

Από τον ορισμό της Hausdorff – Besicovitch διάστασης έχουμε ότι για $s_0 = 0$ συμβαίνει $H^0(\{x\}) \neq +\infty, 0$. Άρα $\dim_H \{x\} = 0$.

Πρόταση Η2

Έστω η οικογένεια $\{E_n \subseteq IR^d : n \in IN\}$.

Αν $\dim_H E_n = s_n, n \in IN$, τότε $\dim_H\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sup\{s_n : n \in IN\}$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \; \forall n \in IN$. Από την πρόταση (1) έχουμε ότι

$$\dim_H E_n \le \dim_H\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right). \; [1]$$

Συμβολίζω με $s = \sup\{s_n : n \in IN\}$ και $s_0 = \dim_H\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$. Από τη σχέση [1] έχουμε ότι το s_0 είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου $\{s_n : n \in IN\}$. Από τον ορισμό του supremum ενός συνόλου έπεται ότι $s \le s_0$. [2]

Έστω ότι ισχύει $s < s_0$. Θεωρώ $t \in (s, s_0)$. Τότε $H^t(E_n) = 0 \forall n \in IN$ αφού $t > s_n \forall n \in IN$ και $H^t\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty$. Όμως ισχύει $H^t\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} H^t(E_n) = 0$.

Άρα $H^t\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$. Έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

Τελικά στη σχέση [2] δεν ισχύει η ανισότητα και έπεται $s = s_0$, δηλαδή το ζητούμενο.

Πρόταση Η3

Αν $E \subseteq IR^d$ αριθμήσιμο, τότε $\dim_H E = 0$.

Απόδειξη

Έστω $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Τότε μπορώ να γράψω $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$.

Από την πρόταση (Η1) έχουμε ότι $\dim_H \{x_n\} = 0 \forall n \in IN$.

Από την πρόταση (Η2) έχουμε ότι $\dim_H \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \right) = \sup\{\dim_H \{x_n\} : n \in IN\}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\dim_H E = 0$.