

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

FRACTAL ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΣΥΜΠΙΕΣΗ ΕΙΚΟΝΑΣ

ΜΠΟΥΜΠΟΥΛΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
2006

Στη μητέρα μου
και στη μνήμη του πατέρα μου.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	9
Περίληψη	11
Summary	13
Σημειογραφία	15
1 Πρωταρχικές Μαθηματικές Έννοιες	17
1.1 Γραμμικοί Χώροι - Χώροι με Νόρμα	17
1.2 Στοιχεία Θεωρίας Πινάκων	18
1.3 Ανάλυση και Τοπολογία	23
1.3.1 Μετρικοί Χώροι	24
1.3.2 Ειδικά σύνολα στον $\langle X, d \rangle$	25
1.3.3 Ακολουθίες - Όρια - Οριακά Σημεία	26
1.3.4 Πληρότητα - Συμπάγεια	27
1.3.5 Συναρτήσεις	28
1.4 Ο χώρος των Fractal Συνόλων	31
2 Κατασκευή Fractal με ΣΕΣ	33
2.1 Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων	34
2.2 Αλγόριθμοι Κατασκευής Ελκυστών ΣΕΣ	34
2.2.1 Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων	35
2.2.2 Αλγόριθμος Τυχαίων επαναλήψεων	35
2.3 Fractal σύνολα ως ελκυστές ΣΕΣ	35
2.3.1 Το σύνολο Cantor	36
2.3.2 Το τρίγωνο Sierpinski	36
2.3.3 Φύλλα Δέντρων	39
2.4 Το Θεώρημα Συγκόλλησης	42
2.5 Περιοδικά Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων	42
2.5.1 Ύπαρξη ελκυστή ενός ΠΣΕΣ	45

3	Fractal Διαστάσεις	51
3.1	Μέτρο του Lebesgue, Μέτρο του Hausdorff	51
3.2	Fractal Διαστάσεις	54
3.3	Ιδιότητες και σχέσεις Διαστάσεων	55
3.4	Πειραματικός υπολογισμός της Box διάστασης	58
4	Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής	61
4.1	Αυτοσυσχετισμένες FΣΠ	62
4.2	Διανυσματικές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής	71
4.3	Κατά Τμήματα Συσχετισμένες FΣΠ.	72
5	Μοντελοποίηση σημάτων με χρήση FΣΠ	79
5.1	Αυτοσυσχετισμένο Μοντέλο Fractal Παρεμβολής	80
5.1.1	Υπολογισμός Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας - Γεωμετρική Μέθοδος	80
5.1.2	Υπολογισμός Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας - Αναλυτική Μέθοδος	80
5.2	Ο Αλγόριθμος	82
5.3	Κατά Τμήματα Συσχετισμένο Μοντέλο Fractal Παρεμβολής	83
5.4	Εφαρμογές	84
6	Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής	87
6.1	Κατασκευή Bivariate FEΠ	89
6.1.1	Η box διάσταση της Bivariate FEΠ	100
6.1.2	Παραδείγματα	111
7	Κλειστές Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής	137
7.1	Καθορισμός των Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας	137
7.2	Κατασκευή Κλειστών FEΠ	139
7.3	Η Διάσταση μιας Κλειστής FEΠ	140
7.4	Παραδείγματα	141
8	Διανυσματικές Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής	157
9	Συμπίεση Εικόνας με Χρήση Fractal Επιφανειών Παρεμβολής	175
9.1	Εισαγωγή	175
9.2	Κατασκευή Προσεγγιστικά Συνεχών Επιφανειών Παρεμβολής	182
9.3	Συμπίεση Εικόνας με χρήση BFEΠ	185
9.3.1	Γεωμετρικός Υπολογισμός των Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας .	185
9.4	Αναλυτικός Υπολογισμός των Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας	187
9.5	Αλγόριθμος Εύρεσης Παραμέτρων	189
9.6	Αλγόριθμος Αποσυμπίεσης	192
9.7	Πειραματικά Αποτελέσματα	195
9.8	Συμπεράσματα	195

A' Προγράμματα σε Matlab	203
A'.1 Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων	203
A'.2 Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων	204
A'.3 Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων για ΠΣΕΣ	205
A'.4 Υπολογισμός Box Διάστασης Μονοδιάστατου Σήματος	206
A'.5 Υπολογισμός Box Διάστασης Δισδιάστατου Σήματος - Εικόνας	207
A'.6 Κατασκευή αυτοσυσχετισμένης FΣΠ	208
A'.7 Κατασκευή κατά τμήματα συσχετισμένης FΣΠ	209
A'.8 Κατά Τμήματα Συσχετισμένο Μοντέλο Fractal Παρεμβολής	210
A'.9 Bivariate Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής σε Ορθογώνιο Πλέγμα	214
A'.10 Διανυσματικές Bivariate Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής σε Ορθογώνιο Πλέγμα	215
B' Κώδικας C++	217
Γ' Οδηγός Χρήσης του Προγράμματος IFS2D Manager.exe	243
Ξένη Βιβλιογραφία	247
Ελληνική Βιβλιογραφία	251
Ευρετήριο	252

Ευχαριστίες

Βασική καθοδηγός και συμπαραστάτης μου στην πορεία για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας υπήρξε η καθηγήτρια κα Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα. Οι γνώσεις της στα μαθηματικά και ειδικότερα στο πεδίο των fractals είναι ιδιαίτερα σημαντικές και τις μεταδίδει με ζήλο και υπομονή στους μαθητές της. Οι πολύωρες συζητήσεις μας υπήρξαν για εμένα πηγή έμπνευσης και δημιουργίας. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον εισηγητή αυτής της εργασίας καθηγητή κ. Σέργιο Θεοδωρίδη, που υποστήριξε αυτή την έρευνα σε όλη της την πορεία, διαβλέποντας με το εξαιρετικά διορατικό μάτι του τις δυνατότητες για εφαρμογές της. Με χαρά αναγνωρίζω το χρέος που οφείλω απέναντί σε αυτούς τους δύο δασκάλους μου και τους ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν. Η ελευθερία που μου προσέφεραν, οι συμβουλές και η στήριξή τους καθ'ολη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου, μα και η ανοχή τους πολλές φορές, υπήρξαν για μένα πολύτιμες. Η μύηση μου στο πεδίο της έρευνας των fractals έγινε από τον δρ. Β. Δρακόπουλο ο οποίος με καθοδήγησε στα πρώτα βήματα της εργασίας αυτής, παρέχοντάς μου πλούσια βιβλιογραφία και τις γνώσεις του. Για τους λόγους αυτούς τον ευχαριστώ πολύ.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές κ. Β. Δουγαλή, Ν. Καλαμίδα, Ν. Καλουπτσίδη και Η. Κουτσουπιά, που μου έκαναν την τιμή να συμμετάσχουν στην επταμελή επιτροπή κρίσης μου. Ειδικότερα ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Θ. Θεοχάρη που αποτέλεσε μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής μου επιτροπής.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών καθώς και του τμήματος Μαθηματικών για τα μαθήματα και τις διαλέξεις τους, που είχα την τύχη να παρακολουθήσω.

Κλείνοντας, δεν θα μπορούσα να μην ομολογήσω ένα ιδιαίτερο χρέος και μια μεγάλη ευγνωμοσύνη προς τη μητέρα μου, η βοήθεια και συμπαράσταση της οποίας υπήρξε γενναία και αδιάκοπη όλα αυτά τα χρόνια των προσπαθειών μου.

Περίληψη

Σε αυτήν την διατριβή εξετάζεται το πρόβλημα της κατασκευής fractal επιφανειών παρεμβολής και η χρήση τους στη συμπίεση εικόνων. Αναλυτικά, η συνεισφορά της διατριβής μπορεί να χωριστεί σε τέσσερα μέρη.

Καταρχάς, μελετάται η κατασκευή fractal επιφανειών που παρεμβάλλονται σε αυθαίρετα σημεία. Δίνονται ακριβείς συνθήκες ώστε αυτή η κατασκευή να είναι έγκυρη με την εισαγωγή ελεύθερων παραμέτρων που δίνουν αρκετούς βαθμούς ελευθερίας στο μοντέλο. Έτσι, η κατασκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγιστεί οποιαδήποτε φυσική επιφάνεια με αρκετά "τραχιά" χαρακτηριστικά. Ήδη, υπάρχουν εφαρμογές στη γεωλογία, στην ορυκτολογία και σε συναφείς κλάδους που χρησιμοποιούν τις προϋπάρχουσες μεθόδους κατασκευής Fractal Επιφανειών Παρεμβολής, οι οποίες όμως δεν προσφέρουν αρκετή "ευελιξία" αφού πρέπει τα σημεία παρεμβολής να πληρούν πολύ αυστηρές προϋποθέσεις. Βασικός στόχος της διατριβής είναι η μελέτη μιας γενικής κατασκευής στην οποία ελαχιστοποιούνται οι προϋποθέσεις αυτές. Βασικό αποτέλεσμα, επίσης, είναι ο υπολογισμός της fractal (box-counting ή Minkowski) διάστασης των επιφανειών αυτών η οποία εξαρτάται από τις ελεύθερες παραμέτρους. Τα ανωτέρω περιγράφονται αναλυτικά στο κεφάλαιο 6 της διατριβής.

Με βάση την παραπάνω κατασκευή, στο κεφάλαιο 7, δημιουργούνται κλειστές fractal επιφάνειες παρεμβολής. Δίνονται αναλυτικά οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται, ώστε αυτή η κατασκευή να είναι δυνατή και αποδεικνύονται ορισμένες σχέσεις για την Hausdorff διάσταση της κλειστής επιφάνειας.

Στο κεφάλαιο 8 ορίζονται οι διανυσματικές fractal συναρτήσεις παρεμβολής και μελετώνται οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται για να είναι έγκυρη η κατασκευή τους. Οι συναρτήσεις αυτές γενικεύουν την κατασκευή fractal επιφανειών παρεμβολής προσφέροντας ακόμη περισσότερες ελεύθερες παραμέτρους. Το γράφημα αυτών των συναρτήσεων βρίσκεται στον 4-διάστατο χώρο και οι επιφάνειες παρεμβολής αποτελούν κατάλληλες προβολές αυτών στον 3-διάστατο χώρο.

Τέλος, στο κεφάλαιο 9, περιγράφεται ένας νέος αλγόριθμος συμπίεσης εικόνας που βασίζεται σε fractal παρεμβολή. Η εικόνα θεωρείται ως μια συνεχής επιφάνεια και αναπτύσσεται μεθοδολογία για την ανεύρεση των κατάλληλων σημείων παρεμβολής και των παραμέτρων μιας fractal επιφάνειας παρεμβολής που προσεγγίζει την ανωτέρω εικόνα. Η συμπίεση επιτυγχάνεται αποθηκεύοντας μόνο τα σημεία παρεμβολής και τις ελεύθερες παραμέτρους. Στη συνέχεια συγκρίνεται ο αλγόριθμος αυτός με προϋπάρχουσες μεθοδολογίες fractal συμπίεσης εικόνων.

Στα κεφάλαια 1-5 περιέχονται βασικές μαθηματικές γνώσεις πάνω στο πεδίο των fractal συνόλων και ειδικότερα στο τομέα της fractal παρεμβολής.

Summary

In this dissertation, the problem of the construction of Fractal Interpolation Surfaces and their application in image compression is studied. The contribution of the dissertation may be divided in four parts.

Firstly, we study the construction of fractal surfaces that interpolate arbitrary points. We give exact conditions, so that this construction is valid and we introduce some free parameters that make our model as flexible as possible. Thus the construction may be used to approximate any natural occurring surface.

There are, already, applications of fractal surfaces in geology and other related fields, that use constructions of fractal interpolation surfaces which do not offer enough flexibility, since the interpolation points must satisfy some very strict conditions. One of the basic objects of this dissertation is the study of a more general construction which minimizes the aforementioned conditions. Another, also basic, result is the computation of the fractal (box-counting or Minkowski) dimension of those surfaces. Chapter 6 describes all the above matters in detail.

Using the previously mentioned construction, in chapter 7, we construct closed fractal interpolation functions. Again, we give all the necessary conditions so that the construction is valid and we prove some relations for the Hausdorff dimension of the closed surface.

In chapter 8, we define vector valued fractal interpolation functions. These functions generalize fractal interpolation surfaces offering even more free parameters. Their graph is in $\mathbb{R}^4$ and the interpolation surfaces are projections on $\mathbb{R}^3$.

Finally, in chapter 9, we give a new image compression algorithm, based on fractal interpolation. The image is regarded as a continuous surface. We develop a methodology to find appropriate interpolation points and free parameters so that the emerging fractal surface approximates the original image. The compression is achieved by storing only the interpolation points and the free parameters. Next, we compare this method with previously developed fractal compression algorithms.

In chapters 1-5 some basic mathematical preliminaries are outlined.

Σημειογραφία

Εδώ παρέχεται μια σύντομη αναφορά των κυριότερων συμβολισμών και συντημήσεων.

Σύμβολο	Ερμηνεία
$\ \cdot \ $	νόρμα
$\langle X, \ \cdot \ \rangle$	χώρος με νόρμα
$\det$	ορίζουσα πίνακα
$\rho(\cdot)$	φασματική ακτίνα πίνακα
A^T	ανάστροφος πίνακας
$\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{N})$	ο χώρος των τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$
$\sim$	ισοδυναμία
$S(x_0, r)$	ανοικτή σφαίρα κέντρου x_0 και ακτίνας r
$\bar{S}(x_0, r)$	κλειστή σφαίρα κέντρου x_0 και ακτίνας r
$\bar{A}$	θήκη του συνόλου A
A^C	συμπλήρωμα του συνόλου A
∂A	σύνορο του συνόλου A
f^n	$f^n = f \circ f \dots f$
id	η ταυτοτική συνάρτηση
$\mathcal{H}(X)$	χώρος Hausdorff του X
$h(\cdot, \cdot)$	μετρική Hausdorff
μ	εξωτερικό μέτρο
μ^*	μέτρο
$\dim_H$	Hausdorff διάσταση
$\dim_B$	Box-Counting ή Minkowski-Bouligard διάσταση
$D(\cdot)$	Box-Counting ή Minkowski-Bouligard διάσταση
$\lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot)$	βλέπε σελίδα 109

Σύντμηση	Αγγλική Σύντμηση	Ερμηνεία
ΣΕΣ	IFS	Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων ή Iterated Function System
ΠΣΕΣ	RIFS	Περιοδικό Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων ή Recurrent Iterated Function System
ΑΑΕ	DIA	Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων ή Deterministic Iteration Algorithm
ΑΤΕ	RIA	Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων ή Random Iteration Algorithm
ΦΣΠ	FIF	Fractal Συνάρτηση Παρεμβολής ή Fractal Interpolation Function
ΑΦΣΠ	SAFIF	ΑυτοσυσχετισμένηFractal Συνάρτηση Παρεμβολής ή Self-Affine Fractal Interpolation Function
ΦΕΠ	FIS	Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής ή Fractal Interpolation Surface
ΠΒΦΕΠ	RBFIS	Bivariate Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής ή Recurrent Bivariate Fractal Interpolation Surface

Κεφάλαιο 1

Πρωταρχικές Μαθηματικές Έννοιες

Οι μαθηματικές έννοιες είναι προτάσεις που δομούνται από τη διάνοιά μας και λειτουργούν πάντα ως αληθείς, είτε διότι είναι φύσει υπάρχουσες είτε διότι τα Μαθηματικά επινοήθηκαν πριν από τις άλλες επιστήμες.

Αδελφός Γουλιέλμος,
από το βιβλίο “Το Όνομα του Ρόδου” του Ουμπέρτο Έκο.

Για να περιγράψουμε τη γεωμετρία των Fractal συνόλων είναι απαραίτητο να δώσουμε κάποια βασικά στοιχεία από διάφορους κλάδους των Μαθηματικών. Θα χρειαστούμε όρους και βασικά αποτελέσματα της Ανάλυσης, της Τοπολογίας και της Θεωρίας Μέτρου, στοιχεία από την θεωρία Πιθανοτήτων και ιδιαίτερα από τις Στοχαστικές Ανελίξεις, έως και θέματα που άπτονται της θεωρίας Πινάκων.

1.1 Γραμμικοί Χώροι - Χώροι με Νόρμα

Μια από τις σημαντικότερες έννοιες των μαθηματικών είναι αυτή του Γραμμικού Χώρου ([KF70] σελ. 118).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1

Ένα μη κενό σύνολο X ονομάζεται **Γραμμικός Χώρος** (ή **Διανυσματικός Χώρος**) επί ενός σώματος αριθμών F^1 , αν ικανοποιεί τα παρακάτω τρία κριτήρια:

1. Κάθε δύο στοιχεία $x, y \in X$ ορίζουν ένα τρίτο στοιχείο $x+y \in X$, το οποίο καλείται το άθροισμα του x και του y . Η αντίστοιχη πράξη λέγεται πρόσθεση και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(\alpha') \quad x + y = y + x.$$

$$(\beta') \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

$$(\gamma') \quad \text{Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο } 0 \text{ τέτοιο ώστε } x + 0 = x, \forall x \in X.$$

¹ $F = \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$



- (δ') Για κάθε στοιχείο $x \in X$ υπάρχει το αντίθετο στοιχείο $-x$, με την ιδιότητα $x + (-x) = 0$.
2. Κάθε στοιχείο $x \in X$ και κάθε αριθμός $a \in F$ ορίζουν ένα μοναδικό στοιχείο $ax \in X$ το οποίο καλείται το γινόμενο του αριθμού a με το στοιχείο x . Η πράξη αυτή λέγεται βαθμωτός πολλαπλασιασμός και έχει τις ιδιότητες:
- (α') $a(bx) = (ab)x$, $a, b \in F$, $x \in X$.
- (β') $1x = x$.
3. Οι πράξεις του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και τις πρόσθεσης ικανοποιούν επίσης τις ιδιότητες:
- (α') $(a + b)x = ax + bx$,
- (β') $a(x + y) = ax + ay$,
- όπου $a, b \in F$, $x, y \in X$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2

Εστω X, Y δύο γραμμικοί χώροι επί του ίδιου σώματος F . Η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ θα ονομάζεται **γραμμική απεικόνιση** αν πληρούνται οι ιδιότητες:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $f(ax) = af(x)$, $\forall x \in X$, $y \in Y$, $a \in F$.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να μπορούμε να συσχετίσουμε ένα στοιχείο ενός γραμμικού χώρου με ένα απλό μη αρνητικό αριθμό που, κατά μια έννοια, θα μας δίνει ένα μέτρο του μεγέθους του στοιχείου. Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού, το μέτρο διανυσμάτων και το μέτρο μιγαδικών αριθμών είναι παραδείγματα τέτοιων συσχετισμών (βλέπε [KF70] σελ. 138).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3

Εστω X ένας γραμμικός χώρος επί ενός σώματος F . Μια απεικόνιση $\| \cdot \| : X \rightarrow F$ με τις ιδιότητες:

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
4. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x, y \in X$ και $\lambda \in F$

ονομάζεται **νόρμα** ορισμένη στον X και το ζεύγος $\langle X, \| \cdot \| \rangle$ ονομάζεται **χώρος με νόρμα**.

Ο χώρος $\langle \mathbb{R}, | \cdot | \rangle$ (εφοδιασμένος με την απόλυτη τιμή) είναι ένας τέτοιος χώρος.

1.2 Στοιχεία Θεωρίας Πινάκων

Ένας πολύ γνωστός γραμμικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$) είναι ο χώρος των πινάκων εφοδιασμένος με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού (βλέπε [Gan00a]). Οι πίνακες, ως γνωστόν, είναι ορθογώνιες παρατάξεις πραγματικών αριθμών της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{bmatrix},$$



όπου N, M οι αριθμοί των γραμμών και των στηλών του πίνακα A , αντίστοιχα. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται πίνακας διάστασης $N \times M$, ενώ αν $N = M$ ο πίνακας ονομάζεται τετραγωνικός διάστασης N . Αντί για την παραπάνω μορφή, συχνά θα χρησιμοποιούμε τον πιο σύντομο συμβολισμό $A = [a_{nm}]_M^N$, για να αναφερόμαστε σε έναν πίνακα διάστασης $N \times M$ ($n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$) ή $A = [a_{nm}]^N$ για έναν τετραγωνικό πίνακα διάστασης N . Συμβολίζουμε A^T τον ανάστροφο του πίνακα A . Συχνά, χρησιμοποιούνται παρενθέσεις και όχι αγκύλες στο συμβολισμό των πινάκων. Επίσης, έναν πίνακα διάστασης $N \times 1$ θα τον ονομάζουμε διάνυσμα διάστασης N και θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$. Ο ορισμός των πινάκων μπορεί να γενικευτεί, χρησιμοποιώντας αριθμούς από οποιοδήποτε σώμα F . Εδώ, όμως, θα μας χρειαστούν κυρίως πραγματικοί πίνακες ($F = \mathbb{R}$). Σημειώνουμε ότι με $\mathcal{M}(\mathbb{R}, N)$ και $\mathcal{M}(\mathbb{C}, N)$ θα συμβολίζουμε το χώρο των τετραγωνικών πινάκων στον $\mathbb{R}$ και στον $\mathbb{C}$ αντίστοιχα.

Οι πίνακες που έχουν όλα τα στοιχεία τους θετικά ονομάζονται **θετικοί πίνακες**, ενώ αυτοί που έχουν μη αρνητικά στοιχεία ονομάζονται **μη αρνητικοί πίνακες**. Επίσης, πρέπει να αναφερθεί ότι ένας πίνακας A , διάστασης $N \times M$, αντιστοιχεί σε μια γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N : T_A(\vec{v}) = A\vec{v}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^M$. Παρακάτω, ορίζονται η ιδιοτιμή, το ιδιοδιάνυσμα και η φασματική ακτίνα ενός τετραγωνικού πίνακα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας αριθμών (του σώματος $\mathbb{C}$) διάστασης N . Αν υπάρχουν $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

τότε ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του πίνακα A και το διάνυσμα $\vec{v}$ **ιδιοδιάνυσμα** του A .

Θυμίζουμε εδώ ότι όλες οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι λύσεις (ρίζες) της χαρακτηριστικής εξίσωσης του πίνακα

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

όπου $\det(\cdot)$ η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι ένα πολυώνυμο N βαθμού, επομένως έχει N ακριβώς ρίζες (όχι απαραίτητα όλες διαφορετικές). Το σύνολο

$$\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\},$$

το οποίο περιέχει όλες τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, ονομάζεται **φάσμα** του πίνακα A ενώ το στοιχείο με το μεγαλύτερο μέτρο ονομάζεται **φασματική ακτίνα** του πίνακα και συμβολίζεται ως $\rho(A)$.

Μια πολύ σημαντική κατηγορία πινάκων, με ιδιαίτερες εφαρμογές στην μελέτη των συνόλων Fractal, είναι οι μη αναγώγιμοι πίνακες.

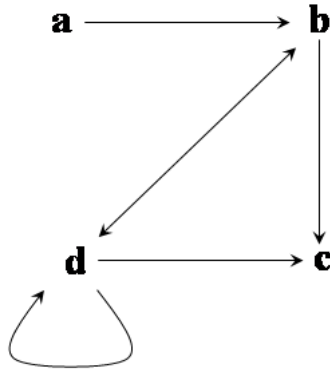
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{nm}]^N$ ονομάζεται **αναγώγιμος**, αν το σύνολο δεικτών $\{1, 2, \dots, N\}$ μπορεί να διασπαστεί σε δύο ξένα μεταξύ τους και συμπληρωματικά σύνολα $\{i_1, i_2, \dots, i_\mu\}$ και $\{j_1, j_2, \dots, j_\nu\}$ τέτοια ώστε

$$a_{i_a, j_b} = 0, \quad \forall a = 1, 2, \dots, \mu; b = 1, 2, \dots, \nu.$$

Σε αντίθετη περίπτωση ο πίνακας ονομάζεται **μή αναγώγιμος**.

Υπάρχουν αρκετοί ισοδύναμοι ορισμοί για τους αναγώγιμους πίνακες. Ένας πολύ σημαντικός περιέχει την έννοια του κατευθυνόμενου γραφήματος που δίνουμε εδώ.

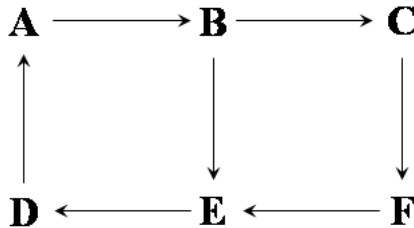


Σχήμα 1.1: Ένα κατευθυνόμενο γράφημα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6

Έστω ένα σύνολο V και $E \subset V \times V$. Το ζεύγος (V, E) ονομάζεται **κατευθυνόμενο γράφημα**. Το σύνολο V είναι το σύνολο των κορυφών ενώ το σύνολο E το σύνολο των ακμών.

Για παράδειγμα, αν $V = \{a, b, c, d\}$ και $E = \{(a, b), (b, d), (b, c), (c, b), (c, c), (c, d)\}$, το κατευθυνόμενο γράφημα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 1.1. Αν για κάθε ζεύγος κορυφών ενός κατευθυνόμενου γραφήματος, υπάρχει ένα μονοπάτι που να τις συνδέει (μέσω ακμών), τότε το γράφημα ονομάζεται **ισχυρώς συνεκτικό** κατευθυνόμενο γράφημα. Το γράφημα του σχήματος 1.1 δεν είναι ισχυρώς συνεκτικό, αφού δεν υπάρχει μονοπάτι τόξων που να συνδέει την κορυφή c με την κορυφή a . Αντίθετα το σχήμα 1.2 παριστάνει ένα ισχυρώς συνεκτικό γράφημα.



Σχήμα 1.2: Ένα ισχυρώς συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα.

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A διάστασης N , ορίζει ένα κατευθυνόμενο γράφημα ως εξής:

- Το σύνολο V των κορυφών είναι το σύνολο $\{1, 2, \dots, N\}$.



- Το σύνολο των τόξων E ορίζεται ως εξής: Ένα ζεύγος (i, j) ανήκει στο E αν και μόνο αν το στοιχείο της γραμμής i και της στήλης j του πίνακα A είναι διάφορο του μηδέν.

Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα μπορούμε να δούμε ότι ο αναγώγιμος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αντιστοιχεί στο κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος 1.1. Ομοίως ο μη αναγώγιμος πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

αντιστοιχεί στο ισχυρώς συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα του σχήματος 1.2.

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να θυμίσουμε τη χρήση μη αναγώγιμων πινάκων στη θεωρία των αλυσίδων Markov. Μια **αλυσίδα Markov** πρώτης τάξης είναι μια στοχαστική ανέλιξη (δηλαδή μια απειροπληθής οικογένεια τυχαίων μεταβλητών) $\{X(t), t \in T\}$ με την ιδιότητα, αν $\nu > 2$, $t_1, t_2, \dots, t_\nu \in T$, $t_1 < t_2 < \dots < t_\nu$, τότε η δεσμευμένη κατανομή της $X(t_\nu)$, για τις δεδομένες τιμές των $X(t_1), \dots, X(t_{\nu-1})$, είναι ίδια με την δεσμευμένη κατανομή της $X(t_\nu)$, όταν δίνεται μόνο η $X(t_{\nu-1})$, δηλαδή η πιο πρόσφατη τιμή. Το σύνολο τιμών της $\{X(t), t \in T\}$ το ονομάζουμε χώρο καταστάσεων και τα στοιχεία του καταστάσεις της αλυσίδας και αν $X_n = k$, λέμε ότι η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση k . Αν το δείκτοσύνολο T είναι πεπερασμένο (ή αριθμήσιμο) η αλυσίδα ονομάζεται διακριτή και μπορεί να σχεδιαστεί (στην πεπερασμένη περίπτωση) χρησιμοποιώντας σχήματα της μορφής 1.2, 1.1. Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j εξαρτάται μόνο από τις καταστάσεις i και j (και όχι από τις προηγούμενες καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρέθηκε η αλυσίδα) και συμβολίζεται με p_{ij} . Κατασκευάζεται έτσι ένας πίνακας, ο οποίος ονομάζεται **πίνακας μετάβασης** της αλυσίδας Markov. Ο πίνακας αυτός είναι βέβαια στοχαστικός² και στην περίπτωση που είναι μη αναγώγιμος η αλυσίδα ονομάζεται απλή ή ανάγωγη ή μη ανάγωγη. Σε μια τέτοια αλυσίδα μπορούμε να μεταβούμε από οποιαδήποτε κατάσταση σε οποιαδήποτε άλλη.

Τα γραφήματα 1.1, 1.2 μπορούν αν θεωρηθούν ως γραφήματα διακριτών αλυσίδων Markov με κατάλληλους πίνακες μετάβασης. Στην πρώτη περίπτωση εύκολα βλέπει κανείς ότι δεν μπορεί να οδηγηθεί από την κατάσταση b στην κατάσταση a . Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση, οποιαδήποτε κατάσταση της αλυσίδας μπορεί να οδηγήσει σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Τα παρακάτω περιγράφονται με το εξής θεώρημα (βλέπε [Gan00b] σελ 50-52).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1

Εστω A ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης N . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. Ο πίνακας A είναι αναγώγιμος.
2. Υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P (δηλαδή ένας πίνακας που προκύπτει από κάποια μετάθεση γραμμών ή/και στηλών του μοναδιαίου πίνακα I) τέτοιος ώστε

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix},$$

²Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι 1.



όπου οι πίνακες B, D είναι τετραγωνικοί πίνακες.

3. Το κατευθυνόμενο γράφημα που σχετίζεται με τον πίνακα A είναι ισχυρώς συνεκτικό.
4. Για κάθε ζεύγος (i, j) , $i, j = 1, 2, \dots, N$, υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε το στοιχείο της γραμμής i και της στήλης j του πίνακα A^k να είναι θετικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2

Ο πίνακας A είναι μη αρνητικός, μη αναγώγιμος $N \times N$ πίνακας, αν και μόνο αν ο πίνακας $(I_N + A)^{N-1}$ είναι θετικός (όπου I_N ο μοναδιαίος πίνακας).

Υπάρχουν μερικές πολύ σημαντικές ιδιότητες της φασματικής ακτίνας που αναφέρονται σε μη αρνητικούς, μη αναγώγιμους πίνακες. Η κυριότερη από αυτές, που παίζει πολύ σημαντικό ρόλο σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, είναι το θεώρημα Perron-Frobenius, το οποίο περιγράφεται από δύο θεωρήματα. Το πρώτο το απέδειξε ο Perron το 1907 (βλέπε [Per07]).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 (Perron)

Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ ενός θετικού πίνακα A είναι μια απλή θετική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A . Σε αυτήν την θετική ιδιοτιμή αντιστοιχεί ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα.

Το παρακάτω απεδείχθη το 1912 (βλέπε [Fro12]) και αποτελεί γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος. Αναφέρεται σε μη αρνητικούς πίνακες (δηλαδή πίνακες με στοιχεία θετικά ή ίσα με το 0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4 (Frobenius)

Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ ενός μη αρνητικού, μη αναγώγιμου πίνακα A είναι μια απλή θετική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A . Σε αυτήν την θετική ιδιοτιμή αντιστοιχεί ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα.

Οι αποδείξεις αυτών των θεωρημάτων μπορούν επίσης να βρεθούν και στα [Gan00b] σελ. 50–66, [KT74] σελ. 542–551. Εφαρμογές αυτών των θεωρημάτων υπάρχουν σε σημαντικές επιστημονικές περιοχές όπως στα δυναμικά συστήματα, σε μελέτη πληθυσμιακών μοντέλων, σε διάφορες εφαρμογές της αριθμητικής ανάλυσης, κ.λ.π. (βλέπε [Mac00]). Μερικές από τις ιδιότητες των μη αρνητικών, μη αναγώγιμων πινάκων διατηρούνται και σε μη αρνητικούς αναγώγιμους πίνακες, αν και σε ασθενέστερη μορφή³. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5

Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ ενός μη αρνητικού πίνακα A είναι μια μη αρνητική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A . Σε αυτήν την μη αρνητική ιδιοτιμή αντιστοιχεί ένα μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι το παραπάνω θεώρημα δεν αναφέρεται σε απλή ρίζα όπως τα δύο προηγούμενα. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που να

³Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε μη αρνητικός πίνακας μπορεί να εκφραστεί ως το όριο μια ακολουθίας μη αναγώγιμων θετικών πινάκων.



αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\rho(A)^4$, κάτι που δεν μπορεί να συμβεί σε μη αναγώγιμους πίνακες. Επίσης, τα ιδιοδιανύσματα αυτά έχουν μη αρνητικές συντεταγμένες (δηλαδή μπορεί να έχουν και μηδενικά) κάτι που επίσης δεν συμβαίνει στους μη αναγώγιμους πίνακες.

Ο χώρος των τετραγωνικών πινάκων μπορεί να εφοδιαστεί με πολλές νόρμες. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετά παραδείγματα (βλέπε [Hou65], [Gan00a], [Gan00b], [1]). Παρακάτω δίνεται ο ορισμός της νόρμας πίνακα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7

Μια απεικόνιση $\|\cdot\|$ από τον χώρο $\mathcal{M}(\mathbb{R}, N)$ των $N \times N$ τετραγωνικών πινάκων στον $\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

1. $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
3. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$,
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,

$\forall A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, N)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **νόρμα πινάκων**.

Εδώ θα περιοριστούμε σε μια ειδική κατηγορία νορμών πινάκων, τις λεγόμενες φυσικές νόρμες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^N$. Η απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathcal{M}(\mathbb{R}, N) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^K, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

λέγεται **φυσική νόρμα πινάκων** ή **νόρμα πινάκων παραγόμενη από την νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^N$** .

Η παρακάτω προτάσεις συνδέουν όλες τις φυσικές νόρμες ενός πίνακα με την φασματική του ακτίνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6

Για οποιαδήποτε φυσική νόρμα στον $\mathcal{M}(\mathbb{R}, N)^5$ ισχύει

$$\rho(A) \leq \|A\|, \quad \forall A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, N).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.7

Για κάθε αριθμό $\epsilon > 0$ υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|_\epsilon$ στον $\mathbb{R}^N$ με αντίστοιχη παραγόμενη νόρμα στον $\mathcal{M}(\mathbb{R}, N)$ που πληροί την ιδιότητα:

$$\|A\|_\epsilon \leq \rho(A) + \epsilon.$$

1.3 Ανάλυση και Τοπολογία

Οι κλάδοι αυτοί των μαθηματικών παίζουν τον σημαντικότερο ρόλο στη θεωρία των Fractal συνόλων. Είναι λογικό, επομένως, να τους αφιερωθεί ένα σημαντικό μέρος του κεφαλαίου αυτού.

⁴Περίλαμβάνεται, επίσης, και η τετριμμένη περίπτωση στην οποία $\rho(A) = 0$.

⁵Το θεώρημα αυτό (καθώς επίσης και το αμέσως επόμενο) ισχύει και για οποιαδήποτε νόρμα στον $\mathcal{M}(\mathbb{C}, N)$.



1.3.1 Μετρικοί Χώροι

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9

Έστω X τυχαίο μη κενό σύνολο. Μια συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X,$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X,$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X,$

ονομάζεται **απόσταση** ή **μετρική** ορισμένη στο X , και το ζεύγος (X, d) ονομάζεται **μετρικός χώρος** (βλέπε [KF70] σελ. 37).

Δύο πολύ γνωστές μετρικές στον χώρο $\mathbb{R}^2$ είναι η Ευκλείδεια μετρική και η 1-μετρική, που συχνά αναφέρεται και ως Manhattan μετρική⁶.

1. $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$

$\forall \vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$

Οι γεωδειακές (δηλ. το “συντομότερο μονοπάτι” μεταξύ δύο σημείων), εξαρτώνται από τη μετρική που έχει ορισθεί. Για παράδειγμα, οι γεωδειακές κατά την ευκλείδεια μετρική είναι ευθύγραμμα τμήματα, ενώ κατά την Manhattan, κάθε γεωδειακή αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα, ένα παράλληλο στον άξονα x και ένα παράλληλο στον άξονα y . Αξίζει να σημειώσουμε μάλιστα ότι, στη δεύτερη περίπτωση, δεν υπάρχει μοναδική γεωδειακή όπως στην περίπτωση της ευκλείδειας μετρικής. Γενικά, στον χώρο $\mathbb{R}^N$ μπορούν να ορισθούν οι παρακάτω νόρμες και οι αντίστοιχες μετρικές:

$$\begin{aligned} \|x\|_p &:= \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \\ \|x\|_\infty &:= \max\{|x_i|, i = 1, 2, \dots, N\} \\ d_p(x, y) &:= \|x - y\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \\ d_\infty(x, y) &:= \|x - y\|_\infty = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, 2, \dots, N\} \end{aligned}$$

όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_N), y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ότι σε κάθε χώρο με νόρμα $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ μπορεί να ορισθεί μια μετρική ως εξής:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Επομένως, κάθε χώρος με νόρμα είναι και μετρικός χώρος. Έτσι, εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι οι μετρικές d_p ορίζονται μέσω των νορμών $\|\cdot\|_p$. Πολλοί από τους ορισμούς που θα δώσουμε παρακάτω είναι παρόμοιοι και στην περίπτωση των νορμών.

⁶Με αυτή τη μετρική μπορούμε να υπολογίσουμε αποστάσεις σε ένα τετραγωνισμένο οδικό δίκτυο (όπως αυτό του Manhattan).

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10**

Στην πραγματικότητα, δύο μετρικές d_1 και d_2 στον χώρο X ονομάζονται **ισοδύναμες**⁷ ($d_1 \sim d_2$) αν υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί c_1, c_2 , τέτοιοι ώστε

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X. \quad (1.1)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11

Δύο μετρικοί χώροι (X_1, d_1) και (X_2, d_2) είναι **ισοδύναμοι**, αν υπάρχει συνάρτηση $f : X_1 \rightarrow X_2$ 1-1 και επί, τέτοια ώστε η μετρική $\tilde{d}_1$ που ορίζεται στον X_1 σύμφωνα με τη σχέση

$$\tilde{d}_1(x, y) = d_2(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in X_1$$

να είναι ισοδύναμη με την d_1 .

Όμοια ορίζεται και η ισοδυναμία νορμών ($\|\cdot\| \sim \|\cdot\|^* \Leftrightarrow c_1 \|x\| \leq \|x\|^* \leq c_2 \|x\|$). Δύο ισοδύναμες μετρικές μας δίνουν την ίδια αντίληψη ως προς την απόσταση των σημείων του χώρου. Δύο σημεία που είναι “κοντά” (ή “μακριά”) ως προς μια μετρική, θα είναι επίσης “κοντά” (ή “μακριά”) ως προς οποιαδήποτε άλλη μετρική ισοδύναμη με την πρώτη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι μετρικές (άρα και οι αντίστοιχες νόρμες) d_p , $1 \leq p \leq \infty$ στον $\mathbb{R}^N$ είναι ισοδύναμες. Μάλιστα, μπορεί να αποδειχθεί ότι όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^N$ είναι ισοδύναμες (επομένως και όλες οι φυσικές νόρμες πινάκων είναι ισοδύναμες). Αυτή η ιδιότητα, όμως, δεν ισχύει και για τις μετρικές του $\mathbb{R}^{N^8}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12

Μια συνάρτηση $f : \langle X_1, d_1 \rangle \rightarrow \langle X_2, d_2 \rangle$ ονομάζεται **συνεχής** αν για κάθε $\epsilon > 0$ και $x \in X_1$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Αν, επιπλέον, η f είναι 1-1 και επί και η f^{-1} είναι και αυτή συνεχής, τότε η f καλείται **ομοιομορφισμός** μεταξύ των χώρων X_1 και X_2 . Σε αυτή την περίπτωση οι χώροι λέγονται **ομοιομορφικοί**.

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι δύο ισοδύναμοι μετρικοί χώροι είναι και ομοιομορφικοί. Η ιδιότητα της ισοδυναμίας μετρικών χώρων είναι πολύ πιο ισχυρή από αυτήν που παρουσιάστηκε στον παραπάνω ορισμό.

1.3.2 Ειδικά σύνολα στον $\langle X, d \rangle$.

Υπάρχουν κάποιες ειδικές κατηγορίες συνόλων που έχουν ιδιαίτερη σημασία και γι αυτό είναι σημαντικό να δούμε εν συντομία τους ορισμούς τους (βλέπε [KF70] σελ. 45–51).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13

Έστω $\langle X, d \rangle$ ένας μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Το σύνολο $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ καλείται **ανοικτή σφαίρα** κέντρου x_0 και ακτίνας r .

⁷ Δύο μετρικές d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες αν ορίζουν την ίδια τοπολογία (δηλαδή τα ίδια ανοικτά και κλειστά σύνολα) στους χώρους $\langle X, d_1 \rangle$, $\langle X, d_2 \rangle$. Στους χώρους που θα χρησιμοποιήσουμε, οι d_1 και d_2 έχουν την ιδιότητα 1.1. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι, αν δύο μετρικές έχουν την ιδιότητα 1.1 τότε είναι ισοδύναμες. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα στον χώρο $X = \mathbb{R}$ οι $d_1 = |x - y|$ και $d_2 = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$ είναι ισοδύναμες, αλλά δεν ικανοποιούν την σχέση 1.1. Για λόγους ευκολίας, θα χρησιμοποιούμε την ιδιότητα 1.1 ως ορισμό των ισοδύναμων μετρικών d_1, d_2 .

⁸ Π.χ. η διακριτή μετρική $d_\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ δεν είναι ισοδύναμη με τις d_p .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14**

Έστω $\langle X, d \rangle$ ένας μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Το σύνολο $\hat{S}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ καλείται **κλειστή σφαίρα** κέντρου x_0 και ακτίνας r .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.15

Το σύνολο $A \subset X$ καλείται **ανοικτό σύνολο**, αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $S(a, r) \subseteq A$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.16

Το σύνολο $A \subset X$ καλείται **κλειστό σύνολο**, αν το συμπλήρωμά του A^C είναι ανοικτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.17

Το σύνολο $A \subset X$ καλείται **φραγμένο σύνολο**, αν υπάρχει $M > 0$ και $x_0 \in A$ τέτοια ώστε $A \subseteq S(x_0, M)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.18

Το σύνολο $A \subset X$ καλείται **ολικά φραγμένο σύνολο**, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n S(x_i, \epsilon)$.

Δύο ομοιομορφικοί χώροι είναι “τοπολογικώς” ισοδύναμοι (δηλαδή έχουν τα ίδια ανοιχτά και κλειστά σύνολα).

1.3.3 Ακολουθίες - Όρια - Οριακά Σημεία

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.19

Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σημείων ενός μετρικού χώρου $\langle X, d \rangle$ **συγκλίνει** σε ένα σημείο $x \in X$ ($\lim x_n = x$), αν $\forall \epsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad \forall n > N.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.20

Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σημείων ενός μετρικού χώρου $\langle X, d \rangle$ ονομάζεται ακολουθία **Cauchy** ή **βασική** ακολουθία, αν $\forall \epsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$d(x_n, x_m) < \epsilon, \quad \forall n, m > N.$$

Εύκολα προκύπτει ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει, είναι ακολουθία Cauchy. Παρακάτω δίνονται οι ορισμοί μερικών ακόμα βασικών εννοιών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.21

Έστω $A \subseteq X$ ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου $\langle X, d \rangle$. Ένα σημείο $x \in X$ καλείται **οριακό σημείο** ή **σημείο συσσώρευσης** του A , αν υπάρχει μια ακολουθία σημείων του $A - \{x\}$ που να συγκλίνει στο A .

Το σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα οριακά σημεία του. Το σύνολο $\bar{A} := A \cup \{\text{οριακά σημεία του } A\}$ ονομάζεται **κλειστότητα** ή **θήκη** του A .

Ένα σύνολο λέγεται **τέλειο** αν ισούται με το σύνολο των οριακών σημείων του.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1.22**

Έστω $A \subset X$ ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου $\langle X, d \rangle$. Ένα σημείο $x \in X$ καλείται **συνοριακό** σημείο του A , αν για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $S(x, \epsilon)$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A και τουλάχιστον ένα στοιχείο του A^C . Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του A ονομάζεται **σύνορο** του A και συμβολίζεται ∂A .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.23

Έστω $A \subset X$ ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου $\langle X, d \rangle$. Ένα σημείο $x \in X$ καλείται **εσωτερικό** σημείο του A , αν υπάρχει $\epsilon > 0$, ώστε το $S(x, \epsilon)$ είναι υποσύνολο του A . Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A ονομάζεται **εσωτερικό** του A και συμβολίζεται A^0 .

1.3.4 Πληρότητα - Συμπάγεια

Δύο ισοδύναμοι μετρικοί χώροι (με την ιδιότητα 1.1) έχουν τα ίδια ανοικτά, κλειστά, φραγμένα και τέλεια σύνολα. Λέμε ότι αυτά τα χαρακτηριστικά είναι αναλλοίωτα μέσω ισοδυναμίας μετρικών χώρων. Εδώ παρουσιάζουμε δύο ακόμα χαρακτηριστικά με αυτήν την ιδιότητα (βλέπε [KF70] σελ. 78–104).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.24

Ένας μετρικός χώρος $\langle X, d \rangle$ είναι **πλήρης** αν κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα ακολουθία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.25

Έστω $A \subseteq X$ ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου $\langle X, d \rangle$. Το A καλείται **συμπαγές** αν κάθε ακολουθία σημείων του A έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο A .

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.8

Ο μετρικός χώρος $\langle X, d \rangle$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9

Έστω ο πλήρης μετρικός χώρος $\langle X, d \rangle$ και A ένα υποσύνολό του. Το A είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο.

Επίσης ισχύουν τα παρακάτω χρήσιμα συμπεράσματα:

- Έστω ο συμπαγής μετρικός χώρος $\langle X, d \rangle$ και A ένα κλειστό υποσύνολό του. Τότε το A είναι συμπαγές.
- Έστω ο πλήρης μετρικός χώρος $\langle X, d \rangle$. Τότε το $A \subseteq X$ είναι κλειστό αν και μόνο αν ο $\langle A, d \rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.
- Έστω οι πλήρεις μετρικοί χώροι $\langle X_1, d_1 \rangle$ και $\langle X_2, d_2 \rangle$ και $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ συμπαγή σύνολα. Τότε το $K_1 \times K_2$ είναι συμπαγές στον μετρικό χώρο $\langle X_1 \times X_2, d \rangle$, όπου $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$.
- Οι χώροι $\langle \mathbb{R}^N, d_p \rangle$, $1 \leq p \leq \infty$, $N \in \mathbb{N}$ είναι πλήρεις μετρικοί χώροι και γενικότερα ο $\langle \mathbb{R}^N, \|\cdot\| \rangle$, εφοδιασμένος με οποιαδήποτε νόρμα, είναι πλήρης μετρικός χώρος.
- Στους χώρους $\langle \mathbb{R}^N, d_p \rangle$, $1 \leq p \leq \infty$ κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι συμπαγές.



1.3.5 Συναρτήσεις

Έστω $\langle X, d \rangle$ και $\langle Y, \rho \rangle$ δύο μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ μια συνάρτηση. Αν $A \subseteq X$ τότε $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A \text{ με } f(x) = y\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.26

Οι παρακάτω ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

1. $H f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν, $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ τέτοιο ώστε $f(S_X(x_0, \delta)) \subseteq S_Y(f(x_0), \epsilon)$.
2. $H f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν, $\forall \epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ τέτοιο ώστε $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.
3. $H f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ του X με $\lim x_n = x_0$ έχουμε και $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Λέμε ότι η f είναι συνεχής στον X αν και μόνο αν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του X .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.27

Η συνάρτηση f ικανοποιεί συνθήκη **Lipschitz**, αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\rho(f(z), f(y)) \leq M \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Αν ισχύει $\rho(f(z), f(y)) = M \cdot d(x, y)$, $\forall x, y \in X$, η f καλείται **ομοιότητα**.

Ο ορισμός αυτός σε χώρους με νόρμα γράφεται:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Αν υπάρχει $M < 1$ που να ικανοποιεί την ανωτέρω συνθήκη, η συνάρτηση λέγεται **συστολή** και ο συντελεστής M που, σε αυτή την περίπτωση τον συμβολίζουμε συνήθως ως s , **συντελεστής συστολής**. Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε συνάρτηση συστολής είναι συνεχής. Επίσης ισχύουν τα εξής:

1. Αν ο $\langle X, d \rangle$ είναι συμπαγής, τότε το $f(X) \subseteq Y^9$ είναι συμπαγές σύνολο.
2. Αν ο $\langle X, d \rangle$ είναι συμπαγής και η $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \max\{f(x) : x \in X\} \\ f(x_2) &= \min\{f(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.28

Το σύνολο $A \neq \emptyset$, $A \subset X$ καλείται **σταθερό σύνολο** ή **ελκυστής** για την συνάρτηση $f : X \rightarrow X$, αν $f(A) = A$. Στην περίπτωση που το A είναι μονοσύνολο ονομάζεται **σταθερό σημείο** της f .

Γενικά, βέβαια, μια συνάρτηση δεν έχει σταθερό σύνολο. Η ύπαρξή του εξασφαλίζεται σε ειδικές περιπτώσεις.

Συμβολίζουμε με $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$, $n \in \mathbb{N}$ τη σύνθεση των συναρτήσεων ($f^1 = f$, $f^0 = id^{10}$). Η “συνεχής επανάληψη” της συνάρτησης θα μας χρειαστεί πολύ στα επόμενα.

⁹ $f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\}$.

¹⁰ id : η ταυτοτική απεικόνιση.



ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1 Έστω $\langle X, d \rangle$ ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει συμπαγές υποσύνολο $A \neq \emptyset$ του X , ώστε $f(A) = A$.

Απόδειξη.

Έστω $x_0 \in X$ τυχαίο σημείο. Ορίζουμε την ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} x_0, & n = 0 \\ f(x_0), & n = 1 \\ f^n(x_0), & n \geq 2. \end{cases}$$

Επειδή ο χώρος X είναι συμπαγής, το σύνολο

$$A = \{x \in X : \text{υπάρχει υποακολουθία της } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = x\}$$

είναι μη κενό. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το $A \neq \emptyset$ είναι κλειστό και άρα θα είναι συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς). Έστω $x \in A$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = x$. Επειδή η f είναι συνεχής θα έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{k_n}) = f(x),$$

με $f(a_{k_n}) = a_{k_n+1}$, για $n \in \mathbb{N}$. Άρα $f(x) \in A$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $A \subseteq f(A)$. Από την κατασκευή φαίνεται ότι το A δεν είναι μοναδικό. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.10 (Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach)

Έστω $\langle X, d \rangle$ ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ συνάρτηση συστολής με συντελεστή συστολής s . Τότε:

1. Υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο x_0 της f .
2. $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y)$, $\forall y \in X$.
3. Για κάθε $y \in X$ ισχύει ότι $|f^n(y) - x_0| \leq \frac{s^n}{1-s} |y - x_0|$.

Οι αποδείξεις και των δύο θεωρημάτων μπορούν να βρεθούν στα [2] και [Bar93].

Κλείνοντας παρουσιάζουμε κλάσεις συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά για την κατασκευή Fractal συνόλων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.29

Μια απεικόνιση $w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ της μορφής

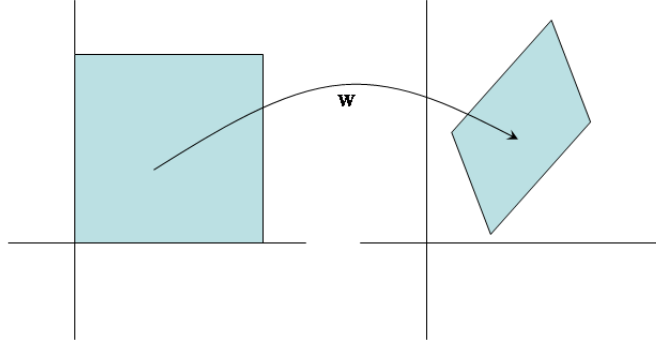
$$w(x) = A \cdot x + b,$$

όπου $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, N)$, $b \in \mathbb{R}^N$ λέγεται **affine** απεικόνιση. Αν $b = 0$ η w είναι **γραμμική**.

Οι affine απεικονίσεις έχουν μια πολύ βασική ιδιότητα. Απεικονίζουν παραλληλεπίπεδα του $\mathbb{R}^N$ σε παραλληλεπίπεδα (βλέπε σχήμα 1.3). Μια ειδική κατηγορία affine απεικονίσεων είναι οι ομοιότητες.

Μια affine απεικόνιση $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που έχει μια από τις παρακάτω μορφές:

$$\begin{aligned} w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \\ w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



Σχήμα 1.3: Μια affine απεικόνιση ορισμένη στον $\mathbb{R}^2$ μεταφέρει παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα.

με $e, f \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$, είναι ομοιότητα. Η γωνία θ καλείται γωνία στροφής, ενώ ο αριθμός r καλείται συντελεστής αναλογίας. Ιδιαίτερα, η γραμμική απεικόνιση

$$R_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

είναι μια **στροφή** γωνίας θ , ενώ η απεικόνιση

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

είναι ένας **κατοπτρισμός**.

Μια ομοιότητα μπορεί να περιστρέψει (υπό γωνία θ) ένα σύνολο, να το μεγαλώσει ή να το μικρύνει (με λόγο r) ή να δημιουργήσει το συμμετρικό του ως προς κάποιο άξονα (βλέπε σχήμα 1.4). Σε όλες τις περιπτώσεις, πάντως, διατηρεί τις γωνίες που εμφανίζονται στο αρχικό σύνολο.

ΛΗΜΜΑ 1.1

Αν μια affine απεικόνιση $w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N : w(x) = A \cdot x + b$, έχει την ιδιότητα

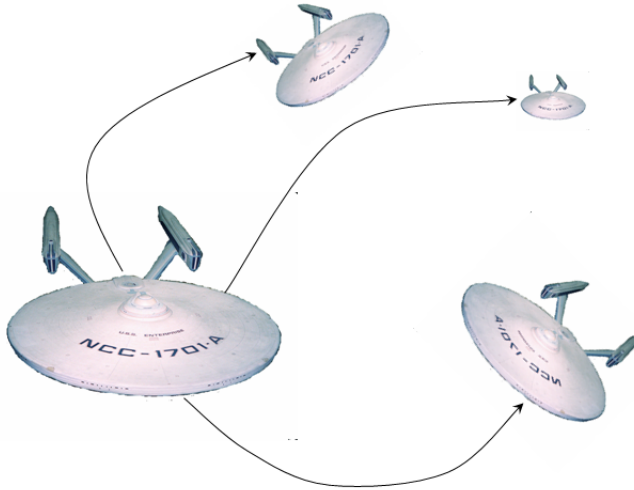
$$\|A\| < 1,$$

χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε φυσική νόρμα πινάκων, τότε είναι συστολή ως προς την αντίστοιχη νόρμα του $\mathbb{R}^N$.

Απόδειξη.

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $\|w(x) - w(y)\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$. Άρα η w είναι συστολή. $\square$

Για παράδειγμα, στην περίπτωση που η φασματική ακτίνα του πίνακα είναι μικρότερη της μονάδας, η απεικόνιση είναι συστολή.



Σχήμα 1.4: Μια ομοιότητα ορισμένη στον $\mathbb{R}^2$ διατηρεί τις γωνίες.

1.4 Ο χώρος των Fractal Συνόλων

Οι χώροι μέσα στους οποίους κατασκευάζουμε τα Fractal σύνολα είναι οι συνηθείς Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^N$. Βέβαια, κάθε υποσύνολο ενός Ευκλείδειου χώρου δεν είναι fractal σύνολο. Εδώ ορίζουμε έναν χώρο που θα μας βοηθήσει στην κατασκευή αυτών των συνόλων (βλέπε [Bar93] σελ. 27).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.30

Έστω $\langle X, d \rangle$ ένας πλήρης μετρικός χώρος. Ορίζουμε ως $\mathcal{H}(X)$ το σύνολο όλων των μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του X .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.31

Έστω $\langle X, d \rangle$ ένας πλήρης μετρικός χώρος, $x \in X$ και $A \in \mathcal{H}(X)$. Ορίζουμε

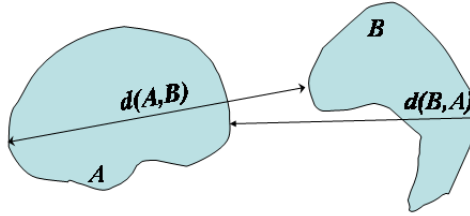
$$d(x, A) = \min\{d(x, y) : y \in A\}$$

ως την **απόσταση** του σημείου x από το σύνολο A .

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τη μετρική Hausdorff. Έστω $\langle X, d \rangle$ ένας πλήρης μετρικός χώρος, και $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Ορίζουμε

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\}$$

ως την απόσταση του συνόλου A από το σύνολο B . Χρησιμοποιώντας την συμπαγεία των A, B αποδεικνύεται ότι οι δύο παραπάνω ορισμοί έχουν νόημα (υπάρχει, δηλαδή, το ελάχιστο και το μέγιστο).



Σχήμα 1.5: Η μετρική Hausdorff που επάγεται από την ευκλείδια μετρική του $\mathbb{R}^2$. Στο παράδειγμα του σχήματος $h(A, B) = d(A, B)$.

Ορίζουμε την **μετρική Hausdorff** (που επάγεται από την d) ως εξής:

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι πράγματι μετρική οπότε, ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι μετρικός χώρος και ονομάζεται χώρος των Fractal Συνόλων του X .

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2

Υποθέτουμε ότι ο χώρος X είναι εφοδιασμένος με δύο ισοδύναμες μετρικές d, ρ ($d \sim \rho$). Τότε οι αντίστοιχες μετρικές Hausdorff του $\mathcal{H}(X)$, που επάγονται από τις d και ρ , είναι ισοδύναμες.

Αποδεικνύεται επίσης ότι¹¹:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.11

Έστω $\langle X, d \rangle$ ένας μετρικός χώρος. Ισχύουν τα παρακάτω:

- (Θεώρημα επιλογής του **Blaschke**) Αν το $B \subseteq X$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του X , τότε ο μετρικός χώρος $\langle \mathcal{H}(B), h \rangle$ είναι συμπαγής, ή ισοδύναμα κάθε ακολουθία συνόλων του $\mathcal{H}(B)$ έχει συγχλίνουσα υπακολουθία.
- Αν ο $\langle X, d \rangle$ είναι πλήρης, τότε ο μετρικός χώρος $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι πλήρης.

Η διαδικασία που ακολουθείται για την κατασκευή των Fractal συνόλων (η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 2) βασίζεται στην πληρότητα του χώρου $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$. Θεωρούμε κατάλληλες συναρτήσεις συστολής (στον $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$) και κατασκευάζουμε τα σύνολα μέσω επαναληπτικών διαδικασιών ως σταθερά σημεία. Το θεώρημα σταθερού σημείου Banach (θεώρημα 1.10) εξασφαλίζει την ύπαρξη τέτοιων συνόλων.

¹¹Μπορεί, επίσης, να αποδειχθεί ότι, αν ο X είναι συνεκτικός, τότε ο $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ είναι συνεκτικός.

Κεφάλαιο 2

Κατασκευή Fractal Συνόλων με χρήση ΣΕΣ (IFS)

Τα σύννεφα δεν είναι σφαιρικά,
τα βουνά δεν είναι κωνικά,
οι ακτές δεν είναι κυκλικές,
ο φλοιός των δέντρων δεν είναι λείος
και η τροχιά του κεραυνού δεν είναι ευθεία.

Benoit Mandelbrot

Στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου δόθηκε η βασική ιδέα της κατασκευής fractal συνόλων. Θεωρήσαμε ότι είναι σύνολα που προκύπτουν ως σταθερά σημεία συστολών στον χώρο $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^K), h \rangle$, $K \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι εν μέρει αληθές. Υπάρχουν σύνολα που θεωρούνται fractals αλλά δεν μπορούν να κατασκευαστούν με αυτό τον τρόπο, αλλά και σύνολα που κατασκευάζονται ως σταθερά σημεία συστολών του $\mathcal{H}(\mathbb{R}^K)$ και κανείς δεν μπορεί να τα θεωρήσει fractals. Η αλήθεια είναι ότι δεν υπάρχει ένας σαφής ορισμός που να χαρακτηρίζει ένα σύνολο ως fractal, όπως ακριβώς δεν υπάρχει ένας σαφής ορισμός για το φαινόμενο της ζωής, παρά μόνο κάποιες ιδιότητες κοινές στα έμβια όντα. Τέτοιες ιδιότητες είναι η δυνατότητα αναπαραγωγής, η ανταπόκριση με το περιβάλλον, η δυνατότητα προσαρμογής, η ανάπτυξη και η απαίτηση κάποιας μορφής ενέργειας. Οι περισσότεροι οργανισμοί πληρούν αυτά τα κριτήρια, υπάρχουν όμως αρκετοί άλλοι που παραβιάζουν κάποια από αυτά. Παραδείγματος χάριν, το μουλάρι και διάφορα στείρα φυτά που δημιουργήσε ο άνθρωπος δεν αναπαράγονται, πολλοί άνθρωποι που έχουν υποστεί σοβαρά τραύματα δεν αντιδρούν με το περιβάλλον, κλπ. Πολλοί βιολόγοι, μάλιστα, θεωρούν και τους ιούς ως έμβιους οργανισμούς. Υπάρχουν, επίσης, παραδείγματα αντικειμένων ή φυσικών φαινομένων που πληρούν πολλά από τα παραπάνω κριτήρια, όπως η φωτιά, οι ηλεκτρικές εκκενώσεις ή ένα σύγχρονο σύστημα αυτομάτου ελέγχου. Η φωτιά, για παράδειγμα, πληροί όλα τα παραπάνω κριτήρια αλλά βέβαια δεν έχει ζωή. Παρόμοια προβλήματα εμφανίστηκαν και στην προσπάθεια να δοθεί ένας αυστηρός ορισμός που να χαρακτηρίζει ένα σύνολο ως fractal. Ακολουθώντας παρόμοιους συλλογισμούς, ο Kenneth Falconer (βλέπε [Fal99]) πρότεινε ότι ένα fractal σύνολο F πρέπει να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Το F έχει άριστη δομή. Όσο και να το μεγενθύνουμε δεν πρέπει να παρουσιάσει “ομαλά” τμήματα (π.χ, ευθείες).



- Το F είναι πολύ “ανώμαλο” ώστε να μπορεί να περιγραφεί με παραδοσιακές γεωμετρικές μεθόδους.
- Συχνά το F αποτελείται από κομμάτια που “μοιάζουν” μεταξύ τους.
- Συνήθως η fractal διάσταση του F (βλέπε κεφάλαιο 3) είναι μεγαλύτερη από την τοπολογική του διάσταση.
- Στις περισσότερες περιπτώσεις το F ορίζεται με έναν απλό τρόπο (π.χ. αναδρομικά).

Πρέπει να τονιστεί ότι υπάρχουν σύνολα που δεν πληρούν κάποιες από αυτές τις ιδιότητες αλλά χαρακτηρίζονται από πολλούς ως fractal.

2.1 Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1

Έστω ότι οι απεικονίσεις $w_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots, N$ είναι συστολές στο μετρικό χώρο $\langle X, d \rangle$. Τότε η απεικόνιση $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ με

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A)$$

είναι συνάρτηση συστολής. Επιπλέον, αν $s_1, s_2, \dots, s_N$ είναι οι συντελεστές συστολής των απεικονίσεων w_i , $i = 1, 2, \dots, N$, τότε η W έχει συντελεστή συστολής

$$s = \max\{s_i : i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Έτσι, αν ο $\langle X, d \rangle$ είναι πλήρης, από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach έχουμε ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1

Έστω ο πλήρης μετρικός χώρος $\langle X, d \rangle$ και οι συστολές $w_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots, N$. Τότε για τη συνάρτηση συστολής W του ορισμού 2.1 ισχύουν τα εξής:

- Υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο $A \in \mathcal{H}(X)$ το οποίο είναι σταθερό σημείο της W .
- $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$, για κάθε αρχικό σύνολο $B \in \mathcal{H}(X)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1

Ένα Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΣΕΣ) αποτελείται από έναν πλήρη μετρικό χώρο $\langle X, d \rangle$ μαζί με ένα σύνολο συναρτήσεων $w_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots, N$. Το ΣΕΣ, για συντομία, συμβολίζεται με $\{X, w_{1-N}\}$. Αν οι απεικονίσεις w_i είναι συστολές το ΣΕΣ καλείται υπερβολικό. Η σύντμηση IFS^1 χρησιμοποιείται διεθνώς.

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.1 υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο A , το οποίο είναι το σταθερό σημείο της W που ορίζεται από ένα υπερβολικό ΣΕΣ. Το σύνολο αυτό το ονομάζουμε **ελκυστή** του ΣΕΣ.

2.2 Αλγόριθμοι Κατασκευής Ελκυστών ΣΕΣ

Επιλέγοντας κατάλληλες απεικονίσεις w_i μπορούμε να κατασκευάσουμε ΣΕΣ με ελκυστές διάφορα γνωστά Fractal σύνολα. Υπάρχουν δύο γνωστοί αλγόριθμοι που επιτυγχάνουν την κατασκευή του ελκυστή ενός οποιουδήποτε ΣΕΣ ορισμένου στον (πλήρη) Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^K$ (όπου συνήθως $K = 1, 2, 3$). Ο πρώτος είναι γνωστός ως **Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων - ΑΑΕ**

¹Iterated Function System



(ή DIA² διεθνώς) και ο δεύτερος ως Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων - ΑΤΕ (ή RIA³ διεθνώς).

2.2.1 Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων

Έστω $\{\mathbb{R}^K, w_{1-N}\}$ ένα (υπερβολικό) ΣΕΣ. Επιλέγουμε ένα τυχαίο αρχικό συμπαγές σύνολο $A_0 \subset \mathbb{R}^K$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το σύνολο $A_1 = W(A_0) = \bigcup_{i=1}^N w_i(A_0)$, το σύνολο $A_2 = W(A_1)$ κ.ο.κ. Ακολουθούμε την αναδρομική σχέση

$$A_n = W(A_{n-1}), \text{ για } i = 1, 2, \dots$$

Σύμφωνα με το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach (θεώρημα 1.10) η ακολουθία

$$\{A_0, A_1, \dots, A_n, \dots\}$$

συγκλίνει σε ένα συμπαγές σύνολο A , τον ελκυστή του ΣΕΣ, σύμφωνα με την μετρική Hausdorff⁴. Στο παράρτημα Α (πρόγραμμα Α'1) παρουσιάζουμε την υλοποίηση του αλγορίθμου αυτού σε περιβάλλον Matlab.

Πρέπει να τονισθεί ότι ο αλγόριθμος δίνει σωστά αποτελέσματα για κάθε τυχαία επιλογή του αρχικού συνόλου A_0 . Όμως αν το A_0 απέχει πολύ από τον ελκυστή του ΣΕΣ, θα χρειαστούν πολλές επαναλήψεις ώστε να πάρουμε ως αποτέλεσμα ένα σύνολο “αρκετά κοντά” στον ελκυστή. Αυτό βέβαια συνεπάγεται μεγάλο υπολογιστικό χρόνο και μεγάλη χωρητικότητα μνήμης. Είναι, επομένως, επιβεβλημένο να επιλέξουμε ένα αρχικό σύνολο όσο το δυνατόν “κοντύτερα” στον ελκυστή. Συνήθως, αν γνωρίζουμε μερικά από τα σημεία του ελκυστή, επιλέγουμε αυτά ως αρχικό σύνολο.

2.2.2 Αλγόριθμος Τυχαίων επαναλήψεων

Θεωρούμε, πάλι, ένα (υπερβολικό) ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^K, w_{1-N}\}$ μαζί με ένα σύνολο πιθανοτήτων p_i , $i = 1, 2, \dots, N$, τέτοιο ώστε $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$ ⁵. Αντιστοιχούμε κάθε πιθανότητα p_i με την απεικόνιση w_i και επιλέγουμε ένα τυχαίο αρχικό σημείο x_0 . Στη συνέχεια, επιλέγουμε ως w_{i_1} μια από τις απεικονίσεις $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ (η πιθανότητα επιλογής της w_i είναι p_i) και υπολογίζουμε το σημείο $x_1 = w_{i_1}(x_0)$. Ακολουθώντας, επιλέγουμε μια νέα απεικόνιση w_{i_2} , υπολογίζουμε το σημείο $x_2 = w_{i_2}(x_1)$ κ.ο.κ. Αν σχεδιάσουμε όλα τα σημεία $\{x_0, x_1, \dots\}$ θα προκύψει ένα “σχέδιο” του ελκυστή του ΣΕΣ. Ο αλγόριθμος αυτός δεν υπολογίζει κατευθείαν τον ελκυστή του ΣΕΣ, αλλά υπολογίζει σημεία που σιγά-σιγά τον πλησιάζουν. Το πλεονέκτημά του είναι ότι έχει πολύ μικρότερες απαιτήσεις μνήμης από τον ΑΑΕ. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε βήμα του αλγορίθμου παράγει ένα σημείο, ενώ στον ΑΑΕ ο αριθμός των παραγόμενων σημείων σε κάθε βήμα αυξάνεται γεωμετρικά. Επιπλέον, επιλέγοντας διαφορετικές πιθανότητες για κάθε απεικόνιση, συχνά έχουμε την δυνατότητα να “δούμε” καθαρότερα τον ελκυστή χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό σημείων με τον ΑΑΕ. Το πρόγραμμα Α'2 στο παράρτημα Α παρουσιάζει την υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου σε Matlab.

2.3 Fractal σύνολα ως ελκυστές ΣΕΣ

Έχοντας σχεδιάσει τους αλγορίθμους για την κατασκευή του ελκυστή οποιουδήποτε υπερβολικού ΣΕΣ, μπορούμε να δούμε πως κατασκευάζονται ορισμένα γνωστά Fractal σύνολα μέσω ΣΕΣ.

²Deterministic Iteration Algorithm

³Random Iteration Algorithm

⁴ή οποιαδήποτε άλλη ισοδύναμη μετρική.

⁵Συνήθως παίρνουμε $p_1 = p_2 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$.



2.3.1 Το σύνολο Cantor

Το (τριαδικό) σύνολο Cantor είναι ένα από τα πρώτα και πιο γνωστά “περίεργα” σύνολα. Η κατασκευή του είναι σχετικά απλή. Παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $[0, 1] = A_1$ και το σπάμε σε τρία ίσα τμήματα. Αφαιρούμε το μεσαίο, οπότε παίρνουμε $A_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στα άλλα δύο ακριανά ευθύγραμμα τμήματα. Η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι το σύνολο Cantor. Το σύνολο αυτό μπορεί βέβαια να προκύψει και μέσω του (ορισμένου στο $\mathbb{R}$) ΣΕΣ:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{3} \cdot x \\ w_2(x) &= \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Στο σχήμα 2.1 φαίνεται, διαδοχικά, η κατασκευή του συνόλου αυτού μέσω του άνω ΣΕΣ, χρησιμοποιώντας τον ΑΑΕ με αρχικό σύνολο το $A_0 = [0, 1]$. Η διαδικασία σταματάει στην 4η επανάληψη.



Σχήμα 2.1: Το σύνολο Cantor.

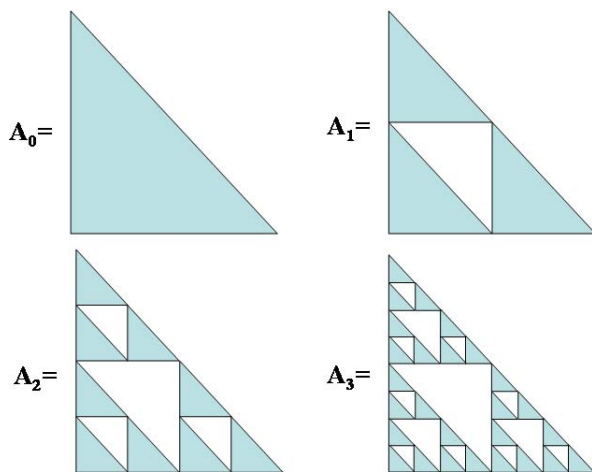
2.3.2 Το τρίγωνο Sierpinski

Ένα άλλο πολύ γνωστό σχήμα είναι το τρίγωνο Sierpinski. Σε ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο φέρνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των τριών πλευρών. Έτσι σχηματίζονται τέσσερα τρίγωνα, από τα οποία κρατάμε τα τρία και αφαιρούμε το εσωτερικό (αυτό που οι κορυφές του είναι τα μέσα των τριών πλευρών). Σε κάθε ένα από τα τρίγωνα που κρατήσαμε, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία κ.ο.κ. Η τομή όλων αυτών των συνόλων είναι το τρίγωνο Sierpinski (βλέπε σχήμα 2.2).

Και πάλι, μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύνολο αυτό μέσω του ΣΕΣ (στον $\mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Η λειτουργία αυτών των απεικονίσεων περιγράφεται στο σχήμα 2.3. Κάθε απεικόνιση συρρικνώνει το

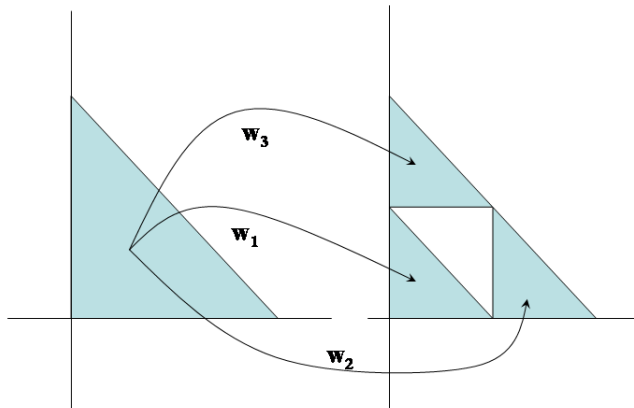


Σχήμα 2.2: Το τρίγωνο Sierpinski.

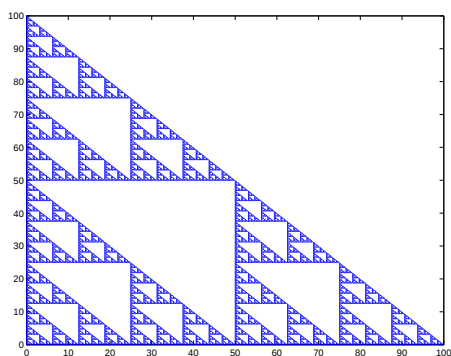
αρχικό σύνολο κατά 50% και το μεταφέρει. Ο πίνακας W που θα δώσουμε στον ΑΑΕ θα είναι:

$$W = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 50 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας ως αρχικό σύνολο το $A_0 = \{(0,0)\}$, το οποίο είναι υποσύνολο του τριγώνου Sierpinski, μετά από 10 επαναλήψεις παίρνουμε τον ελκυστή του σχήματος 2.4.



Σχήμα 2.3: Οι απεικονίσεις w_1, w_2, w_3 του ΣΕΣ με ελκυστή το τρίγωνο Sierpinski.



Σχήμα 2.4: Το τρίγωνο Sierpinski ως ελκυστής ΣΕΣ.



2.3.3 Φύλλα Δέντρων

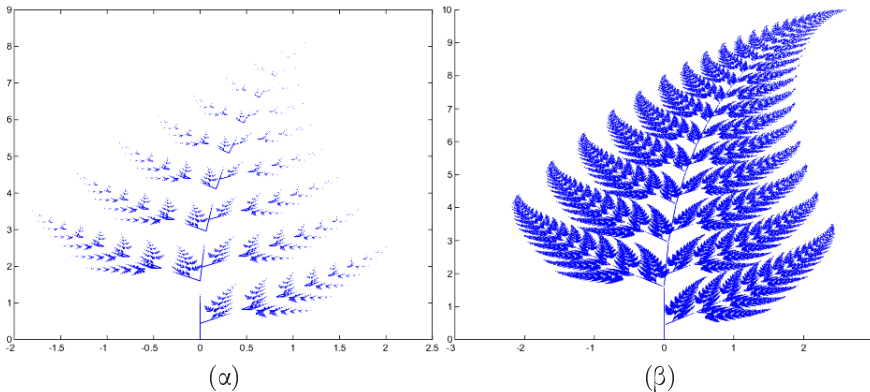
Εκτός από τα γνωστά μαθηματικά σύνολα που αναφέρθηκαν, ένα ΣΕΣ μπορεί να έχει ελκυστή ένα σύνολο που να μοιάζει με διάφορα σχήματα που εμφανίζονται στη φύση. Αν δώσουμε στον ΑΑΕ τον πίνακα

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.16 & 0 & 0 \\ 0.85 & 0.04 & -0.04 & 0.85 & 0 & 1.6 \\ 0.2 & -0.26 & 0.23 & 0.22 & 0 & 1.6 \\ -0.15 & 0.28 & 0.26 & 0.24 & 0 & 0.44 \end{bmatrix},$$

παίρνουμε ένα φύλλο φτέρης. Για να δούμε καθαρά το σχήμα του ελκυστή πρέπει να αυξήσουμε αρκετά τον αριθμό των επαναλήψεων, ώστε να έχουμε μεγάλο αριθμό παραγόμενων σημείων. Χρησιμοποιώντας τον ΑΤΕ με πίνακα πιθανοτήτων

$$P = [0.01 \quad 0.85 \quad 0.07 \quad 0.07],$$

μπορούμε να δούμε το σχήμα καθαρότερα χρησιμοποιώντας λιγότερα σημεία (βλέπε σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: Ένα απλό φύλλο φτέρης. Ο ελκυστής που μας δίνει ο ΑΑΕ (α) με 10 επαναλήψεις (≈ 260.000 σημεία) δεν φαίνεται πολύ καθαρά, σε αντίθεση με τον ελκυστή που μας δίνει ο ΑΤΕ (β) (200.000 σημεία).

Ένα άλλο πολύ γνωστό φύλλο που μπορεί να κατασκευαστεί είναι το πλατανόφυλλο. Ο πίνακας

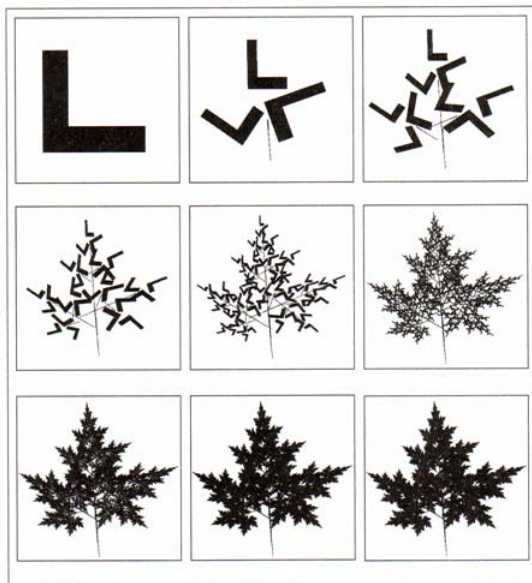
$$W = \begin{bmatrix} 0.49 & 0.01 & 0 & 0.62 & 25 & -2 \\ 0.27 & 0.52 & -0.40 & 0.36 & 0 & 56 \\ 0.18 & -0.73 & 0.50 & 0.26 & 88 & 8 \\ 0.04 & -0.01 & 0.50 & 0 & 52 & 32 \end{bmatrix}$$

πρέπει να εισαχθεί στους αλγόριθμους για να μας δώσει τον επιθυμητό ελκυστή (σχήμα 2.7). Ο πίνακας

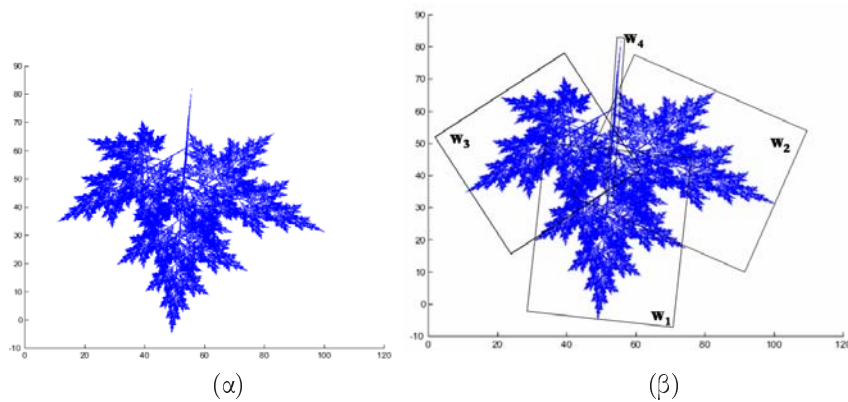
$$W = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.39 & -0.31 & 0.30 & 96 & 108 \\ 0.68 & 0.17 & -0.17 & 0.68 & 73 & 11 \\ 0.05 & -0.80 & -0.22 & -0.19 & 286 & 131 \\ 0.02 & -0.36 & 0.00 & 0.38 & 160 & 97 \end{bmatrix}$$



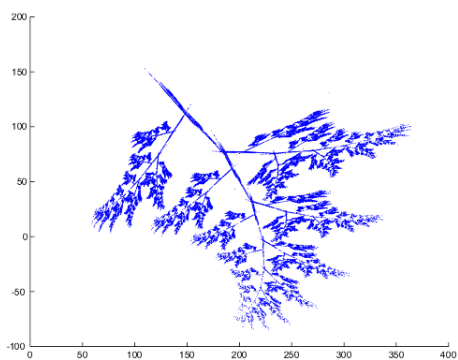
μας δίνει ένα κλαδί φτέρης (σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.6: Το πλατανόφυλλο όπως προκύπτει αν ως αρχικό σύνολο επιλέξουμε το γράμμα L.



Σχήμα 2.7: Ένα απλό πλατανόφυλλο. (α) Ο ελκυστής. (β) Ο τρόπος λειτουργίας των 4 απεικονίσεων w .



Σχήμα 2.8: Ένα κλαδί φτέρης.



2.4 Το Θεώρημα Συγκόλλησης

Μέχρι τώρα είδαμε τρόπους κατασκευής διαφόρων Fractal συνόλων με τη χρήση ΣΕΣ. Πολλά από τα σύνολα που παρουσιάσαμε έχουν ομοιότητες με σχήματα που εμφανίζονται στη φύση. Εύλογα, θα μπορούσε κάποιος να ρωτήσει: “Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ΣΕΣ με ελκυστή που να μοιάζει με ένα δοσμένο σύνολο;” Απάντηση σε αυτό το σημαντικό ερώτημα δίνει το θεώρημα του Banach (θεώρημα 1.10) το οποίο επαναδιατύπωσε ο Michael Barnsley το 1985, ώστε να αναφέρεται σε ελκυστές ΣΕΣ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2

(**Θεώρημα Συγκόλλησης**). Έστω $\langle X, d \rangle$ ένας πλήρης μετρικός χώρος, ένα σύνολο $B \in \mathcal{H}(X)$, όπου $\langle \mathcal{H}(X), h \rangle$ ο μετρικός χώρος των fractal, και ένα (υπερβολικό) ΣΕΣ $\{X, w_{1-N}\}$ με συντελεστή συστολής $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, $0 \leq s < 1$. Έστω A ο ελκυστής του ΣΕΣ. Ισχύουν τα παρακάτω:

- Αν το ΣΕΣ πληροί την ιδιότητα: $h\left(B, \bigcup_{i=1}^N w_i(B)\right) \leq \epsilon$, τότε $h(B, A) \leq \frac{\epsilon}{1-s}$.
- $h(B, A) \leq \frac{h\left(B, \bigcup_{i=1}^N w_i(B)\right)}{1-s}$.

Το Θεώρημα Συγκόλλησης μας λέει ότι για να βρούμε ένα ΣΕΣ, του οποίου ο ελκυστής θα είναι “κοντά” σε ένα δοσμένο συμπαγές σύνολο B (ή ισοδύναμα θα “μοιάζει” πολύ με το B), πρέπει να βρεθούν απεικονίσεις συστολής (σε έναν χώρο που θα περιέχει το σύνολο B), τέτοιες ώστε η ένωση (η συγκόλληση) των συνόλων που προκύπτουν ως εικόνες του B μέσω των απεικονίσεων αυτών να είναι “κοντά” στο δοσμένο σύνολο B^6 . Πρέπει, βέβαια, να τονιστεί ότι το Θεώρημα Συγκόλλησης δεν μας περιγράφει κάποια μέθοδο για να επιτύχουμε την κατασκευή ενός τέτοιου ΣΕΣ, αλλά μια ιδιότητα που αυτό πρέπει να πληροί.

2.5 Περιοδικά Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων

Όλα τα σχήματα που είδαμε στην παράγραφο 2.1 είναι αυτοόμοια. Δηλαδή, αν μεγενθύνουμε κάποιο κομμάτι τους θα βρούμε ένα σχήμα όμοιο με το ολικό σχήμα. Εδώ θα περιγράψουμε τρόπους ώστε να κατασκευάσουμε Fractal σύνολα που να μην έχουν αυτή την ιδιότητα.

⁶Κοντά ως προς τη μετρική Hausdorff.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2**

Ένα **Περιοδικό Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΠΣΕΣ)**⁷ αποτελείται από ένα ΣΕΣ $\{X, w_{1-N}\}$ μαζί με ένα πίνακα $(p_{ij})^N$, $p_{ij} \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

- $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$, for $i = 1, 2, \dots, N$
- Ο πίνακας $(p_{ij})^N$ είναι μη αναγώγιμος.

Η πιθανότητα p_{ij} ονομάζεται πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j .

Το ΠΣΕΣ είναι ουσιαστικά μια μαρκοβιανή αλυσίδα με N καταστάσεις. Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε τον ΑΤΕ με ένα αρχικό σύνολο A_0 στο οποίο εφαρμόζουμε αρχικά την απεικόνιση w_i . Τότε λέμε ότι η αλυσίδα μετέβη στην κατάσταση i . Η πιθανότητα p_{ij} εκφράζει την πιθανότητα επιλογής της απεικόνισης w_j , δεδομένου ότι στο προηγούμενο βήμα του αλγορίθμου εφαρμόστηκε η απεικόνιση w_i . Εκφράζει, δηλαδή, την πιθανότητα να μεταβεί η αλυσίδα από την κατάσταση i στην κατάσταση j . Οι δύο ιδιότητες που πρέπει να πληροί ο πίνακας $(p_{ij})^N$ γίνονται με αυτό τον τρόπο ευκολότερα κατανοητές. Η πρώτη ιδιότητα αναφέρει ότι η αλυσίδα είναι στοχαστική, δηλαδή σε κάθε κατάσταση το άθροισμα των πιθανοτήτων μετάβασης είναι 1. Η δεύτερη ιδιότητα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην παράγραφο 1.2, εξασφαλίζει ότι η αλυσίδα είναι ανάγωγη, δηλαδή ότι από κάθε κατάσταση i ($i = 1, 2, \dots, N$), μπορεί να μεταβεί σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση j ⁸ ($j = 1, 2, \dots, N$). Έτσι, είμαστε σίγουροι ότι ο ΑΤΕ θα χρησιμοποιήσει όλες τις απεικονίσεις του ΣΕΣ. Σε περίπτωση αναγώγιμου πίνακα, θα “παγιδευτούμε” σε ένα μονοπάτι καταστάσεων και δεν θα χρησιμοποιήσουμε ποτέ τις απεικονίσεις που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες καταστάσεις.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.1 (Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων για ΠΣΕΣ)

1. Ξεκινάμε από ένα τυχαίο σημείο A_0 και μια τυχαία απεικόνιση w_{i_1} .
2. Βρίσκουμε το σημείο $A_1 = w_{i_1}(A_0)$
3. Στη συνέχεια εκλέγουμε τυχαία (με βάση τις πιθανότητες του πίνακα $(p_{ij})^N$) μια άλλη απεικόνιση w_{i_2} .
4. Βρίσκουμε το σημείο $A_2 = w_{i_2}(A_1)$.
5. Εκτελούμε τα βήματα 3-4 όσες φορές θέλουμε.

Ο κώδικας σε Matlab δίνεται παράρτημα Α (πρόγραμμα Α'.3):

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητά όσα αναφέραμε παραπάνω θα δώσουμε ένα παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε ένα ΠΣΕΣ με τις 4 απεικονίσεις:

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

⁷ Διεθνώς ονομάζεται Recurrent Iterated Function System - RIFS

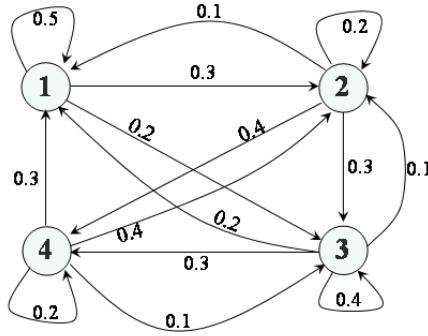
⁸ Σε μια τέτοια αλυσίδα όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο.



και τον στοχαστικό, μη αναγώγιμο πίνακα

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Το γράφημα της αντίστοιχης μαρκοβιανής αλυσίδας φαίνεται στο σχήμα 2.9 ενώ ο ελκυστής του ΠΣΕΣ, όπως προκύπτει μέσω του ΑΤΕ που περιγράψαμε, δίνεται στο σχήμα 2.10. Στο ίδιο σχήμα δίνονται και οι ελκυστές των ΠΣΕΣ που προκύπτουν αν αλλάξουμε τον πίνακα P .

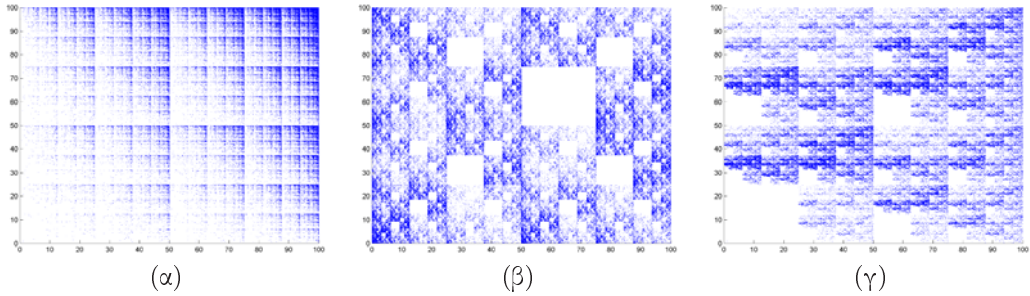


Σχήμα 2.9: Το κατευθυνόμενο γράφημα της μαρκοβιανής αλυσίδας ενός ΠΣΕΣ.

Τι συμβαίνει, όμως, στην περίπτωση που ο πίνακας είναι αναγώγιμος; Όπως αναφέρθηκε ήδη, σε αυτή την περίπτωση ο ΑΤΕ θα χρησιμοποιήσει μόνο κάποιες από τις απεικονίσεις του ΠΣΕΣ, αφού οι υπόλοιπες δεν θα είναι προσπελάσιμες μέσω του πίνακα πιθανοτήτων $P = (p_{ij})^N$. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το ΣΕΣ που έχει ως ελκυστή το πλατανόφυλλο (σχήμα 2.7) με τον στοχαστικό αναγώγιμο πίνακα:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τον ΑΤΕ παρατηρούμε ότι ξεκινώντας με διαφορετική απεικόνιση προκύπτει και διαφορετικός ελκυστής (σχήμα 2.11). Είναι όμως δυνατόν να αλλάξουμε τον ΑΤΕ ώστε να μπορεί να κατασκευάσει τον ελκυστή ενός τέτοιου ΠΣΕΣ. Για να γίνει αυτό, όμως, θα πρέπει να εντοπίσουμε όλες τις συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος του ΠΣΕΣ και σε κάθε βήμα να εφαρμόζουμε στο αρχικό σημείο μια απεικόνιση από την κάθε συνιστώσα σύμφωνα με τις πιθανότητες του πίνακα P . Απλούστερα, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε και με τις N απεικονίσεις του ΠΣΕΣ και σε κάθε βήμα να εφαρμόζουμε στο αρχικό σημείο άλλες N απεικονίσεις σύμφωνα, πάντα, με τις πιθανότητες του P . Ο αλγόριθμος αυτός δίνεται αναλυτικότερα παρακάτω.



$$P = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Σχήμα 2.10: Το ΠΣΕΣ με διαφορετικούς πίνακες δίνει διαφορετικούς ελκυστές.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 2.2 (ΑΤΕ για ΠΣΕΣ με αναγώγιμους πίνακες)

1. Ξεκινάμε από N τυχαία σημεία A_i^0 , ($i = 1, 2, \dots, N$).
2. Βρίσκουμε τα σημεία $A_i^1 = w_i(A_i^0)$, ($i = 1, 2, \dots, N$).
3. Στη συνέχεια για κάθε w_i εκλέγουμε τυχαία (με βάση τις πιθανότητες του πίνακα P) μια άλλη απεικόνιση w_i^2 .
4. Βρίσκουμε τα σημεία $A_i^2 = w_i^2(A_i^1)$ ($i = 1, 2, \dots, N$).
5. Εκτελούμε τα βήματα 3-4 όσες φορές θέλουμε.

2.5.1 Ύπαρξη ελκυστή ενός ΠΣΕΣ

Παρ'ότι έχουμε δώσει αλγόριθμους κατασκευής του ελκυστή ενός ΠΣΕΣ δεν έχουμε αναφέρει ακόμη, αν και υπό ποιες προϋποθέσεις υπάρχει αυτός ο ελκυστής. Ας θεωρήσουμε ένα ΠΣΕΣ ορισμένο στον μετρικό χώρο $\langle X, d \rangle$ με τις απεικονίσεις $w_i : X \rightarrow X$ και τον πίνακα $P = (p_{ij})^N$. Ορίζουμε τις απεικονίσεις

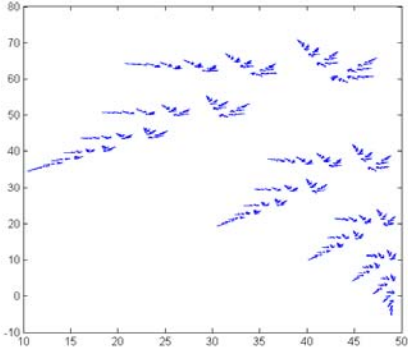
$$W_{ij} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) : W_{ij}(B) = \begin{cases} w_i(B), & p_{ji} > 0 \\ \emptyset, & p_{ji} = 0 \end{cases}$$

και τον μετρικό χώρο

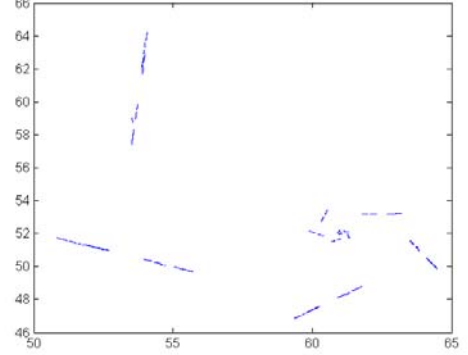
$$\tilde{\mathcal{H}}(X) = \mathcal{H}(X)^N = \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \times \dots \times \mathcal{H}(X),$$

με την μετρική $\tilde{h}$:

$$\tilde{h} \left(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} \right) = \max\{h(A_i, B_i); i = 1, 2, \dots, N\}.$$



(α)



(β)

Σχήμα 2.11: Το πλατανόφυλλο (α) ξεκινώντας με μια από τις δύο πρώτες και (β) μια από τις δύο τελευταίες απεικονίσεις.

Στη συνέχεια ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned}
 W : \tilde{H}(X) &\rightarrow \tilde{H}(X) : W \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \dots & W_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} W_{11}(A_1) \cup W_{12}(A_2) \cup \dots \cup W_{1N}(A_N) \\ W_{21}(A_1) \cup W_{22}(A_2) \cup \dots \cup W_{2N}(A_N) \\ \vdots \\ W_{N1}(A_1) \cup W_{N2}(A_2) \cup \dots \cup W_{NN}(A_N) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \bigcup_{j \in I(1)} w_1(A_j) \\ \bigcup_{j \in I(2)} w_2(A_j) \\ \vdots \\ \bigcup_{j \in I(N)} w_N(A_j) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

όπου $I(i) = \{j : p_{ji} > 0\}$, για $i = 1, 2, \dots, N$.

Για παράδειγμα, στο ΠΣΕΣ που ορίζεται από τις απεικονίσεις 2.1-2.4 και από τον πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$



η W θα είναι η εξής:

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & w_1 & \emptyset \\ \emptyset & w_2 & w_2 & w_2 \\ w_3 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & w_4 & \emptyset & w_4 \end{pmatrix}.$$

Ξεκινώντας με ένα αρχικό σημείο του χώρου $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)^4$, έστω το $(A_1, A_2, A_3, A_4)^T$, υποθέτουμε ότι το A_1 προέκυψε από την εφαρμογή της w_1 , το A_2 από την εφαρμογή της w_2 κ.ο.κ. Το $W(A)$ θα είναι:

$$W \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(A_1) \cup w_1(A_2) \cup w_1(A_3) \\ w_2(A_2) \cup w_2(A_3) \cup w_2(A_4) \\ w_3(A_1) \\ w_4(A_2) \cup w_4(A_4) \end{pmatrix}$$

Η απεικόνιση W έχει κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο, ώστε σε κάθε σύνολο A_i να εφαρμόζονται οι απεικονίσεις που μπορούν να ακολουθήσουν, μετά την εφαρμογή της w_i , σύμφωνα με τον P . Για παράδειγμα στο A_1 (το οποίο υποθέσαμε ότι προέκυψε από την w_1) εφαρμόζονται οι w_1, w_3 αλλά όχι οι w_2, w_4 .

ΛΗΜΜΑ 2.1

Αν οι απεικονίσεις $w_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots, N$ ενός ΠΣΕΣ ορισμένου στον πλήρη μετρικό χώρο $\langle X, d \rangle$ είναι συστολές με συντελεστές s_i αντίστοιχα, τότε η απεικόνιση $W : \tilde{\mathcal{H}}(X) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(X)$, όπως ορίστηκε παραπάνω

$$W \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcup_{j \in I(1)} w_1(A_j) \\ \bigcup_{j \in I(2)} w_2(A_j) \\ \vdots \\ \bigcup_{j \in I(N)} w_N(A_j) \end{pmatrix},$$

όπου $I(i) = \{j : p_{ji} > 0\}$, για $i = 1, 2, \dots, N$, είναι επίσης συστολή με συντελεστή

$$s = \max\{s_i; i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Έτσι από το θεώρημα σταθερού σημείου του Bannach, αφού ο $\tilde{\mathcal{H}}(X)$ είναι πλήρης, υπάρχει ένα σύνολο $E = \{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ για το οποίο ισχύει:

$$W(E) = E$$

και

$$E_i = \bigcup_{j \in I(i)} w_i(E_j), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N.$$

Καλούμε το στοιχείο E **ελκυστή** του ΠΣΕΣ. Πολλές φορές, χάριν απλότητας, ονομάζουμε ελκυστή του ΠΣΕΣ την ένωση όλων των E_i , δηλαδή το σύνολο

$$\bigcup_{i=1}^N E_i.$$

Κλείνοντας, αναφέρουμε ότι ισχύει θεώρημα ανάλογο του θεωρήματος συγκόλλησης 2.2. Όπως θα δούμε παρακάτω, το θεώρημα αυτό παίζει βασικό ρόλο στη συμπίεση σήματος.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3**

(**Θεώρημα Συγκόλλησης για ΠΣΕΣ**). Έστω ένα ΠΣΕΣ και η απεικόνιση W , όπως ήδη περιγράφηκε σε αυτή την παράγραφο, με συντελεστή συστολής s . Αν ένα στοιχείο $B \in \mathcal{H}(X)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\tilde{h}(B, W(B)) \leq \epsilon,$$

για κάποιο $\epsilon > 0$, τότε

$$\tilde{h}(E, A) \leq \frac{\epsilon}{1-s},$$

όπου E ο ελκυστής του ΠΣΕΣ.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα ο Barnsley κατασκεύασε διάφορους ελκυστές ΠΣΕΣ, που θυμίζουν πολύ έντονα ζωγραφικούς πίνακες.



Σχήμα 2.12: Ο ελκυστής ενός πολύπλοκου ΠΣΕΣ.



Σχήμα 2.13: Ο ελκυστής ενός πολύπλοκου ΠΣΕΣ. Το χρώμα προστέθηκε με τεχνικές παρόμοιες με αυτές που έχουμε περιγράψει (βλέπε [Bar93]).



Κεφάλαιο 3

Fractal Διαστάσεις

Many that live deserve death. And some die that deserve life.
Can you give it to them?
Then be not too eager to deal out death in the name of justice,
fearing for your own safety.
Even the wise cannot see all ends.

Gandalf. J. R. R. Tolkien, The Lord of The Rings.

Το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος, το εμβαδό ενός τριγώνου ή ο όγκος ενός κύβου είναι μεγέθη που μπορεί κάποιος να μετρήσει εύκολα. Τι γίνεται, όμως, στην περίπτωση που θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος του συνόλου Cantor ή το εμβαδόν του τριγώνου Sierpinski; Είναι προφανές ότι η μέτρηση δεν μπορεί να γίνει με τον απλό κλασικό τρόπο. Για να “μετρήσουμε” ένα τέτοιο σύνολο χρειαζόμαστε ένα ειδικό μέτρο, το μέτρο Hausdorff. Υπάρχουν, επίσης, διάφοροι αριθμοί, που συσχετίζονται με fractal σύνολα, οι οποίοι χρησιμοποιούνται για να τα συγκρίνουμε. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται fractal διαστάσεις και δίνουν μια ιδέα για το πόσο “πυκνά” ένα Fractal καταλαμβάνει τον χώρο στον οποίο βρίσκεται. Είναι, μάλιστα, δυνατόν κάποιος να υπολογίσει πειραματικά τη fractal διάσταση ενός συνόλου πειραματικών δεδομένων. Έχει υπολογιστεί για παράδειγμα ότι η ακτογραμμή της Μεγάλης Βρετανίας έχει διάσταση 1.2, ενώ η πόλη της Αθήνας έχει διάσταση περίπου 2.11 (βλέπε [DD96]).

3.1 Μέτρο του Lebesgue, Μέτρο του Hausdorff

Το μέτρο είναι ένας τρόπος να αποδίδουμε ένα αριθμητικό μέγεθος σε ένα σύνολο, με τέτοιο τρόπο ώστε αν το σύνολο διασπαστεί σε πεπερασμένο (ή αριθμήσιμο) πλήθος μικρότερων συνόλων, τότε το μέγεθος του όλου να ισούται με το άθροισμα των μεγεθών των μερών του.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 Έστω X ένα τυχαίο σύνολο και $P(X)$, το δυναμοσύνολο του X . **Εξωτερικό μέτρο** είναι μια συνάρτηση $\mu : P(X) \rightarrow [0, +\infty]$ που πληροί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$, αν $A \subseteq B \subseteq X$.
3. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, αν $A_i \subset X$, $i = 1, 2, \dots, N$.



ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2 Μια οικογένεια $\mathcal{A}$, υποσυνόλων του X , καλείται **σ -άλγεβρα**, εφόσον ισχύουν τα εξής:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E^c \in \mathcal{A}$.
3. Αν $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$,

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3 Αν $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα, τότε μια απεικόνιση $\mu^* : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$, αν $E_i \in \mathcal{A}$ και $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$.

καλείται **μέτρο**.

Έστω μ ένα εξωτερικό μέτρο. Λέμε ότι το $E \subseteq X$ είναι **μ -μετρήσιμο**, αν

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C), \quad \text{για κάθε } A \subseteq X.$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathcal{M} = \{E \subseteq X : E \text{ είναι } \mu\text{-μετρήσιμο}\}$ είναι σ -άλγεβρα και ότι ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου μ στο $\mathcal{M}$ $\mu|_{\mathcal{M}} = \mu^*$ είναι ένα μέτρο στο $\mathcal{M}$.

Παρακάτω θα ορίσουμε το μέτρο του Lebesgue και το μέτρο του Hausdorff. Στο μέτρο του Lebesgue η μονάδα μέτρησης του όγκου ορίζεται να είναι ο όγκος κύβου στον $\mathbb{R}^K$, $K \in \mathbb{N}$. Ο όγκος του παραλληλεπίπεδου ορίζεται με το συνήθη τρόπο. Για να μετρήσουμε τον όγκο ενός συνόλου στον $\mathbb{R}^K$ το καλύπτουμε με τον “οικονομικότερο” τρόπο με παραλληλεπίπεδα. Επομένως για να χρησιμοποιήσουμε το μέτρο του Lebesgue χρειαζόμαστε σύστημα συντεταγμένων σε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης. Το μέτρο αυτό είναι αρκετό για τα σύνολα της κλασσικής γεωμετρίας, τα οποία είναι συνήθως κυρτά και δίνει συγχρόνως πληροφορία για την διάστασή τους. Όμως, στην περίπτωση που έχουμε “ανώμαλα” σύνολα, όπως το σύνολο Cantor, το τρίγωνο Sierpinski κ.λ.π, η μέτρησή τους με το μέτρο του Lebesgue δίνει “χονδροειδή” πληροφορία¹. Είναι κάτι ανάλογο με το ζύγισμα ενός αντικειμένου. Αν διαθέτουμε σταθμά μόνο του ενός κιλού, μια μπάλα πινγκ-πονγκ και μια μπάλα ποδοσφαίρου δεν μπορούν να διαφοροποιηθούν στην ζυγαριά.

Γι αυτό το λόγο η εισαγωγή ενός πιο ειδικού μέτρου (του μέτρου Hausdorff) είναι αναγκαία για τη μέτρηση αντικειμένων όπως τα fractals, καθώς και συνόλων που βρίσκονται σε χώρους με γενικότερη δομή και χωρίς περιορισμό στη διάστασή τους. Η μονάδα μέτρησης στο νέο μέτρο είναι ο “όγκος” της s -σφαίρας (για $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$). Ο όγκος μιας σφαίρας στον $\mathbb{R}^K$ είναι συνάρτηση μόνον μιας μεταβλητής, της διαμέτρου, οπότε η μέτρηση του όγκου της δεν απαιτεί διανυσματική δομή του χώρου, αλλά μόνο ύπαρξη μιας μετρικής - απόστασης. Εξ’ άλλου, η σφαίρα είναι το μόνο από τα γεωμετρικά αντικείμενα που “επιβιώνει” σε τυχαίο μετρικό χώρο πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης. Ορίζεται, λοιπόν, ο όγκος σφαίρας διαμέτρου δ να είναι δ^s . Για να μετρήσουμε τον s -όγκο ενός συνόλου, τον καλύπτουμε με τον “οικονομικότερο” τρόπο με σύνολα οσοδήποτε μικρής διαμέτρου. Επειδή το $s \geq 0$ είναι τυχαίος πραγματικός αριθμός και όχι ακέραιος, όπως στο μέτρο Lebesgue, εξασφαλίζουμε ακριβή μέτρηση του “όγκου” ενός αντικειμένου και υπολογισμό της διάστασής του (βλέπε παράγραφο 3.2). Εξ’ άλλου, αν το προς μέτρηση αντικείμενο βρίσκεται στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^K$ τότε το μέτρο του Lebesgue και το μέτρο του Hausdorff έχουν σχέση αναλογίας (βλέπε θεώρημα 3.1), λόγω της εκλογής διαφορετικής μονάδας μέτρησης για το καθένα. Οπότε, τα σύνολα μηδενικού ή άπειρου K -όγκου είναι ίδια και για τα δύο μέτρα.

¹το σύνολο Cantor έχει 1-μέτρο Lebesgue 0 (μηδέν) όσο και το μέτρο ενός σημείου.



ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4 Στον χώρο $\mathbb{R}^K$ ορίζουμε το **εξωτερικό μέτρο του Lebesque**, λ_K ως εξής: Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_K, b_K] \subseteq \mathbb{R}^K,$$

όπου $[a_i, b_i] \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, K$, και ορίζουμε

$$V_K(B) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_K - a_K)$$

τον K -όγκο του B .

Για τυχαίο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^K$ ορίζουμε

$$\lambda_K(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V_K(B_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad B_i \text{ ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το λ_K είναι εξωτερικό μέτρο και ότι $\lambda_K(B) = V_K(B)$, αν το B είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Επίσης ισχύουν:

$$\begin{aligned} \lambda_K(E + x) &= \lambda_K(E), \quad x \in \mathbb{R}^K \\ \lambda_K(\alpha E) &= \alpha^K \lambda_K(E), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Αν περιορίσουμε το λ_K στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των λ_K -μετρήσιμων συνόλων, τότε ο περιορισμός αυτός είναι **μέτρο Lebesque K -διάστασης**. Το μέτρο λ_K καλείται και K -όγκος. Στην άλγεβρα $\mathcal{M}$ περιέχονται τα ανοικτά και τα κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}^K$. Ακολουθεί ο ορισμός του μέτρου Hausdorff στον $\mathbb{R}^{K^2}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.5 Στον Ευκλείδειο χώρο $\langle \mathbb{R}^K, d \rangle$, ορίζουμε το **εξωτερικό μέτρο του Hausdorff** H^s για $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ ως εξής:

Θεωρούμε $\delta(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$ την διάμετρο του $A \subseteq \mathbb{R}^K$ και για $\epsilon > 0$ θέτουμε

$$H_\epsilon^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad 0 < \delta(U_i) \leq \epsilon, \quad i \in \mathbb{N} \right\},$$

όπου $E \subset \mathbb{R}^K$. Για $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ έχουμε $H_{\epsilon_2}^s(E) \leq H_{\epsilon_1}^s(E)$. Το **εξωτερικό μέτρο του Hausdorff** είναι

$$H^s(E) = \sup\{H_\epsilon^s(E), \epsilon > 0\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} H_\epsilon^s(E).$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το H^s είναι εξωτερικό μέτρο και ότι αν περιορίσουμε το H^s στην σ-άλγεβρα των H^s μετρήσιμων συνόλων, τότε ο περιορισμός αυτός είναι το **μέτρο του Hausdorff s -διάστασης** ($s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$). Στην άλγεβρα αυτή περιέχονται τα ανοικτά και τα κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}^K$. Επίσης ισχύει:

$$\begin{aligned} H^s(E + x) &= H^s(E), \quad x \in \mathbb{R}^K, \\ H^s(\alpha E) &= \alpha^s H^s(E), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Θεωρώντας ως

$$c_K = \frac{\pi^{\frac{K}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^K}{\left(\frac{K}{2}\right)!}$$

τον όγκο της σφαίρας $S_K = \hat{S}_K(0, \frac{1}{2})$ του $\mathbb{R}^K$ με ακτίνα $\frac{1}{2}$ παίρνουμε την παρακάτω σημαντική σχέση, που συνδέει τα μέτρα του Lebesque και του Hausdorff.

²Το μέτρο Hausdorff ορίζεται γενικά (με ανάλογο τρόπο) σε τυχαίο μετρικό χώρο.



ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 Έστω $E \subset \mathbb{R}^K$. Τότε για τα εξωτερικά μέτρα λ_K, H^K ισχύει:

$$\lambda_K(E) = c_K \cdot H^K(E).$$

Βάσει του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε:

- $\lambda_1(S_1) = H^1(S_1) = 1$
- $\lambda_2(S_2) = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2, H^2(S_2) = 1$
- $\lambda_3(S_3) = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3, H^3(S_3) = 1$
- $\lambda_K([0, 1]^K) = 1, H^K([0, 1]^K) = \frac{1}{c_K}$, όπου c_K ο όγκος της σφαίρας S_K .
- Αν C μια τυχαία συνεχής καμπύλη του $\mathbb{R}^K$ με μήκος $\ell(C)$, τότε

$$\ell(C) = H^1(C).$$

3.2 Fractal Διαστάσεις

Σύμφωνα με όσα ξέρουμε από την κλασσική Γεωμετρία, τα ευθύγραμμα τμήματα και οι ευθείες έχουν διάσταση 1, τα πολύγωνα και οι κύκλοι έχουν διάσταση 2, ενώ οι πυραμίδες, οι σφαίρες και τα πολύεδρα έχουν διάσταση 3. Εδώ θα προσπαθήσουμε να “γενικεύσουμε” την έννοια της διάστασης και θα αντιστοιχίσουμε κάθε Fractal σύνολο με μια κλασματική διάσταση. Παρ’ ότι υπάρχουν πολλές Fractal διαστάσεις, εδώ θα περιοριστούμε σε δύο μόνο από αυτές. Την διάσταση των Hausdorff-Besicovitch και την Box-διάσταση³.

Ο ορισμός της διάστασης είναι απόρροια ανάλογων συλλογισμών με αυτούς που έγιναν για τη γενίκευση του μέτρου. Ειδικότερα: αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα, τότε το μήκος του (δηλαδή ο 1-όγκος του) είναι πεπερασμένος αριθμός και ο k -όγκος του είναι μηδέν για $k \geq 2$. Για ένα τετράγωνο θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο 1-όγκος του είναι ∞ , ο 2-όγκος του είναι ένας πεπερασμένος αριθμός, ενώ ο k -όγκος του είναι 0 για $k \geq 3$. Όμοια, για ένα 3-διάστατο κύβο θα έχουμε ότι για $k = 1, 2$ ο όγκος είναι άπειρος ενώ για $k \geq 4$ είναι μηδέν κ.ο.κ. Παρατηρούμε ότι για τα γεωμετρικά αυτά αντικείμενα υπάρχει ένας φυσικός αριθμός k_0 , ώστε για $k = 1, 2, \dots, k_0 - 1$ ο όγκος του αντικειμένου είναι άπειρος ενώ για $k \geq k_0 + 1$ ο όγκος είναι μηδέν. Ο αριθμός αυτός δηλώνει ότι η διάσταση του αντικειμένου είναι k_0 , δηλαδή ότι σε χώρους μικρότερης διάστασης ($k = 1, 2, \dots, k_0 - 1$). δε “χωράει” ενώ σε χώρο μεγαλύτερης διάστασης ($k \geq k_0 + 1$) ο “χώρος” που καταλαμβάνει είναι μηδέν. Με την βοήθεια του μέτρου του Hausdorff, η έννοια της διάστασης γενικεύεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.6 Για κάθε $E \subset \mathbb{R}^K$ υπάρχει ακριβώς ένας⁴ πραγματικός αριθμός s_0 , $0 \leq s_0 \leq K$, ώστε

$$H^t(E) = \begin{cases} 0, & \text{για } t > s_0 \\ +\infty, & \text{για } t < s_0 \end{cases}.$$

Τον αριθμό

$$s_0 = \sup\{t \geq 0 : H^t(E) = +\infty\} = \inf\{t \geq 0 : H^t(E) = 0\}$$

τον ονομάζουμε **διάσταση των Hausdorff-Besicovitch** του E και τον συμβολίζουμε ως $\dim_H E$.

³Η διάσταση αυτή λέγεται και διάσταση Minkowski. Φέρει, επίσης, και άλλα ονόματα λιγότερο γνωστά όπως: εντροπία Kolmogorov, διάσταση εντροπίας, διάσταση πληροφορίας, λογαριθμική πυκνότητα.

⁴Για απόδειξη βλέπε [Fal97].



Λόγω της “ταύτισης” των μέτρων του Lebesgue του Hausdorff, για $k \in \mathbb{N}$, η διάσταση που δίνεται από τον ανωτέρω ορισμό είναι η ίδια με αυτή που χρησιμοποιούμε για τα συνήθη γεωμετρικά σχήματα.

Η εύρεση της διάστασης Hausdorff-Besicovitch είναι ιδιαίτερα επίπονη και πολλές φορές μη εφικτή με τα ήδη υπάρχοντα μαθηματικά εργαλεία. Για παράδειγμα, για τις συναρτήσεις τύπου Weierstrass (συνεχείς, πουθενά διαφορίσιμες) δεν έχει βρεθεί η διάσταση των Hausdorff-Besicovitch. Η χρήση των H/Y έκανε πιο επιτακτική την ανάγκη να ανατρέξουμε σε άλλες διαστάσεις, πιο εύχρηστες που, επιπλέον, θα μπορούσαν να υπολογιστούν και προσεγγιστικά. Μια τέτοια διάσταση, είναι η Box. Έχει το πλεονέκτημα ότι στα γεωμετρικά αντικείμενα και στα κλασσικά fractal σύνολα (τρίγωνο Sierpinski, σύνολο Cantor κ.λ.π.) συμπίπτει με αυτή του Hausdorff. Επιπλέον, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την τιμή της με χρήση H/Y . Ο ορισμός προκύπτει από την εξής παρατήρηση: Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, ο ελάχιστος αριθμός τμημάτων μήκους $\epsilon = \frac{1}{n}$ που χρειάζεται για να το καλύψουμε είναι $N(\epsilon) = n$, δηλαδή $1 = \epsilon \cdot N(\epsilon)$. Εάν κάνουμε το ίδιο για τετράγωνο εμβαδού 1 με κάλυψη τετραγώνων πλευράς $\epsilon = \frac{1}{n}$, τότε θα έχουμε $1 = \epsilon^2 \cdot N(\epsilon)$ και $1 = \epsilon^3 \cdot N(\epsilon)$ για την περίπτωση κύβου. Παρατηρούμε ότι η διάσταση των γεωμετρικών συνόλων A παρουσιάζεται ως εκθέτης του ϵ . Οπότε, η διάσταση $\dim A$ θα ικανοποιεί τη σχέση

$$\dim A = \frac{\ln N(\epsilon)}{-\ln \epsilon}.$$

Ο ορισμός της νέας διάστασης δίνεται παρακάτω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.7 Έστω A ένα φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^K$. Ο αριθμός $N(A, \epsilon)$ εκφράζει τον ελάχιστο αριθμό σφαιρών ακτίνας ϵ που χρειάζονται για να καλύψουμε το A . Αν το όριο

$$D(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(A, \epsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \right\}$$

υπάρχει, τότε ο αριθμός $D(A) = \dim_B A$ καλείται η **Box διάσταση** του A .

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για τον υπολογισμό της Box διάστασης μπορούν να χρησιμοποιηθούν, εκτός από σφαίρες ακτίνας ϵ , και σύνολα άλλων μορφών. Έτσι το $N(A, \epsilon)$ μπορεί να εκφράζει ένα από τα ακόλουθα:

- Το ελάχιστο πλήθος σφαιρών ακτίνας ϵ που χρειάζονται για να καλυφθεί το A .
- Το ελάχιστο πλήθος συνόλων διαμέτρου το πολύ ϵ που χρειάζονται για να καλυφθεί το A .
- Τον ελάχιστο πλήθος κύβων πλευράς ϵ που χρειάζονται για να καλυφθεί το A .

Η Box-διάσταση οφείλει το όνομά της στην τελευταία περίπτωση.

3.3 Ιδιότητες και σχέσεις Διαστάσεων

Στη συνήθη περίπτωση όπου $X = \mathbb{R}^K$, υπάρχουν μερικές ιδιότητες των Hausdorff και Box διαστάσεων που δίνονται στο παρακάτω θεώρημα. Το σύμβολο $\dim$ εκφράζει ή την Box ή την διάσταση του Hausdorff. Στην περίπτωση της Box διάστασης τα σύνολα που αναφέρονται είναι φραγμένα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 Έστω ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^K, d)$, $K \in \mathbb{N}$, εφοδιασμένος με μία από τις ισοδύναμες μετρικές d_p , $1 \leq p \leq \infty$.

1. Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^K$ με $A \subset B$, τότε $\dim A \leq \dim B$.
2. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^K$, τότε $0 \leq \dim A \leq K$.



3. Αν $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^K$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τότε $\dim A = 0$.
4. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^K$ και η $f : A \rightarrow \mathbb{R}^K$ είναι συνεχής συνάρτηση Lipschitz, τότε $\dim f(A) \leq \dim A$.
5. Αν $A_n \subset \mathbb{R}^K$, $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$\dim_H \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sup \{ \dim_H A_n : n \in \mathbb{N} \}.$$

Ιδιαιτέρως, $\dim_H A = 0$, για κάθε αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^K$.

6. Αν $A_n \subset \mathbb{R}^K$, $n = 1, 2, \dots, N$ τότε

$$\dim_B \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right) = \max \{ \dim_B A_n : n = 1, 2, \dots, N \}.$$

7. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^K$, τότε $\dim_B A = \dim_B \bar{A}$. Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει για την Hausdorff διάσταση⁵.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, λόγω της 5, κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^K$ έχει Hausdorff διάσταση 0, ενώ η Box διάσταση μπορεί να είναι μεγαλύτερη. Για παράδειγμα $\dim_B(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) = \frac{1}{2}$. Γενικά ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3 Αν $\dim_H A$, $\dim_B A$ είναι οι διαστάσεις Hausdorff και Box του $A \subset \mathbb{R}^K$, τότε ισχύει

$$\dim_H A \leq \dim_B A.$$

Το παρακάτω θεώρημα αποδείχθηκε από τον Hutchinson το 1981 (βλέπε [Hat81]) και μας βοηθάει να υπολογίσουμε την Box ή την Hausdorff διάσταση του ελκυστή ενός ΣΕΣ.

⁵Π.χ. αν A είναι το σύνολο των ρητών στο $[0, 1]$, τότε $\dim_H A = 0$ (αφού το A είναι αριθμήσιμο), ενώ $\dim_H \bar{A} = \dim_H([0, 1]) = 1$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4**

Έστω ένα ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^K, w_{1-N}\}$ αποτελούμενο από ομοιότητες με συντελεστές συστολής⁶ $s_1, s_2, \dots, s_N$ που ικανοποιούν τη συνθήκη ανοικτού συνόλου:

Υπάρχει $V \subseteq \mathbb{R}^K$, $V \neq \emptyset$, V ανοικτό, ώστε:

1. $\bigcup_{n=1}^N w_n(V) \subseteq V$,
2. $w_n(V) \cap w_m(V) = \emptyset$, $n \neq m$.

Αν E είναι ο ελκυστής του ΣΕΣ, τότε:

1. $\dim_H E = \dim_B E = D$, όπου το D δίνεται από τη σχέση:

$$\sum_{i=1}^N s_i^D = 1.$$

2. $0 < H^D(E) < +\infty$.

Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια “ένδειξη” απόδειξης για το παραπάνω θεώρημα. Για τον ελκυστή E του παραπάνω ΣΕΣ θα ισχύει

$$\begin{aligned} H^D(E) &= H^D(w_1(E) \cup w_2(E) \cup \dots \cup w_N(E)) \\ &= H^D(w_1(E)) + H^D(w_2(E)) + \dots + H^D(w_N(E)) \\ &= \sum_{i=1}^N s_i^D H^D(E). \end{aligned}$$

Οπότε αν $0 < H^D(E) < +\infty$ θα έχουμε

$$\sum_{i=1}^N s_i^D = 1.$$

Παραδείγματα

- Τα ευθύγραμμα τμήματα και οι ευθείες έχουν διάσταση 1.
- Τα πολύγωνα και οι κύκλοι έχουν διάσταση 2.
- Τα πολύεδρα, οι σφαίρες και οι πυραμίδες έχουν διάσταση 3.
- Όλα τα ανοικτά σύνολα στον $\mathbb{R}^K$ έχουν διάσταση K .
- Το σύνολο Cantor έχει διάσταση $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.
- Το τρίγωνο Sierpinski έχει διάσταση $\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

⁶Μια ομοιότητα είναι συστολή αν $r < 1$.



3.4 Πειραματικός υπολογισμός της Box διάστασης

Όπως ήδη αναφέρθηκε, μπορούμε να μετρήσουμε την Box διάσταση ενός συνόλου πειραματικών δεδομένων ή ενός διακριτού σήματος. Υπάρχουν, μάλιστα, διάφοροι μέθοδοι υπολογισμού αυτής της διάστασης. Εδώ θα περιοριστούμε σε μια απλή μέθοδο που βασίζεται στον ορισμό της Box διάστασης.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την Box διάσταση της καμπύλης που φαίνεται στο σχήμα 3.1(α). Χωρίζουμε το επίπεδο σε τετράγωνα πλευράς $\epsilon_1 = 1$ και μετράμε πόσα τέτοια τετράγωνα χρειάζονται για να καλύψουν όλο το γράφημα. Ονομάζουμε $\mathcal{N}_1$ τον αριθμό των τετραγώνων. Στη συνέχεια χωρίζουμε το επίπεδο σε τετράγωνα πλευράς $\epsilon_2 = 1/2$ και υπολογίζουμε τον αριθμό $\mathcal{N}_2$, ακολούθως σε τετράγωνα πλευράς $\epsilon_3 = 1/2^2$ κ.ο.κ. Τελειώνοντας κατασκευάζουμε έναν πίνακα (βλέπε 3.1) με τις τιμές των $\ln(1/\epsilon_n)$, $\ln(\mathcal{N}_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$ και βρίσκουμε την κλίση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων που προσεγγίζει τις τιμές αυτές, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$D = \frac{N \sum_{n=1}^N \ln(1/\epsilon_n) \ln(\mathcal{N}_n) - \sum_{n=1}^N \ln(1/\epsilon_n) \cdot \sum_{n=1}^N \ln(\mathcal{N}_n)}{N \sum_{n=1}^N \ln(1/\epsilon_n)^2 - \left(\sum_{n=1}^N \ln(1/\epsilon_n) \right)^2}$$

και θα είναι η **πειραματικώς υπολογισμένη** τιμή της Box διάστασης. Στο σχήμα 3.1 έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο 3 βήματα. Η διάσταση που υπολογίστηκε με αυτή τη μέθοδο είναι $D = 1.29$, αντί για 1 που είναι η πραγματική τιμή της διάστασης της καμπύλης. Η μεγάλη απόκλιση από την πραγματική τιμή οφείλεται στο γεγονός ότι έχουν χρησιμοποιηθεί πολύ λίγα βήματα. Χρησιμοποιώντας 5 ή 6 βήματα, η τιμή της διάστασης, που θα προκύψει ακολουθώντας την παραπάνω μεθοδολογία, θα είναι $D \approx 1$.

ϵ_n	$\mathcal{N}_n$	$\ln(1/\epsilon_n)$	$\ln(\mathcal{N}_n)$
1	16	0	2.773
1/2	43	0.693	3.761
1/4	96	1.386	4.564

Πίνακας 3.1: Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα υπολογίζουμε ότι η διάσταση είναι $D = 1.29$.

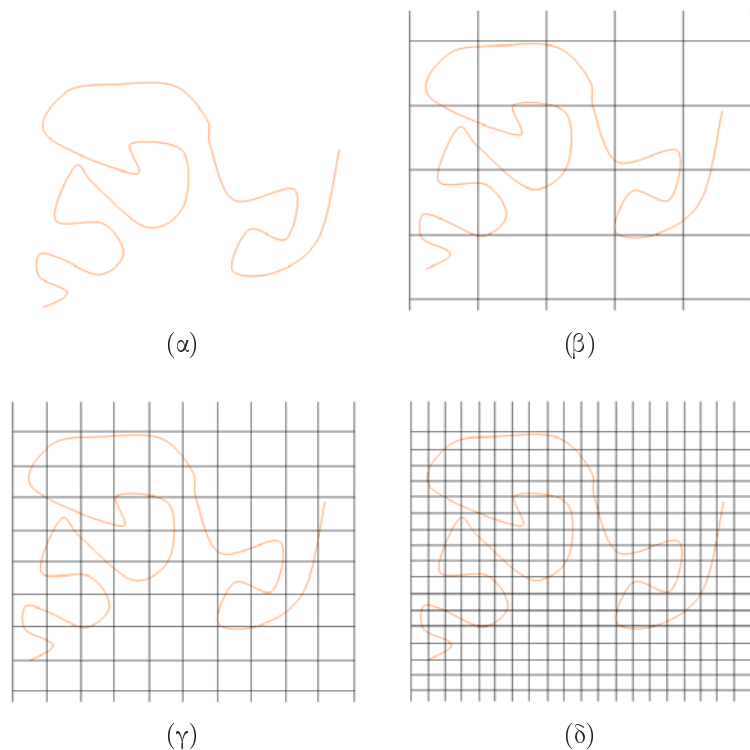
Για να υπολογίσουμε με σχετικά μεγάλη ακρίβεια την διάσταση ενός διακριτού σήματος, ο αριθμός των βημάτων πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος. Δεν πρέπει να ξεχνάμε, όμως, ότι στην πράξη θα έχουμε διακριτά δεδομένα και όχι μια συνεχή καμπύλη όπως στο παράδειγμα που δώσαμε. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι δύο συνεχόμενα σημεία ενώνονται με ευθείες γραμμές μεταξύ τους, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο μια συνεχή καμπύλη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια ελάχιστη τιμή ϵ_0 (η οποία εξαρτάται από την συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος) στην οποία πρέπει να σταματήσουμε τη διαδικασία υπολογισμού της διάστασης. Έτσι όσο πιο μεγάλη είναι η συχνότητα δειγματοληψίας τόσο πιο ακριβής θα είναι και η μέτρηση της διάστασης του διακριτού σήματος. Σημειώνουμε ότι αν συνεχίσουμε τη διαδικασία με ακόμη μικρότερα τετράγωνα (από το ϵ_0) τότε η τιμή της διάστασης που θα υπολογίσουμε θα προσεγγίζει τη μονάδα. Όσο περισσότερα βήματα κάνουμε (με $\epsilon < \epsilon_0$) τόσο κοντύτερα στη μονάδα θα είναι η διάσταση που θα προκύψει.

Στο παράρτημα Α δίνεται ο κώδικας σε Matlab που υλοποιεί τον παραπάνω αλγόριθμο (πρόγραμμα Α'4).

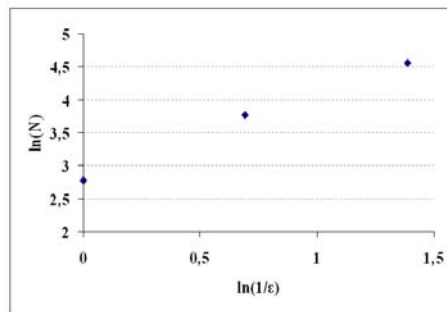


3.4. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ BOX ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

Αν θέλουμε να βρούμε την Box διάσταση μιας εικόνας αποχρώσεων του γκριζου ή γενικά ενός διακριτού δισδιάστατου σήματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα Α'.5 του παραρτήματος Α. Η μεθοδολογία είναι παρόμοια.



Σχήμα 3.1: Πειραματικός υπολογισμός της Box διάστασης.



Σχήμα 3.2: Ο συντελεστής κλίσης της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων, που προσεγγίζει τα σημεία, είναι η πειραματική τιμή της Box διάστασης.

Κεφάλαιο 4

Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής

But I don't want comfort.
I want God, I want poetry,
I want real danger, I want freedom,
I want goodness. I want sin.

Aldus Huxley, *The brave new world*.

Έστω $\{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2$, $N \geq 2$ ένα σύνολο αριθμητικών δεδομένων ώστε

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N.$$

Το πρόβλημα της μονοδιάστατης παρεμβολής συνίσταται στην κατασκευή μια συνεχούς συνάρτησης f τέτοιας ώστε $f(x_i) = y_i$, $\forall i = 0, 1, \dots, N$. Η συνάρτηση αυτή καλείται συνάρτηση παρεμβολής. Η παρεμβολή εξυπηρετεί πολλούς σκοπούς. Αν οι τιμές των δεδομένων προέρχονται από μετρήσεις ενός φαινομένου, η συνάρτηση παρεμβολής f , μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για τιμές της μεταβλητής x μεταξύ των x_i χωρίς να έχουμε συγκεκριμένη μέτρηση για τις τιμές αυτές. Μερικές φορές μπορεί να θέλουμε να υπολογίσουμε τις f' , f'' σε ενδιαμέσες σημεία ή το ολοκλήρωμα της f σε ένα υποδιάστημα του $[x_0, x_N]$. Τα δεδομένα σημεία μπορούν να παρεμβληθούν κατά άπειρους τρόπους, οπότε πρέπει να έχουμε κάποια κριτήρια επιλογής ώστε να επιλέξουμε την μέθοδο παρεμβολής που προσεγγίζει με επιτυχία το μοντέλο που μελετάμε. Τα συνήθη κριτήρια βασίζονται στην ομαλότητα και την απλότητα. Για παράδειγμα, η f πρέπει να έχει παράγωγο κάθε τάξης και το μέγιστο της $|f'(x)|$ στο διάστημα παρεμβολής να είναι όσο γίνεται μικρότερο, ή η f να είναι πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού κλπ. Οι περισσότερες συναρτήσεις παρεμβολής κατασκευάζονται από γραμμικούς συνδυασμούς στοιχειωδών συναρτήσεων, π.χ. οι γραμμικοί συνδυασμοί μονωνύμων x^k οδηγούν σε πολυωνυμικές συναρτήσεις παρεμβολής. Επίσης, χρησιμοποιούνται γραμμικοί συνδυασμοί τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos(kx)$, $\sin(kx)$, εκθετικών συναρτήσεων $e^{b_k x}$, ή ρητών συναρτήσεων της μορφής

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n}.$$

Αν, όμως, τα δεδομένα είναι αρκετά περίπλοκα (όπως δεδομένα που προκύπτουν από εγκεφαλογραφήματα, καρδιογραφήματα, σειсмоγραφήματα κ.λ.π.), η χρήση των προηγούμενων μεθόδων παρεμβολής δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις,



το γράφημα των οποίων θα έχει fractal χαρακτηριστικά. Τέτοιες συναρτήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρεμβολή οποιασδήποτε μορφής πειραματικών δεδομένων, δίνοντας συναρτήσεις παρεμβολής με γραφήματα που συνήθως έχουν μη ακέραια διάσταση. Η κατασκευή των συναρτήσεων αυτών γίνεται ορίζοντας κατάλληλα ΣΕΣ, οι ελκυστές των οποίων θα είναι γραφήματα συναρτήσεων που θα παρεμβάλλονται στα δεδομένα.

4.1 Αυτοσυσχετισμένες Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής¹

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δοσμένο σύνολο σημείων παρεμβολής

$$\Delta = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Θα εξηγήσουμε τον τρόπο κατασκευής ενός ΣΕΣ τέτοιο ώστε ο ελκυστής του, G , να είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}$ που παρεμβάλλεται στα δεδομένα. Σε όλη την παράγραφο, θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας σε affine απεικονίσεις. Χρήση μη affine απεικονίσεων έχει γίνει στα [BEHM89], [DDP03]. Ορίζουμε ένα ΣΕΣ $\{[x_0, x_N] \times \mathbb{R}, w_{1-N}\}$, όπου οι απεικονίσεις έχουν την μορφή

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

για $i = 1, 2, \dots, N$. Απεικονίσεις αυτής της μορφής απεικονίζουν ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα στον άξονα των y , σε ευθύγραμμα τμήματα, επίσης, παράλληλα στον άξονα y . Επιπλέον αν το μήκος του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος AB είναι ℓ το μήκος του νέου ευθυγράμμου τμήματος $w(AB)$ θα είναι $s_i \ell$. Ο συντελεστής s_i ονομάζεται **συντελεστής κατακόρυφης αναλογίας**. Οι παράμετροι a_i, b_i, c_i, d_i των απεικονίσεων w_i υπολογίζονται με βάση τα δεδομένα του Δ , χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εξισώσεις

$$w_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$w_i \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

για $i = 1, 2, \dots, N$. Δηλαδή η απεικόνιση w_i απεικονίζει τα ακραία σημεία του Δ , (x_0, y_0) και (x_N, y_N) , στα σημεία (x_{i-1}, y_{i-1}) και (x_i, y_i) αντίστοιχα (βλέπε σχήμα 4.1). Έτσι για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$, προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων

$$a_i x_0 + b_i = x_{i-1}, \quad (4.4)$$

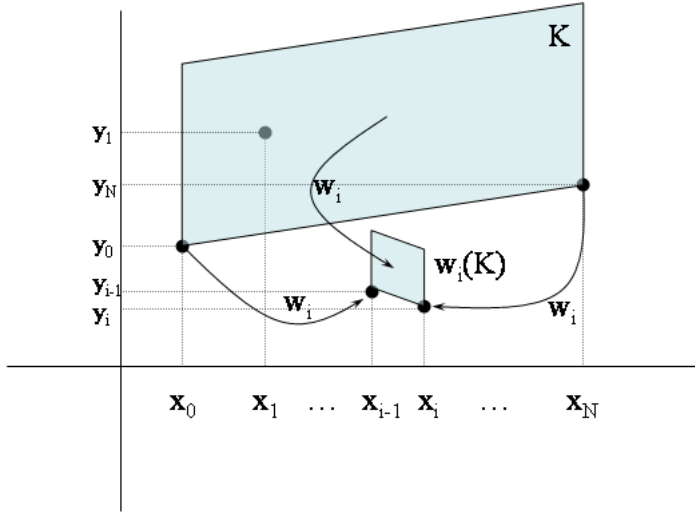
$$a_i x_N + b_i = x_i, \quad (4.5)$$

$$c_i x_0 + s_i y_0 + d_i = y_{i-1}, \quad (4.6)$$

$$c_i x_N + s_i y_N + d_i = y_i. \quad (4.7)$$

Αν θεωρήσουμε τον συντελεστή s_i ως ελεύθερη παράμετρο, τότε το σύστημα αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα με 4 εξισώσεις και 4 αγνώστους (a_i, b_i, c_i, d_i) και έχει μοναδική λύση για κάθε

¹Διεθνώς χρησιμοποιείται ο όρος Self Affine Fractal Interpolation Functions.



Σχήμα 4.1: Η απεικόνιση w_i .

επιλογή των σημείων παρεμβολής. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0}, \quad (4.8)$$

$$b_i = \frac{x_N x_{i-1} - x_0 x_i}{x_N - x_0}, \quad (4.9)$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_N - x_0} - s_i \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0}, \quad (4.10)$$

$$d_i = \frac{x_N y_{i-1} - x_0 y_i}{x_N - x_0} - s_i \frac{x_N y_0 - x_0 y_N}{x_N - x_0}. \quad (4.11)$$

Το ΣΕΣ που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο συνήθως αναφέρεται ως το **ΣΕΣ που συνδέεται με τα σημεία του Δ** . Επίσης, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1

Έστω $\{\mathbb{R}^2, w_{1-N}\}$ ένα ΣΕΣ όπως αυτό που ορίσαμε παραπάνω. Αν ισχύει ότι $|s_i| < 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, N$, τότε υπάρχει μια μετρική d , ισοδύναμη με την Ευκλείδεια μετρική d_2 , ως προς την οποία το ΣΕΣ είναι υπερβολικό.

Σκιαγράφηση της Απόδειξης.

Ορίζουμε μια μετρική στον $\mathbb{R}^2$ ως εξής

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \theta |y_1 - y_2|,$$



$$\delta\text{που } \theta = \begin{cases} \frac{\min\{1-|a_i|, i=1,2,\dots,N\}}{\max\{2|c_i|, i=1,2,\dots,N\}}, & \text{αν } c_i \neq 0 \text{ για κάποιο } i \\ 1, & \text{αν } c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0. \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η d είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδια μετρική. Επιπλέον, η d είναι έτσι κατασκευασμένη ώστε οι απεικονίσεις w_i να είναι συστολές (για $i = 1, 2, \dots, N$). Άρα το ΣΕΣ είναι υπερβολικό. (Η πλήρης απόδειξη βρίσκεται στα [2], [Bar93].) $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2

Έστω $\Delta = \{(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, N\}$ ένα σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^2$. Αν για το ΣΕΣ που συνδέεται με τα σημεία του Δ ισχύει $|s_i| < 1$, για $i = 1, 2, \dots, N$, τότε το ΣΕΣ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $G \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, το οποίο αποτελεί το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης f , η οποία παρεμβάλλεται στα δεδομένα του Δ και ονομάζεται **Αυτοσυσχετισμένη Fractal Συνάρτηση Παρεμβολής (AFSP)**.

Σκιαγράφηση της Απόδειξης.

Θα δώσουμε μόνο τα βασικά σημεία της απόδειξης του θεωρήματος. Η ολοκληρωμένη απόδειξη μπορεί να βρεθεί στα [2], [Bar93].

Έστω $\langle C([x_0, x_N]), \rho_\infty \rangle$ ο πλήρης μετρικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[x_0, x_N]$. Η μετρική ρ_∞ ορίζεται ως εξής:

$$\rho_\infty(g, h) = \max\{|f(x) - g(x)|, x \in [x_0, x_N]\}, \quad \text{για κάθε } g, h \in C([x_0, x_N]).$$

Θεωρούμε $\mathcal{F} = \{g \in C([x_0, x_N]) : g(x_i) = y_i, \text{ για } i = 0, \text{ και } i = N\}$. Ο $\langle \mathcal{F}, \rho_\infty \rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, αφού το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $C([x_0, x_N])$. Ορίζουμε την συνάρτηση $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ με

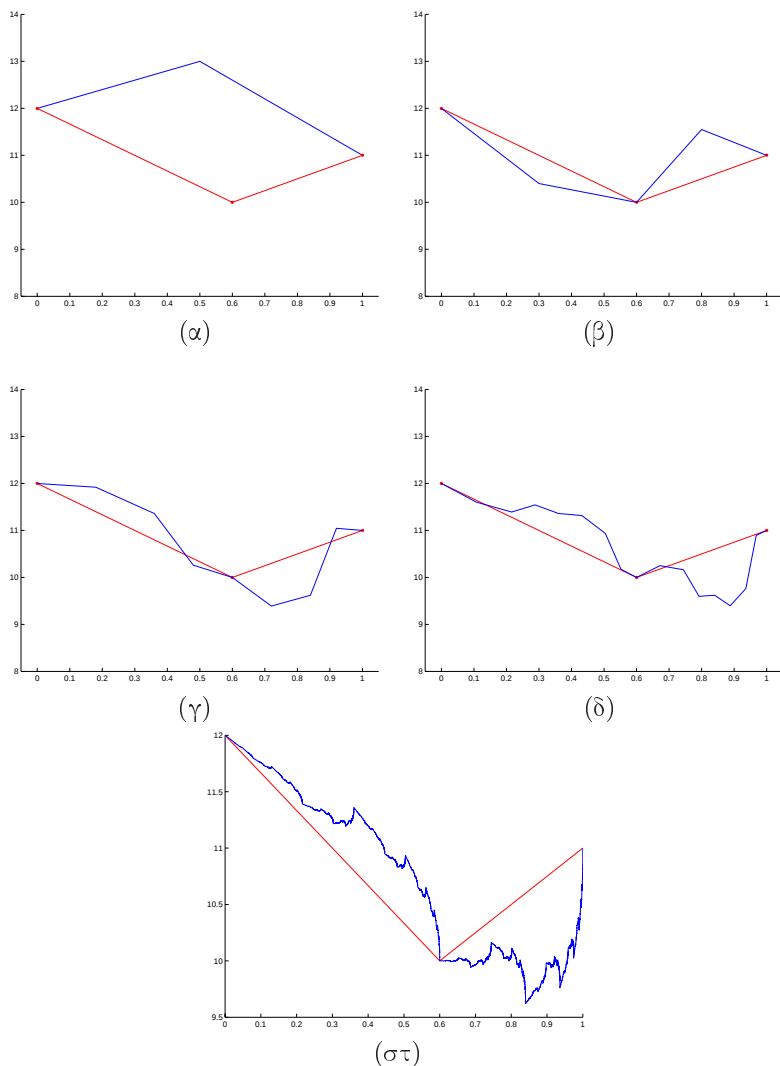
$$(Tg)(x) = c_i \ell_i^{-1}(x) + s_i g(\ell_i^{-1}(x)) + d_i, \text{ για } x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.12)$$

όπου $\ell_i(x) = a_i x + b_i$. Η συνάρτηση T ονομάζεται τελεστής Read-Bajraktarevic ([Rea52], [Baj56]). Βάσει των εξισώσεων 4.4-4.7 είναι εύκολο να δούμε ότι η Tg είναι καλά ορισμένη. Επίσης, η T είναι συνάρτηση συστολής ως προς την μετρική ρ_∞ . Έτσι από το θεώρημα σταθερού σημείου, υπάρχει μοναδική $f \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $Tf = f$ (βλέπε σχήμα 4.2). Αποδεικνύεται ότι η f είναι συνάρτηση παρεμβολής. Έστω $\tilde{G} = \{(x, f(x)) : x \in [x_0, x_N]\}$ το γράφημα της f . Αν $(x, f(x)) \in \tilde{G}$ τότε υπάρχει κάποιο i_0 τέτοιο ώστε $x \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$. Τότε αν $x' = \frac{x-b_{i_0}}{a_{i_0}}$ θα έχουμε

$$w_{i_0} \left(\begin{pmatrix} x' \\ f(x') \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a_{i_0} x' + b_{i_0} \\ Tf(a_{i_0} x' + b_{i_0}) \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a_{i_0} x' + b_{i_0} \\ f(a_{i_0} x' + b_{i_0}) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Άρα $(x, f(x)) \in w_{i_0}(\tilde{G})$, οπότε $\tilde{G} \subseteq \bigcup_{n=1}^N w_i(\tilde{G})$. Προφανώς ισχύει και $w_{i_0}(\tilde{G}) \subseteq \tilde{G}$, άρα παίρνουμε την

σχέση $\tilde{G} = \bigcup_{n=1}^N w_i(\tilde{G})$. Δηλαδή το $\tilde{G}$ είναι το σταθερό σημείο της συνάρτησης W (βλέπε παράγραφο 2.1). Επειδή η W έχει μοναδικό σταθερό σημείο συμπεραίνουμε ότι το σημείο αυτό είναι το γράφημα της f . $\square$



Σχήμα 4.2: Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η λειτουργία του τελεστή T (Read-Bajraktarevic) που ορίζεται χρησιμοποιώντας ως σημεία παρεμβολής τα $(0.00, 12)$, $(0.60, 10)$, $(1.00, 11)$ (κόκκινη γραμμή) και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας $s_1 = -0.4$ και $s_2 = 0.7$. Στο (α) η συνάρτηση g απεικονίζεται με μπλε γραμμή. Στα (β), (γ), (δ) απεικονίζονται οι συναρτήσεις Tg , T^2g , T^3g αντίστοιχα (με μπλε γραμμή), ενώ στο (στ) απεικονίζεται το σταθερό σημείο του τελεστή T (με μπλε γραμμή).

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3**

Έστω $\Delta = \{(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, N\}$ ένα σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^2$. Έστω G το γράφημα της Αυτοσυσχετισμένης Fractal Συνάρτησης Παρεμβολής που προκύπτει από ένα υπερβολικό ΣΕΣ συνδεδεμένο με τα σημεία του Δ . Αν τα σημεία παρεμβολής του Δ δεν είναι συνευθειακά και

$$\sum_{i=1}^n |s_i| > 1,$$

τότε η box διάσταση D του G είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\sum_{i=1}^N |s_i| a_i^{D-1} = 1.$$

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η box διάσταση του G είναι 1.

Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Bar93].

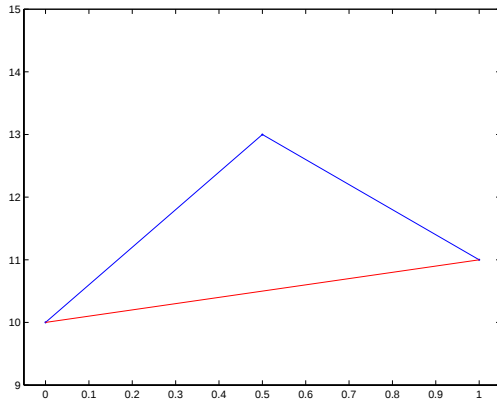
Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι

1. Στην περίπτωση που τα σημεία παρεμβολής ισαπέχουν (δηλαδή $x_i = x_0 + \frac{i}{N}(x_N - x_0)$, για $i = 1, 2, \dots, N$) προκύπτει ότι $a_i = \frac{1}{N}$, για $i = 1, 2, \dots, N$. Άρα, αν τα σημεία παρεμβολής δεν είναι συνευθειακά και $\sum_{i=1}^N |s_i| > 1$, η box διάσταση του γραφήματος της αυτοσυσχετισμένης FΣΠ θα δίνεται από τον τύπο

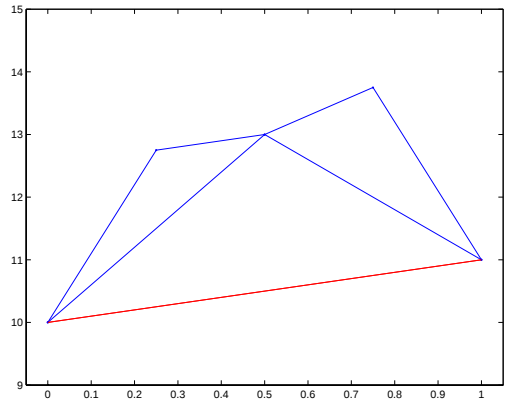
$$D = 1 + \frac{\left(\log \sum_{i=1}^N |s_i| \right)}{\log N}.$$

2. Με βάση τον παραπάνω τύπο, παρατηρώντας ότι $\sum_{i=1}^N |s_i| < N$, καταλαβαίνουμε ότι η box διάσταση κάθε αυτοσυσχετισμένης FΣΠ είναι μικρότερη από 2 και μεγαλύτερη από 1. Μπορούμε να κατασκευάσουμε AFΣΠ με διάσταση γραφήματος όσο κοντά στο 2 θέλουμε, επιλέγοντας τους συντελεστές s_i κοντά στο 1 (ή στο -1). Επίσης, επιλέγοντας συντελεστές s_i κοντά στο 0, μπορούμε να κάνουμε την AFΣΠ όσο “ομαλή” θέλουμε, με διάσταση γραφήματος κοντά στο 1. Σημειώνουμε ότι η διάσταση του γραφήματος της AFΣΠ δεν εξαρτάται από τα δεδομένα (εκτός και αν είναι συνευθειακά), αλλά από τις τιμές των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας s_i .

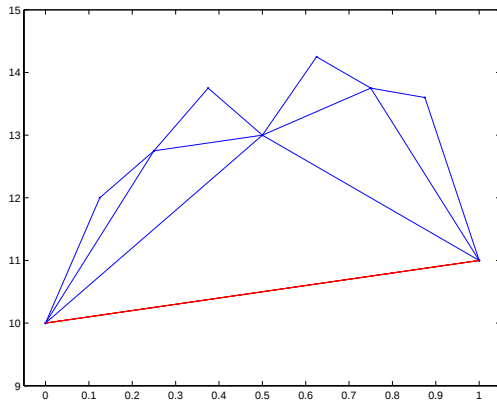
Στο παράρτημα Α (πρόγραμμα Α'.6) δίνεται ο αλγόριθμος (σε γλώσσα Matlab) κατασκευής μιας αυτοσυσχετισμένης FΣΠ. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στον αλγόριθμο αιτιοκρατικών επαναλήψεων που δώσαμε στο κεφάλαιο 2. Στα σχήματα 4.3-4.6 δίνονται διάφορα χρήσιμα παραδείγματα.



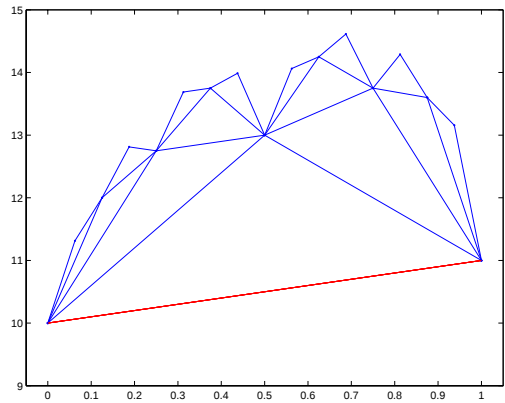
(α)



(β)

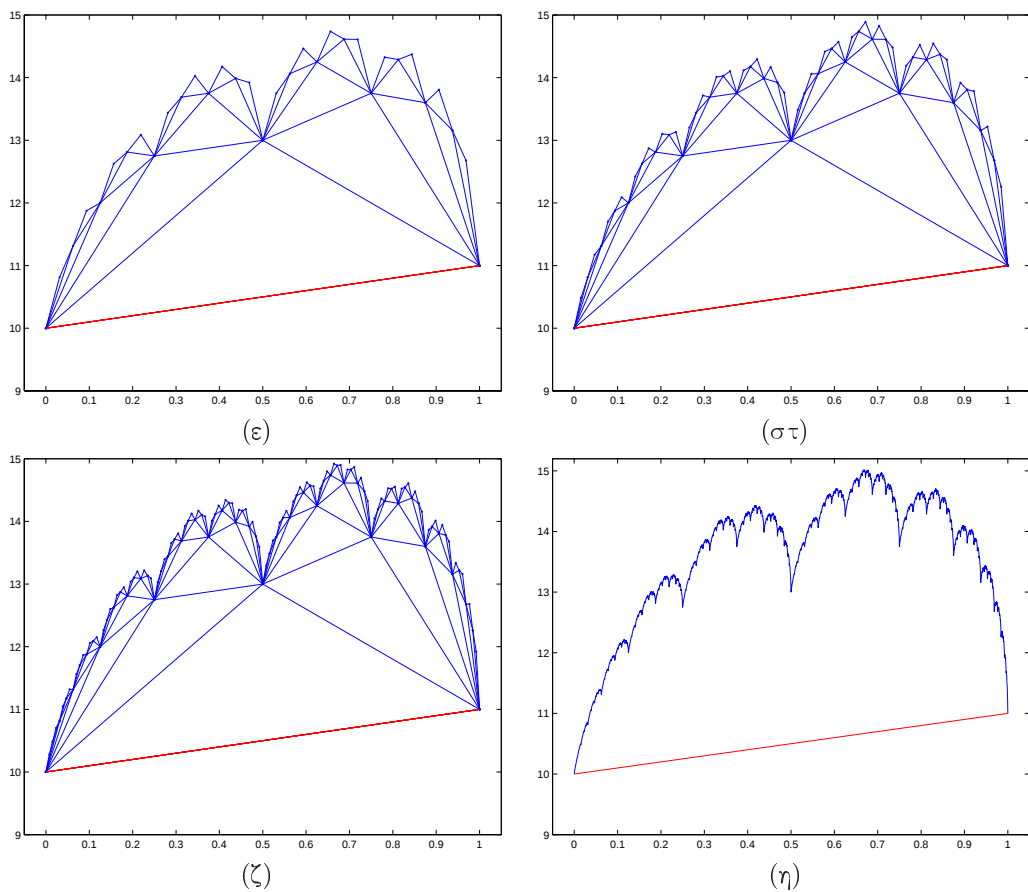


(γ)

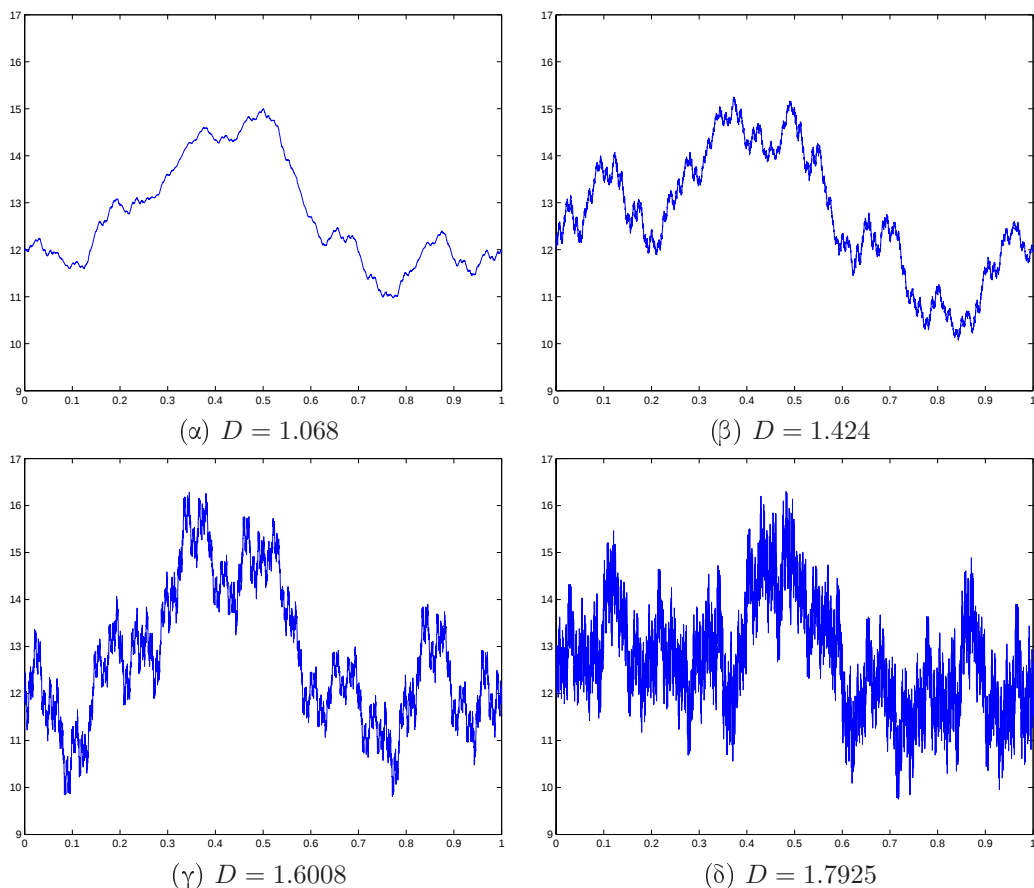


(δ)

Σχήμα 4.3: Θεωρώντας τα σημεία παρεμβολής $\Delta = \{(0, 10), (0.5, 13), (1, 11)\}$ και συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας $s_1 = 0.5$ και $s_2 = 0.7$ προκύπτει η ΦΣΠ του σχήματος 4.4(η). Στα (β), (γ), (δ), (ε), (στ), (ζ) φαίνεται το γράφημα που προκύπτει χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που δώσαμε με 1, 2, 3, 4, 5 και 6 επαναληπτικά βήματα. Το σχήμα (α) δείχνει τα τρία σημεία παρεμβολής, ενώ το (η) δείχνει το γράφημα που προκύπτει μετά από 10 βήματα.

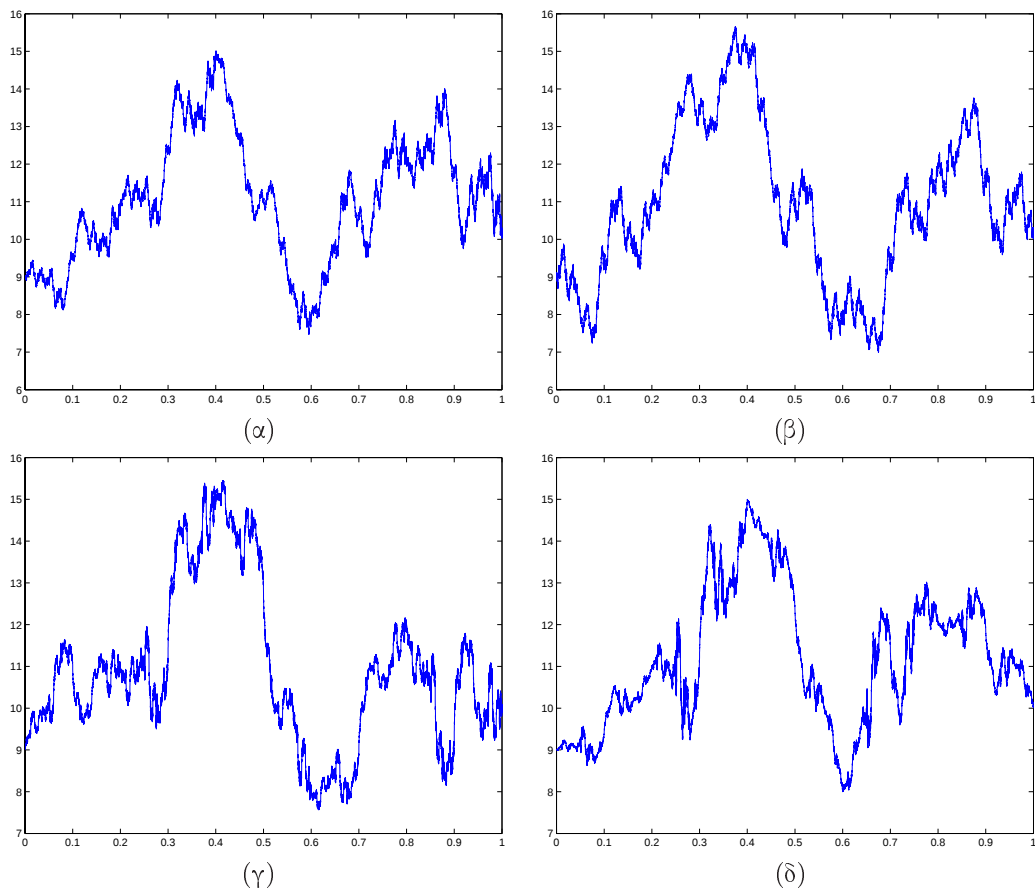


Σχήμα 4.4: (Συνέχεια από το 4.3). Τα δεδομένα που δώσαμε στον αλγόριθμο είναι: $IP=[0 \ 10; 0.5 \ 13; 1 \ 11]$ και $S=[0.5 \ 0.7]$. Η διάσταση του γραφήματος είναι $D = 1.263$.



Σχήμα 4.5: Σε όλες τις fractal συναρτήσεις παρεμβολής των παραπάνω σχημάτων χρησιμοποιήθηκαν τα σημεία $\Delta = \{(0, 12), (0.25, 13), (0.50, 15), (0.75, 11), (1.00, 12)\}$, αλλά διαφορετικοί συντελεστές κατακόρυφης συστολής. Οι fractal διαστάσεις των γραφημάτων έχουν αναγραφεί κάτω από κάθε γράφημα. Οι συντελεστές κατακόρυφης συστολής που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε γράφημα δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

(α)	-0.3	0.2	-0.3	-0.3
(β)	0.5	0.4	-0.5	-0.4
(γ)	-0.6	0.6	-0.5	0.6
(δ)	0.7	-0.8	-0.7	0.8



Σχήμα 4.6: Σε όλες τις fractal συναρτήσεις παρεμβολής των παραπάνω σχημάτων χρησιμοποιήθηκαν τα σημεία $\Delta = \{(0, 9), (0.2, 11), (0.4, 15), (0.6, 8), (0.8, 12), (1.0, 10)\}$, αλλά διαφορετικοί συντελεστές κατακόρυφης συστολής, έτσι ώστε η διάσταση όλων των γραφημάτων να ισούται με $D = 1.3988$. Οι συντελεστές κατακόρυφης συστολής που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε γράφημα δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

(α)	-0.3	-0.4	-0.3	0.4	0.5
(β)	-0.4	+0.3	-0.4	-0.4	0.4
(γ)	0.3	-0.5	0.4	-0.3	-0.5
(δ)	-0.2	-0.6	0.3	0.5	0.3



4.2 Διανυσματικές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής

Θεωρούμε ένα σύνολο σημείων παρεμβολής $\tilde{\Delta} = \{(x_i, y_i, z_i), i = 0, 1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^3$. Επίσης, θεωρούμε το ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^3, w_{1-N}\}$ όπου οι απεικονίσεις w_i έχουν την μορφή

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 \\ c_i & s_{11,i} & s_{12,i} \\ e_i & s_{21,i} & s_{22,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

για $i = 1, 2, \dots, N$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$w_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$w_i \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

για $i = 1, 2, \dots, N$. Θεωρώντας τους συντελεστές $s_{11,i}$, $s_{12,i}$, $s_{21,i}$ και $s_{22,i}$ ως ελεύθερες παραμέτρους, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα με 6 εξισώσεις και 6 αγνώστους $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i)$ το οποίο μπορεί να λυθεί εύκολα. Συγκεκριμένα,

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0}, \quad (4.16)$$

$$b_i = \frac{x_N x_{i-1} - x_0 x_i}{x_N - x_0}, \quad (4.17)$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_N - x_0} - s_{11,i} \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0} - s_{12,i} \frac{z_N - z_0}{x_N - x_0}, \quad (4.18)$$

$$e_i = \frac{z_i - z_{i-1}}{x_N - x_0} - s_{21,i} \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0} - s_{22,i} \frac{z_N - z_0}{x_N - x_0}, \quad (4.19)$$

$$d_i = y_0 - c_i x_0 - s_{11,i} y_1 - s_{12,i} z_0. \quad (4.20)$$

$$f_i = z_0 - e_i x_0 - s_{21,i} y_1 - s_{22,i} z_0. \quad (4.21)$$

Επιλέγοντας τον πίνακα

$$S_i = \begin{pmatrix} s_{11,i} & s_{12,i} \\ s_{21,i} & s_{22,i} \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε όλες οι ιδιοτιμές του να είναι μικρότερες του 1, για $i = 1, 2, \dots, N$, το ΣΕΣ γίνεται υπερβολικό² και ο ελκυστής του είναι το γράφημα μιας διανυσματικής συνάρτησης

$$\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x)), \quad x \in [x_0, x_N]$$

που παρεμβάλλεται στα σημεία του $\tilde{\Delta}$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **Διανυσματική Fractal Συνάρτηση Παρεμβολής** ή **Fractal Συνάρτηση Παρεμβολής μιας Κρυφής Μεταβλητής**³. Η δεύτερη ονομασία οφείλεται στο γεγονός ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διαδικασία και ως εξής: Έχουμε $\Delta = \{(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2$ ένα σύνολο σημείων παρεμβολής και κατασκευάζουμε το σύνολο $\tilde{\Delta} = \{(x_i, y_i, z_i), i = 0, 1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^3$ θεωρώντας τις τιμές z_i , $i = 0, 1, \dots, N$, ως ελεύθερες παραμέτρους. Επιλέγοντας κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους z_i ,

²Όπως θα δούμε παρακάτω αν όλες οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι μικρότερες του 1, τότε υπάρχει μια νόρμα στο χώρο των πινάκων, τέτοια ώστε η νόρμα του πίνακα αυτού να είναι μικρότερη του 1.

³Vector Valued Fractal Interpolation Functions ή Hidden Variable Fractal Interpolation Functions.



$s_{11,i}$, $s_{12,i}$, $s_{21,i}$ και $s_{22,i}$ κατασκευάζουμε μια συνάρτηση παρεμβολής για τα σημεία του $\tilde{\Delta}$, η προβολή της οποίας, στο επίπεδο xy (δηλαδή η συνάρτηση f_1) θα παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ . Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε fractal συναρτήσεις παρεμβολής (σημείων του $\mathbb{R}^2$), οι οποίες εξαρτώνται από περισσότερες παραμέτρους (βλέπε [BEHM89], [Cha04]).

4.3 Κατά Τμήματα Συσχετισμένες FΣΠ.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δοσμένο σύνολο σημείων παρεμβολής

$$\Delta = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2, \quad N \geq 2,$$

με $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ και ένα υποσύνολό του

$$Q = \{(\hat{x}_i, \hat{y}_i) : i = 0, 1, \dots, M\} \subset \Delta, \quad M \geq 2,$$

με $\hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_M$, τέτοιο ώστε $\hat{x}_0 = x_0$ και $\hat{x}_M = x_N$. Τα σημεία παρεμβολής χωρίζουν το διάστημα $[x_0, x_N]$ σε N διαστήματα $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$, που ονομάζονται **τομείς**⁴, ενώ τα σημεία του Q χωρίζουν το $[x_0, x_N]$ σε M διαστήματα $J_j = [\hat{x}_{j-1}, \hat{x}_j]$, $j = 1, 2, \dots, M$, που ονομάζονται **περιοχές**⁵. Είναι προφανές, ότι κάθε περιοχή έχει κάποιους τομείς που είναι υποσύνολά της. Θεωρούμε, επίσης, μια απεικόνιση

$$\mathbb{J} : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}, \quad \text{με } \mathbb{J}(i) = j,$$

και affine απεικονίσεις w_i , $i = 1, 2, \dots, N$ της μορφής 4.1, τέτοιες ώστε

$$w_i \begin{pmatrix} \hat{x}_{j-1} \\ \hat{y}_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$w_i \begin{pmatrix} \hat{x}_j \\ \hat{y}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Οι απεικονίσεις w_i απεικονίζουν τα άκρα της περιοχής $J_j \equiv J_{\mathbb{J}(i)}$ στα άκρα του τομέα I_i (βλέπε σχήμα 4.7). Ορίζοντας τις απεικονίσεις $T_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $T_i(x) = a_i x + b_i$, παρατηρούμε ότι $T_i(J_j) = I_i$. Θεωρώντας τους συντελεστές s_i ως ελεύθερες παραμέτρους, η λύση του συστήματος που προκύπτει είναι

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}}, \quad (4.24)$$

$$b_i = \frac{\hat{x}_j x_{i-1} - \hat{x}_{j-1} x_i}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}}, \quad (4.25)$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}} - s_i \frac{\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}}, \quad (4.26)$$

$$d_i = \frac{\hat{x}_j y_{i-1} - \hat{x}_{j-1} y_i}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}} - s_i \frac{\hat{x}_j \hat{y}_{j-1} - \hat{x}_{j-1} \hat{y}_j}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}}. \quad (4.27)$$

Ένα ΠΣΕΣ που συνδέεται με τα δεδομένα του Δ αποτελείται από το ΣΕΣ $\{[x_0, x_N] \times \mathbb{R}, w_{1-N}\}$ μαζί με έναν στοχαστικό πίνακα $(p_{nm})^N$:

$$p_{nm} = \begin{cases} > 0 & \text{αν } I_n \subseteq J_{\mathbb{J}(m)}, \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad (4.28)$$

⁴Regions.

⁵Domains.



για $n = 1, 2, \dots, N$ και $m = 1, 2, \dots, N$. Δηλαδή, το στοιχείο p_{nm} είναι θετικό, αν ο τομέας I_n είναι υποσύνολο της περιοχής $J_{\mathbb{J}(m)}$, η οποία μέσω της T_m απεικονίζεται στον τομέα I_m . Συνήθως ο πίνακας αυτός επιλέγεται έτσι ώστε, τα μη μηδενικά στοιχεία κάθε γραμμής του να είναι ίσα μεταξύ τους. Από αυτόν τον πίνακα προκύπτει και ο **πίνακας συνδέσεων** $C = (c_{nm})^N$.

$$c_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{αν } p_{mn} > 0 \\ 0 & \text{αν } p_{mn} = 0 \end{cases}, \quad (4.29)$$

Χρησιμοποιώντας την ορολογία της στοχαστικής ανέλιξης, που αντιστοιχεί στο ΠΣΕΣ, όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2, και ξεκινώντας από ένα τυχαίο αρχικό σημείο (x^*, y^*) του $[x_0, x_N] \times \mathbb{R}$, ο αλγόριθμος τυχαίων επαναλήψεων θα γίνει ως εξής:

- Η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση n , αν το σημείο (x^*, y^*) ανήκει στο $I_n \times \mathbb{R}$.
- Επιλέγουμε με βάση τις πιθανότητες $p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nN}$ μια από τις απεικονίσεις $w_1, w_2, \dots, w_N$ αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας π.χ. την απεικόνιση w_m , προκύπτει ένα νέο σημείο το οποίο ανήκει στο $I_m \times \mathbb{R}$ και η αλυσίδα μεταβαίνει στην κατάσταση m . Βέβαια, για να επιλεγεί η απεικόνιση w_m , θα πρέπει $p_{nm} > 0$, δηλαδή θα πρέπει το αρχικό σημείο να ανήκει στην περιοχή $J_{\mathbb{J}(m)}$, η οποία μέσω της w_m απεικονίζεται στον τομέα I_m .
- Θεωρούμε το σημείο που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα ως το αρχικό σημείο (x^*, y^*) και εφαρμόζουμε ξανά τα προηγούμενα βήματα μέχρι να δημιουργηθούν αρκετά σημεία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4

Αν για το ΠΣΕΣ, που ορίστηκε παραπάνω, ισχύει $|s_i| < 1$, για $i = 1, 2, \dots, N$, τότε το ΠΣΕΣ είναι υπερβολικό και έχει ένα μοναδικό ελκυστή G , ο οποίος είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης που παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ . Η συνάρτηση αυτή λέγεται **κατά τμήματα συσχετισμένη Fractal Συνάρτηση Παρεμβολής**. Επιπλέον, αν $S(d)$ είναι ο $N \times N$ διαγώνιος πίνακας

$$S(d) = \text{diag}\{|s_1|a_1|^{d-1}, |s_2|a_2|^{d-1}, \dots, |s_N|a_N|^{d-1}\},$$

D η μοναδική τιμή για την οποία ισχύει $\rho(SC(D)) = 1^6$, ο πίνακας συνδέσεων C είναι μη αναγώγιμος και τα σημεία παρεμβολής που ανήκουν σε κάθε περιοχή J_j , για $j = 1, 2, \dots, M$ είναι μη συνευθειακά τότε:

$$\dim_B(G) = \begin{cases} D & \text{αν } \rho(S(1)C) > 1 \\ 1 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

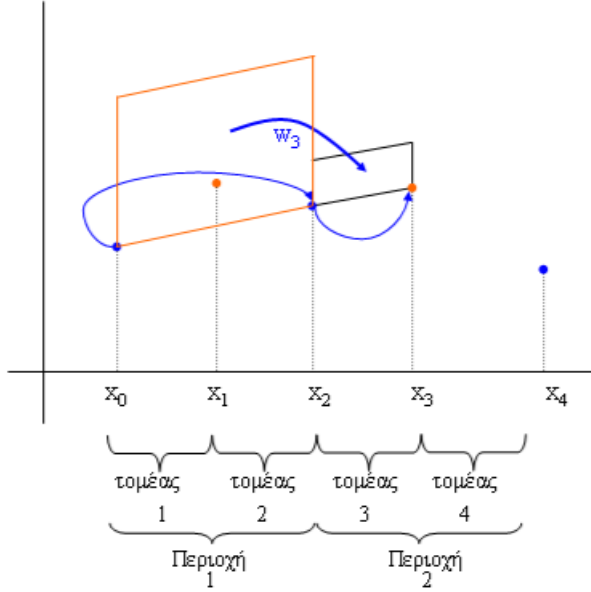
Η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στο [BEH89]. Στην ειδική περίπτωση όπου τα σημεία παρεμβολής είναι ισαπέχοντα, δηλαδή $x_i - x_{i-1} = \delta$, για $i = 1, 2, \dots, N$, και οι περιοχές έχουν όλες το ίδιο πλάτος, δηλαδή $\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1} = \psi$, για $j = 1, 2, \dots, M$, τότε η box διάσταση του γραφήματος G της κατά τμήματα αυτοόμοιας Fractal Συνάρτησης Παρεμβολής δίνεται από τη σχέση

$$D(G) = \begin{cases} 1 + \log_\alpha \lambda & \text{αν } \lambda > 1 \\ 1 & \text{αν } \lambda \leq 1 \end{cases},$$

όπου $\lambda = \rho(S(1)C)$ και $\alpha = \frac{\psi}{\delta} = \frac{1}{a_i}$ για $i = 1, 2, \dots, N$, αν τα σημεία παρεμβολής που ανήκουν σε κάθε περιοχή είναι μη συνευθειακά.

Όπως φαίνεται και στα παρακάτω παραδείγματα, χρησιμοποιώντας κατά τμήματα συσχετισμένες ΦΣΠ μπορούμε να κατασκευάσουμε συναρτήσεις παρεμβολής με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας. Η συνάρτηση παρεμβολής εξαρτάται όχι μόνο από τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας, αλλά και από τον πίνακα συνδέσεων C .

⁶Όπου $\rho(SC(D))$ η φασματική ακτίνα του πίνακα $SC(D)$.



Σχήμα 4.7: Χρησιμοποιώντας 5 σημεία παρεμβολής και παίρνοντας 3 από αυτά τα σημεία στο σύνολο Q δημιουργούνται 4 τομείς και 2 περιοχές. Στο σχήμα βλέπουμε τον τρόπο δράσης της w_3 στα ακραία σημεία. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, οι w_i μπορούν να απεικονίζουν μιας περιοχή σε τομέα που δεν είναι υποσύνολο της περιοχής.

Στο παράρτημα Α (πρόγραμμα Α.7) δίνεται ο αλγόριθμος (σε Matlab) για την κατασκευή μιας κατά τμήματα συσχετισμένης Fractal Συνάρτηση Παρεμβολής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.1

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα σημεία παρεμβολής

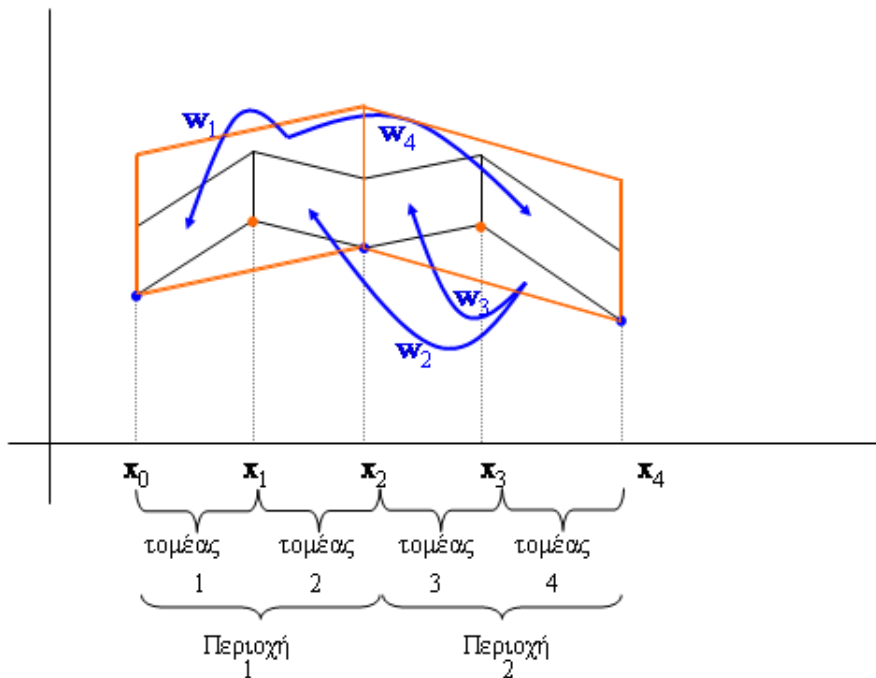
$$\Delta = \{(0, 9), (0.25, 11), (0.5, 10), (0.75, 11), (1, 8)\}$$

και

$$Q = \{(0, 9), (0.5, 10), (1, 8)\}.$$

Έχουμε, $\delta = 0.25$, $\psi = 0.5$ και $\alpha = 2$. Επιλέγουμε ως πίνακα πιθανοτήτων τον

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$



Σχήμα 4.8: Χρησιμοποιώντας 5 σημεία παρεμβολής και παίρνοντας 3 από αυτά τα σημεία στο σύνολο Q (βλέπε παράδειγμα 4.3.1) δημιουργούνται 4 τομείς και 2 περιοχές.

Άρα ο πίνακας συνδέσεων θα είναι

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(βλέπε σχήμα 4.8). Επιλέγοντας διάφορους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του προγράμματος Α'7 (παράρτημα Α) παίρνουμε τα γραφήματα του σχήματος 4.10.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3.2

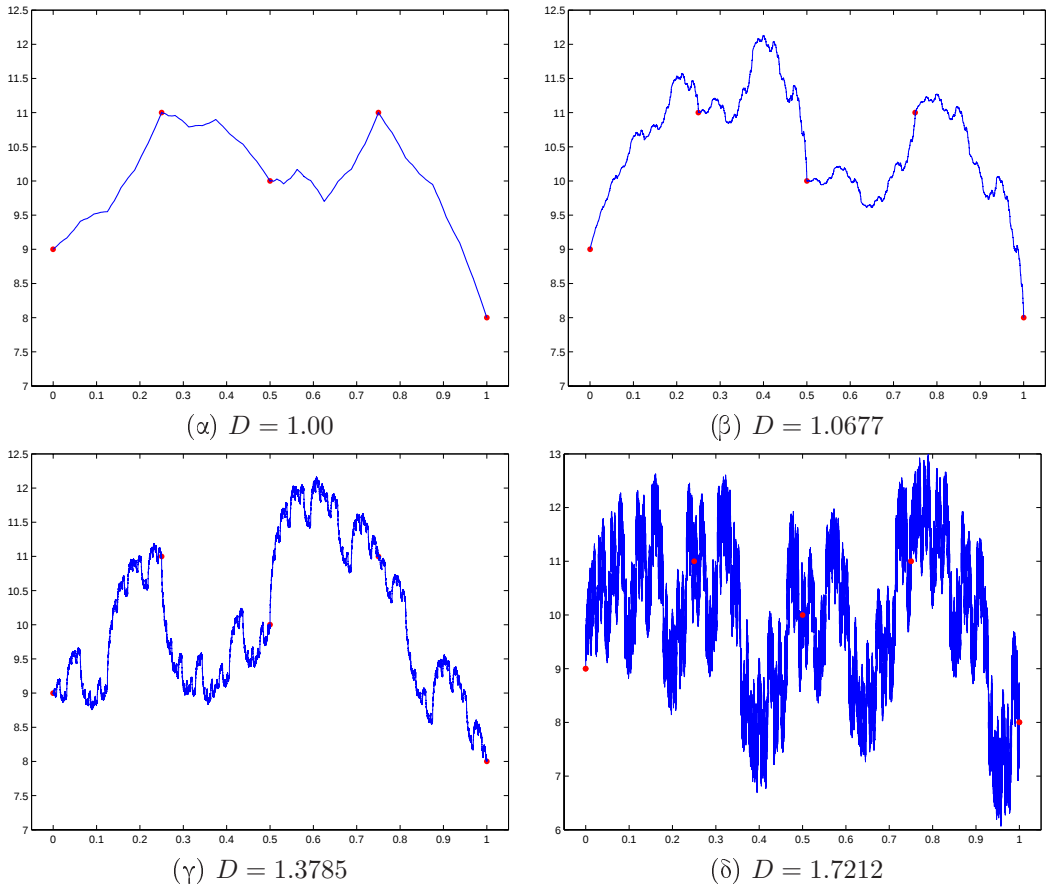
Αλλάζοντας ελαφρώς τη μεθοδολογία που περιγράφηκε, παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής

$$\Delta = \{(0, 11), (0.2, 9), (0.5, 10), (0.7, 12), (0.85, 9), (1.0, 10)\},$$

που χωρίζουν το $[0, 1]$ σε 5 τομείς και ως περιοχές ορίζουμε $J_1 = [0, 0.5]$, $J_2 = [0.2, 0.7]$, $J_3 = [0.7, 1.0]$. Σε αυτό το παράδειγμα οι περιοχές δεν είναι ξένες μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα που αναφέραμε εξακολουθούν να ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση. Παίρνουμε συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας

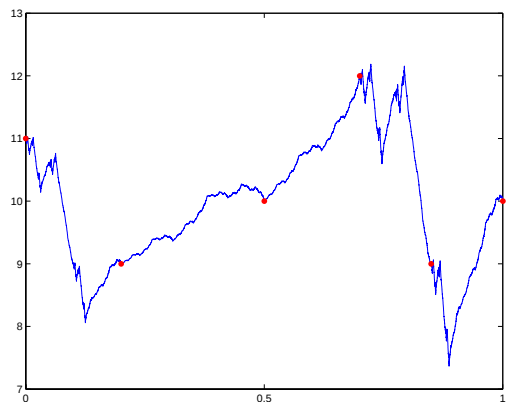


$s_1 = 0.5$, $s_2 = -0.6$, $s_3 = 0.5$, $s_4 = -0.6$, και $s_5 = 0.7$. Επιλέγοντας διάφορους πίνακες πιθανοτήτων και εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του προγράμματος Α'7 (παράρτημα Α) παίρνουμε τα γραφήματα του σχήματος 4.10.

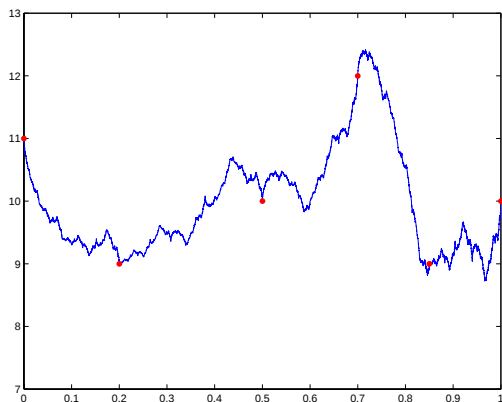


Σχήμα 4.9: Σε όλες τις fractal συναρτήσεις παρεμβολής των παραπάνω σχημάτων χρησιμοποιήθηκαν τα σημεία του παραδείγματος 4.3.1 με τον ίδιο πίνακα συνδέσεων, αλλά με διαφορετικούς συντελεστές κατακόρυφης συστολής. Οι διαστάσεις κάθε γραφήματος έχουν αναγραφεί στα σχήματα. Οι συντελεστές κατακόρυφης συστολής που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε γράφημα δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

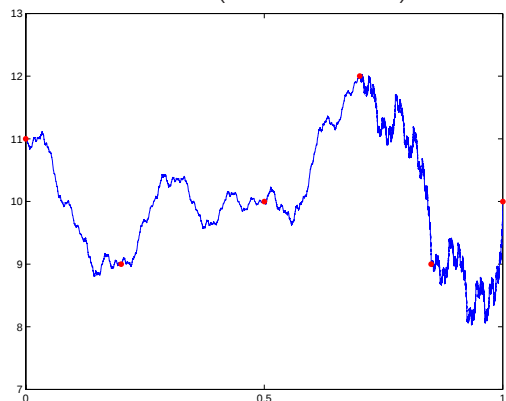
(α)	-0.3	0.2	-0.4	0.3
(β)	0.4	0.7	-0.4	0.6
(γ)	-0.6	-0.7	0.7	-0.6
(δ)	0.8	-0.9	-0.8	0.8



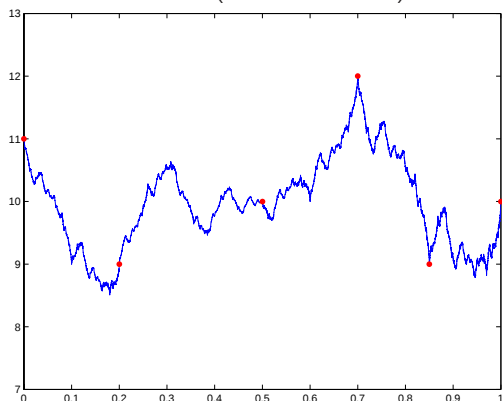
$$(\alpha) \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$(\beta) \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$(\gamma) \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$(\delta) \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Σχήμα 4.10: Σε όλες τις fractal συναρτήσεις παρεμβολής των παραπάνω σχημάτων χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα του παραδείγματος 4.3.2 με ίδιους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας, αλλά διαφορετικούς πίνακες συνδέσεων. Κάτω από κάθε γράφημα αναγράφεται ο πίνακας συνδέσεων που χρησιμοποιήθηκε.



Κεφάλαιο 5

Μοντελοποίηση μονοδιάστατων διακριτών σημάτων με χρήση Fractal Συναρτήσεων Παρεμβολής

Αγαπητέ Καθηγητή,
Συγχωρέστε με που χρησιμοποιώ γραφομηχανή·
κατέληξα να προτιμώ τις διακριτές μηχανές από τις συνεχείς.

Από γράμμα του Τζακ Γκουντ στον Άλαν Τιούρινγκ.

Οι παραδοσιακές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση μονοδιάστατων σημάτων (δηλαδή δεδομένων της μορφής $D = \{(u_n, v_n) : n = 0, 1, \dots, N_0; u_n < u_{n+1}\}$) περιλαμβάνουν κλασικές μεθόδους παρεμβολής (π.χ. πολυωνυμική), ARMA μοντέλα κ.λ.π. Οι πρώτοι που σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν θεωρία ΣΕΣ για το σκοπό αυτό ήταν οι David S. Mazel και Monson H. Hayes (βλέπε [MH92]). Η μεθοδολογία που εφάρμοσαν διαφέρει σημαντικά από τις παραδοσιακές τεχνικές και βασίζεται κυρίως στη θεωρία των Fractal Συναρτήσεων Παρεμβολής.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε τις μεθόδους κατασκευής FΣΠ και δώσαμε αλγόριθμους για την κατασκευή τους μέσω Η/Υ. Είδαμε ότι, χρησιμοποιώντας ακόμα και 4 ή 5 σημεία μόνο, μπορούν να προκύψουν fractal συναρτήσεις αρκετά πολύπλοκες. Επιπλέον, διατηρώντας τα ίδια σημεία, αλλά αλλάζοντας τις υπόλοιπες παραμέτρους της κατασκευής, προκύπτουν διαφορετικές συναρτήσεις. Πως μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε μια fractal συνάρτηση που να αναπαριστά, όσο καλύτερα γίνεται, ένα οποιοδήποτε διακριτό μονοδιάστατο σήμα όσο πολύπλοκο και αν είναι αυτό; Οι Mazel και Hayes, χρησιμοποιώντας το θεώρημα συγχόλησης (βλέπε 2.2 και 2.3), απάντησαν σε αυτό το ερώτημα, δίνοντας τεχνικές για την κατασκευή τέτοιων συναρτήσεων. Παρακάτω θα παραθέσουμε τα βασικά σημεία της κατασκευής τους.



5.1 Αυτοσυσχετισμένο Μοντέλο Fractal Παρεμβολής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο δεδομένων $\{(u_n, v_n) : n = 0, 1, \dots, N_0; u_n < u_{n+1}\}$, που αντιστοιχεί σε ένα μονοδιάστατο διακριτό σήμα, και τα σημεία παρεμβολής $\Delta = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2$, $N \in \mathbb{N}$, με $N < N_0$. Τα σημεία παρεμβολής επιλέγονται ως υποσύνολο του συνόλου των δεδομένων, με $x_0 = u_0$, $x_N = u_{N_0}$, $y_0 = v_0$ και $y_N = v_{N_0}$. Χρησιμοποιώντας απεικονίσεις της μορφής

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

για $i = 1, 2, \dots, N$, κατασκευάζουμε μια αυτοσυσχετισμένη ΨΣΠ που παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ . Πρέπει, βέβαια, να περιγράψουμε έναν αποδοτικό τρόπο για να καθορίσουμε τον τρόπο επιλογής των παραμέτρων του μοντέλου, δηλαδή τα σημεία παρεμβολής του συνόλου Δ και τους συντελεστές s_i , έτσι ώστε το γράφημα της συνάρτησης που θα προκύψει να είναι “κοντά” στο σύνολο των δεδομένων. Μια λύση θα ήταν η εξαντλητική αναζήτηση όλων των δυνατών συνδυασμών επιλογής των σημείων παρεμβολής και των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας. Είναι προφανές βέβαια, ότι αυτή η μέθοδος δεν είναι εφικτή υπολογιστικά, επομένως χρειάζεται μια άλλη πιο αποδοτική διαδικασία. Καταρχήν, θα αναλύσουμε τον τρόπο υπολογισμού των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας s_i .

5.1.1 Υπολογισμός Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας - Γεωμετρική Μέθοδος

Ας υποθέσουμε ότι τα (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) είναι δύο διαδοχικά σημεία παρεμβολής του Δ . Θα περιγράψουμε έναν τρόπο υπολογισμού του συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας s_i της απεικόνισης w_i . Θυμίζουμε ότι μέσω της απεικόνισης w_i απεικονίζεται το σημείο (x_0, y_0) στο (x_{i-1}, y_{i-1}) και το σημείο (x_N, y_N) στο (x_i, y_i) . Επίσης, το γράφημα ολόκληρης της συνάρτησης παρεμβολής συστέλλεται κατακόρυφα κατά τον άγνωστο συντελεστή s_i . Ορίζουμε ως μ_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N_0$, την κατακόρυφη απόσταση κάθε σημείου (u_n, v_n) των δεδομένων, από την ευθεία γραμμή που ενώνει τα δύο ακραία σημεία (x_0, y_0) (x_N, y_N) . Η τιμή μ_n αυτή λαμβάνεται ως θετική αν το (u_n, v_n) βρίσκεται πάνω από την ευθεία που ενώνει τα δύο ακραία σημεία ή αρνητική σε αντίθετη περίπτωση. Την μέγιστη, κατά απόλυτη τιμή, από αυτές τις αποστάσεις την ονομάζουμε μ .

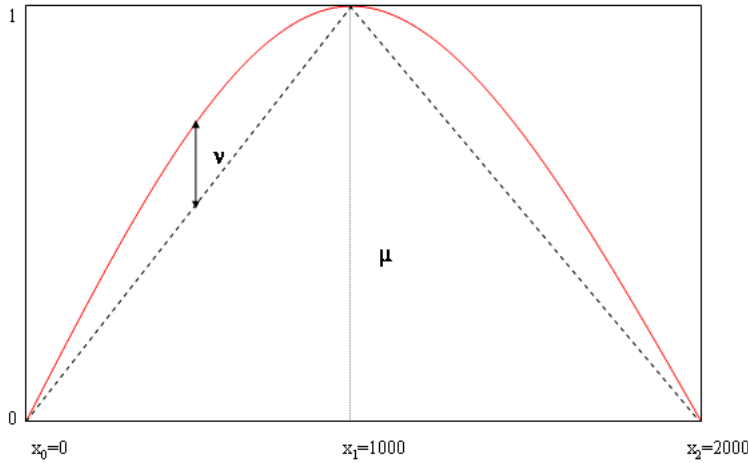
Με όμοιο τρόπο ορίζουμε ως ν_k , $k = 0, 1, \dots, K$, την απόσταση κάθε σημείου των δεδομένων, με τετμημένη που περιέχεται στο $[x_{i-1}, x_i]$, από την ευθεία που ενώνει τα σημεία (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) . Η τιμή ν_k λαμβάνεται ως θετική, αν το σημείο βρίσκεται πάνω από την ευθεία, αλλιώς λαμβάνεται ως αρνητική. Την μέγιστη, κατά απόλυτη τιμή, από αυτές τις αποστάσεις την ονομάζουμε ν . Ο συντελεστής κατακόρυφης αναλογίας της απεικόνισης w_i υπολογίζεται βάση του τύπου

$$s_i = \frac{\nu}{\mu}. \quad (5.2)$$

Για παράδειγμα, στο σχήμα 5.1 έχουμε ένα σύνολο από 2001 σημεία, που βρίσκονται πάνω σε μια παρβολή, ενώ το σύνολο των σημείων παρεμβολής αποτελείται από τα σημεία $(0, 0)$, $(1000, 1)$, $(2000, 0)$. Έτσι για τον υπολογισμό του s_1 , έχουμε $\nu = \frac{1}{4}$, $\mu = 1$ άρα $s_1 = \frac{1}{4}$.

5.1.2 Υπολογισμός Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας - Αναλυτική Μέθοδος

Ένας εναλλακτικός τρόπος για τον υπολογισμό του συντελεστή s_i βασίζεται στην μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο δεδομένων της μορφής $\{(n, v_n) : n =$



Σχήμα 5.1: Γεωμετρικός υπολογισμός του συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας.

$0, 1, \dots, N_0\}$. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι το σημείο (n, v_n) απεικονίζεται (μέσω της w_i) στο $([a_in + b_i], c_in + s_iv_n + d_i)$ (όπου $[\cdot]$ το ακέραιο μέρος). Η ποσότητα

$$\Omega_i = \sum_{m=p}^q (y_m - v_m)^2, \quad (5.3)$$

όπου $p = x_{i-1}$ και $q = x_i$, θεωρώντας $m = [a_in + b_i]$ και $y_m = c_in + s_iv_n + d_i$, η οποία εκφράζει το τετραγωνικό σφάλμα, πρέπει να είναι όσο μικρότερη γίνεται. Βέβαια, πρέπει να τονιστεί ότι υπάρχουν πολλές τιμές του n που θα μας δώσουν την ίδια τιμή για το m (αλλά διαφορετικές τιμές y_m). Έτσι, μπορούμε να ξαναγράψουμε την Ω_i ως εξής:

$$\Omega_i = \sum_{n=0}^{N_0} (c_in + s_iv_n + d_i - v_m)^2, \quad \text{με } m = [a_in + b_i] \quad (5.4)$$

$$\Omega_i = \sum_{n=0}^{N_0} (A_n - B_n s_i)^2, \quad (5.5)$$

όπου $A_n = -v_m + \Gamma_in + Z_i$ και $B_n = E_in + H_i - v_n$. Παίρνοντας τη σχέση

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial s_i} = 0.$$



βρίσκουμε την τιμή του s_i που ελαχιστοποιεί το σφάλμα E ,

$$s_i = \frac{\sum_{n=0}^{N_0} B_n A_n}{\sum_{n=0}^{N_0} B_n^2}. \quad (5.6)$$

5.2 Ο Αλγόριθμος

Οι Mazel και Hayes παρουσίασαν τον παρακάτω αλγόριθμο για την εύρεση των σημείων παρεμβολής και των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας ενός τυχαίου συνόλου δεδομένων. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος ψάχνει το σύνολο των δεδομένων για σημεία παρεμβολής, που χωρίζουν το σύνολο των δεδομένων σε τμήματα (τομείς), που “μοιάζουν” με την απεικόνιση ολόκληρου του συνόλου μέσω μιας affine απεικόνισης της μορφής 5.1. Εξαιτίας του θεωρήματος συγκόλλησης, η αυτοσυσχετισμένη ΕΣΠ που προκύπτει προσεγγίζει τα αρχικά δεδομένα. Παρακάτω δίνεται ο αλγόριθμος.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 5.1

1. Επίλεξε το πρώτο σημείο των δεδομένων ως το πρώτο σημείο παρεμβολής και ως το αριστερό άκρο του πρώτου τομέα.
2. Επίλεξε το επόμενο σημείο του συνόλου των δεδομένων ως το επόμενο σημείο παρεμβολής και ως το δεξιό άκρο του τομέα.
3. Υπολόγισε το συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας s_i που συνδέεται με τον τομέα που ορίζεται από τα δύο σημεία παρεμβολής. Για τον υπολογισμό του συντελεστή αυτού μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια από τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν παραπάνω.
4. Αν $|s_i| > 1$ τότε πήγαινε στο βήμα 2, αλλιώς στο βήμα 5.
5. Υπολόγισε τις υπόλοιπες παραμέτρους της απεικόνισης w_i , που απεικονίζει ολόκληρο το σύνολο των δεδομένων στον τομέα I_i , από τις σχέσεις 4.8-4.11. Στη συνέχεια εφάρμοσε την απεικόνιση w_i σε κάθε σημείο του συνόλου των δεδομένων ώστε να προκύψει το σύνολο $w_i(\Delta)$.
6. Υπολόγισε την απόσταση μεταξύ του τμήματος των δεδομένων που βρίσκεται στον τομέα I_i (το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε ως $\Delta_i = \Delta \cap (I_i \times \mathbb{R})$) και του $w_i(\Delta)$. Για την απόσταση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε μετρική.
7. Επανάλαβε τα βήματα 2-6 μέχρι ο αλγόριθμος να φτάσει στο τέλος των σημείων του συνόλου των δεδομένων.
8. Αποθήκευσε το ζεύγος των σημείων παρεμβολής και τον συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας που δίνουν την μικρότερη απόσταση μεταξύ του Δ_i και του $w_i(\Delta)$.
9. Το δεξί σημείο από το αποθηκευμένο ζεύγος σημείων παρεμβολής είναι το αριστερό άκρο του επόμενου τομέα.
10. Αν το σημείο αυτό είναι το τελευταίο σημείο του Δ ο αλγόριθμος τελειώνει, αλλιώς πήγαινε στο βήμα 2.

Αν το σύνολο των δεδομένων D είναι αυτοόμοιο¹, τότε ο παραπάνω αλγόριθμος θα βρει ένα σύνολο απεικονίσεων, που θα ορίζουν ένα ΕΣΣ, ο ελκυστής του οποίου θα ταυτίζεται με το D . Σε αντίθετη

¹ Δηλαδή κάθε κομμάτι του D “μοιάζει” με όλο το D , όπως ο ελκυστής ενός ΕΣΣ που αποτελείται από affine απεικονίσεις.



περίπτωση ο αλγόριθμος βρίσκει ένα ΣΕΣ που έχει ως ελκυστή το γράφημα μιας αυτοσυσχετισμένης FΣΠ που προσεγγίζει τα αρχικά δεδομένα. Ο έλεγχος στο βήμα 4 είναι απαραίτητος ώστε το ΣΕΣ που θα προκύψει να είναι υπερβολικό. Στο βήμα 6 μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε μετρική. Ας θεωρήσουμε τα διατεταγμένα σύνολα $A = \{(n, y_n); n = 0, 1, \dots, M\}$ και $B = \{(n, z_n); n = 0, 1, \dots, M\}$. Πιθανές επιλογές για την μετρική h που θα χρησιμοποιηθεί είναι:

- $h(A, B) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^M (y_n - z_n)^2$,
- $h(A, B) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^M |y_n - z_n|$,
- $h(A, B) = \max\{|y_n - z_n|; n = 0, 1, \dots, M\}$,

ή η μετρική του Hausdorff. Τέλος, μπορούμε να αλλάξουμε το βήμα 8 ώστε να μη βρίσκουμε την ελάχιστη απόσταση, αλλά την πρώτη απόσταση που είναι μικρότερη από ένα αριθμό ε που θα έχει προεπιλεγεί. Με αυτό τον τρόπο μειώνεται ο αριθμός των αναγκαίων επαναλήψεων, χωρίς να αλλοιώνεται σημαντικά το τελικό αποτέλεσμα.

5.3 Κατά Τμήματα Συσχετισμένο Μοντέλο Fractal Παρεμβολής

Οι περισσότερες ακολουθίες δεδομένων όχι μόνο δεν είναι αυτοόμοιες αλλά ούτε προσεγγίζουν μια αυτοόμοια ακολουθία. Για τέτοιες ακολουθίες δεδομένων, η παραπάνω μεθοδολογία είναι, προφανώς, ανεπαρκής. Ακολουθώντας παρόμοιες τεχνικές μπορούμε να κατασκευάσουμε μια κατά τμήματα συσχετισμένη fractal συνάρτηση παρεμβολής που θα προσεγγίζει τέτοιας μορφής δεδομένα. Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο, πρέπει να χωρίσουμε το σύνολο D σε κατάλληλους τομείς και περιοχές και να βρούμε συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας τέτοιους ώστε η FΣΠ που θα προκύψει να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στα δεδομένα γίνεται. Και πάλι θα μπορούσαμε να εκτελέσουμε μια εξαντλητική αναζήτηση όλων των δυνατών συνδυασμών αυτών των παραμέτρων, αλλά η τακτική αυτή δε θα ήταν καθόλου αποδοτική.

Γι αυτό το λόγο, περιορίζουμε τη δυνατότητα επιλογής των σημείων παρεμβολής, θεωρώντας ότι οι τομείς και οι περιοχές έχουν σταθερό πλάτος ίσο με δ και ψ αντίστοιχα, που καθορίζεται αυθαίρετα. Δηλαδή για τα σημεία παρεμβολής ισχύει

$$x_i - x_{i-1} = \delta, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, N$$

ενώ για τα σημεία του Q ισχύει

$$\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1} = \delta, \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, M.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές s_i των απεικονίσεων w_i (που απεικονίζουν την περιοχή $J_j \equiv J_{\mathbb{J}(i)}$ στον τομέα I_i) με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που περιγράφηκε και για το προηγούμενο μοντέλο. Ορίζουμε ως μ_n , την κατακόρυφη απόσταση κάθε σημείου (u_n, v_n) των δεδομένων που περιέχονται στην περιοχή J_j , από την ευθεία γραμμή που ενώνει τα δύο ακραία σημεία της περιοχής. Η τιμή μ_n αυτή λαμβάνεται ως θετική αν το (u_n, v_n) βρίσκεται πάνω από την ευθεία που ενώνει τα δύο ακραία σημεία ή αρνητική σε αντίθετη περίπτωση. Την μέγιστη, κατά απόλυτη τιμή, από αυτές τις αποστάσεις την ονομάζουμε μ . Με όμοιο τρόπο ορίζουμε ως ν_k , την απόσταση κάθε σημείου των δεδομένων, με τετμημένη που περιέχεται στον τομέα I_i , από την ευθεία που ενώνει τα ακραία σημεία (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) του τομέα. Η τιμή ν_k λαμβάνεται ως θετική, αν το σημείο βρίσκεται πάνω από την ευθεία, αλλιώς λαμβάνεται ως αρνητική. Την μέγιστη, κατά απόλυτη τιμή, από αυτές τις αποστάσεις την ονομάζουμε ν . Ο συντελεστής κατακόρυφης αναλογίας της απεικόνισης w_i υπολογίζεται και πάλι βάση του τύπου

$$s_i = \frac{\nu}{\mu}. \quad (5.7)$$



Ακολουθώντας την αναλυτική μέθοδο της παραγράφου 5.1.2 μπορούμε επίσης να καταλήξουμε σε παρόμοιο τύπο

$$s_i = \frac{\sum_{n=\nu}^{\mu} B_n A_n}{\sum_{n=\nu}^{\mu} B_n^2}, \quad (5.8)$$

όπου όπου $A_n = v_m - \Gamma_i n - Z_i$ και $B_n = E_i n + H_i - v_n$, $m = [a_i n + b_i]$. Το άθροισμα αυτή τη φορά αναφέρεται μόνο στα δεδομένα v_n , που ανήκουν στην περιοχή J_j , και όχι σε όλο το σύνολο των δεδομένων. Ο αλγόριθμος που πρότειναν οι Mazel και Hayes για την επιλογή των παραμέτρων δίνεται παρακάτω.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 5.2

1. Επίλεξε δ και ψ , ώστε $\psi = \alpha\delta$, $\alpha \in \mathbb{N}$. $N + 1$ είναι ο αριθμός των σημείων παρεμβολής και $M + 1$ ο αριθμός των σημείων του συνόλου Q .
2. Για $i = 1$ μέχρι N (δηλαδή για όλους τους τομείς) κάνε τα εξής
 - (α') Για $j = 1$ μέχρι M (δηλαδή για όλες τις περιοχές) κάνε τα εξής
 - i. Υπολόγισε τον συντελεστή s_i της απεικόνισης w_i που απεικονίζει την περιοχή J_j στον τομέα I_i .
 - ii. Αν $|s_i| > 1$ τότε πήγαινε στην αρχή της επανάληψης (των j).
 - iii. Υπολόγισε τις υπόλοιπες παραμέτρους της απεικόνισης w_i χρησιμοποιώντας τους τύπους 4.24-4.27.
 - iv. Εφάρμοσε την απεικόνιση w_i στα σημεία του συνόλου των δεδομένων D που περιέχονται στην περιοχή j . Συμβολίζουμε το σύνολο που προκύπτει ως $w((J_i \times \mathbb{R}) \cap D) = w(\hat{D}_j)$.
 - v. Υπολόγισε την απόσταση μεταξύ του $w(\hat{D}_j)$ και του $D_i = I_i \cap D$. Ονομάζουμε αυτή την απόσταση h_j .
 - (β') Βρες τον αριθμό j , για τον οποίο η απόσταση h_j είναι ελάχιστη.
 - (γ') Αποθήκευσε τον αριθμό j (τον οποίο θα ονομάζουμε διεύθυνση του τομέα i) και τον αντίστοιχο συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας.

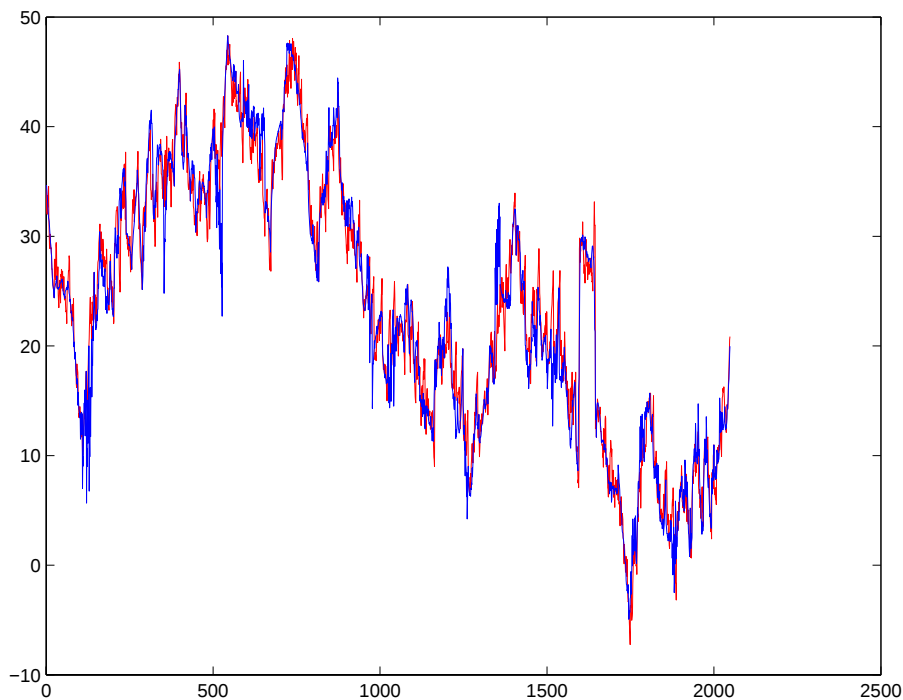
Και πάλι πρέπει να τονισθεί ότι, η προσέγγιση των δεδομένων από τον ελκυστή του ΠΣΕΣ που παράγεται από τον παραπάνω αλγόριθμο εξασφαλίζεται από το θεώρημα συγκόλλησης. Τα σχόλια που έγιναν στον αλγόριθμο 5.1 ισχύουν και στον παραπάνω αλγόριθμο. Και στις δύο μεθόδους μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε από τους δύο τρόπους υπολογισμού των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας. Και οι δύο τρόποι δίνουν αποτελέσματα παρόμοιας ποιότητας.

5.4 Εφαρμογές

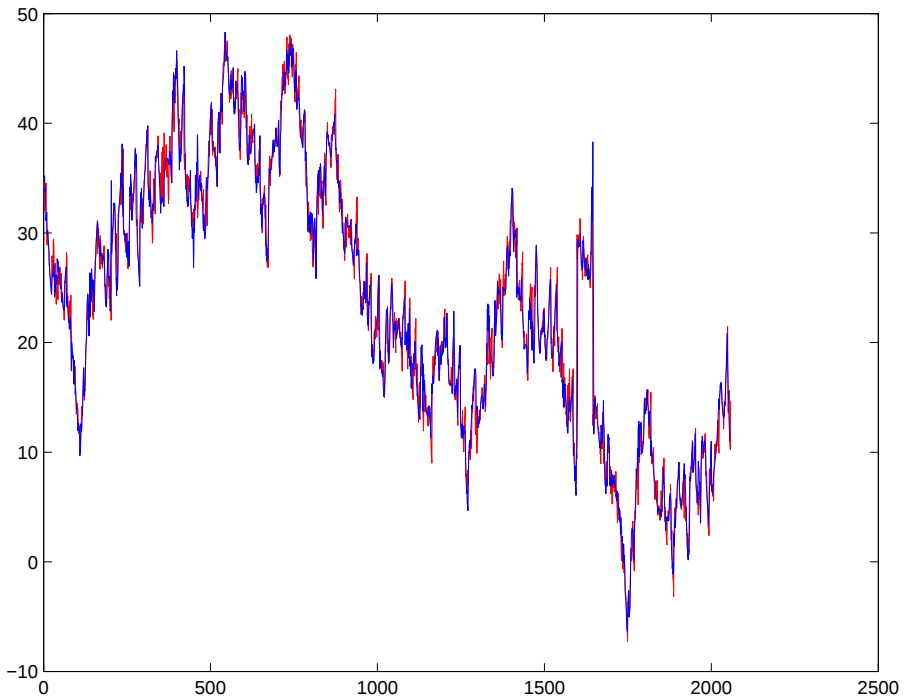
Οι δύο μέθοδοι που αναπτύχθηκαν παραπάνω μπορούν να εφαρμοστούν στη συμπίεση μονοδιάστατων σημάτων. Αντί να αποθηκεύσουμε ολόκληρο το σύνολο των δεδομένων, μπορούμε να αποθηκεύσουμε μόνο τις παραμέτρους του ΣΕΣ ή του ΠΣΕΣ που κατασκευάζονται, μειώνοντας σημαντικά την ποσότητα μνήμης που απαιτείται. Πιο συγκεκριμένα, για την πρώτη μέθοδο χρειάζεται να αποθηκεύσουμε μόνο τα σημεία παρεμβολής (ζεύγη αριθμών) και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας,



ενώ για τη δεύτερη μέθοδο, χρειάζεται η αποθήκευση των τεταγμένων των σημείων παρεμβολής, των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας και των διευθύνσεων όλων των τομέων (ακέραιοι αριθμοί). Σημειώνουμε ότι για τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας μπορεί να εφαρμοστεί ομοιόμορφη κβάντιση. Πειράματα των Mazel, Hayes έδειξαν ότι η χρήση περισσότερων από 6 bit για την κβάντιση των συντελεστών δεν αυξάνει την ποιότητα του ανακατασκευασμένου σήματος. Γι αυτό το λόγο στις περισσότερες εφαρμογές χρησιμοποιούνται 6 ή 8 bits. Ο κώδικας σε Matlab για το δεύτερο μοντέλο δίνεται στο παράρτημα Α (πρόγραμμα Α'.8). Χρησιμοποιείται η γεωμετρική μέθοδος για τον υπολογισμό των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας. Ο αλγόριθμος εφαρμόστηκε σε ένα σύνολο βιολογικών δεδομένων δίνοντας τα αποτελέσματα που φαίνονται στα σχήματα 5.2 και 5.3.



Σχήμα 5.2: Τα αρχικά δεδομένα αναπαριστώνται με κόκκινο χρώμα (2048 σημεία). Χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος 5.2 με $\delta = 8$ και $\psi = 16$, πετυχαίνοντας συμπίεση των αρχικών δεδομένων κατά 4 φορές. Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που προκύπτει.



Σχήμα 5.3: Τα αρχικά δεδομένα αναπαριστώνται με κόκκινο χρώμα (2048 σημεία) . Χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος 5.2 με $\delta = 4$ και $\psi = 8$, πετυχαίνοντας συμπίεση των αρχικών δεδομένων κατά 2 φορές. Με μπλε χρώμα αναπαρίσταται ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που προκύπτει.

Κεφάλαιο 6

Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής

Αν θέλεις να γίνεις αληθινός επιστήμονας,
να σκέφτεσαι τουλάχιστον μισή ώρα την ημέρα
με τρόπο αντίθετο από εκείνον των συναδέλφων σου.

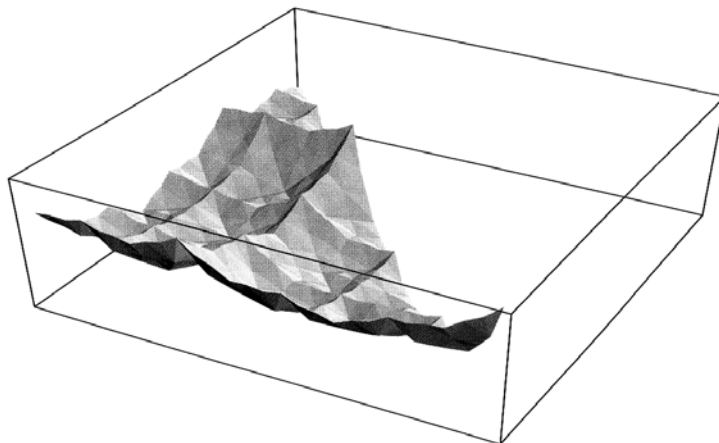
Albert Einstein

Στο κεφάλαιο 4 περιγράφηκαν αναλυτικά μέθοδοι κατασκευής Fractal Συναρτήσεων Παρεμβολής. Χρησιμοποιήθηκαν affine απεικονίσεις (συστολές) που ικανοποιούσαν τις συνθήκες 4.2-4.3 και αποδείχθηκε ότι ο ελκυστής του ΣΕΣ που προέκυψε είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης που παρεμβάλλεται στα δεδομένα. Με όμοιο τρόπο θα μπορούσαν να κατασκευαστούν FΣΠ από μη affine συστολές που ικανοποιούν τις συνθήκες 4.2-4.3. Θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι η κατασκευή Fractal Επιφανειών Παρεμβολής (FEΠ) αποτελεί απλή γενίκευση των παραπάνω. Όμως, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο αυτό, η κατασκευή FEΠ παρουσιάζει διάφορες δυσκολίες που δεν εμφανίζονται στις FΣΠ.

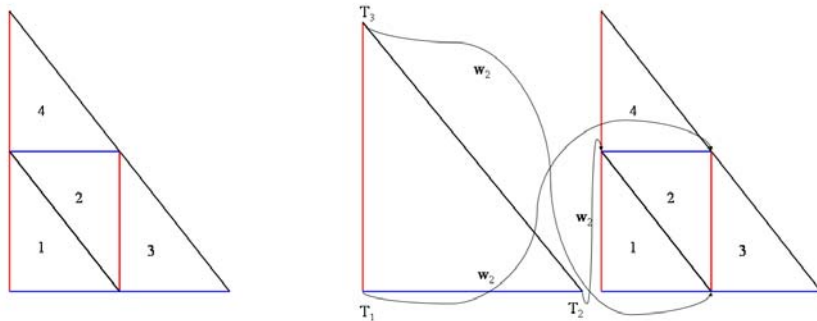
Ο πρώτος που κατασκεύασε fractal επιφάνειες παρεμβολής ήταν ο Peter Massopust ([Mas90], [Mas94]). Χρησιμοποίησε δεδομένα τα οποία είναι τοποθετημένα σε ένα τριγωνικό χωρίο και είναι συνευθειακά σε κάθε πλευρά του χωρίου αυτού, και affine απεικονίσεις ορισμένες στον $\mathbb{R}^3$ (σχήμα 6.1). Χωρίζοντας το χωρίο σε μικρότερα τριγωνικά χωρία (τομείς), η κατασκευή του Massopust απαιτεί κάθε απεικόνιση w να απεικονίζει τα τρία άκρα του μεγάλου χωρίου στα τρία άκρα κάποιου τομέα (όπως ακριβώς συνέβαινε και στην περίπτωση των FΣΠ σελ. 62). Για να προκύψει όμως συνεχής επιφάνεια πρέπει τα υπόλοιπα σημεία παρεμβολής, που βρίσκονται σε κάθε πλευρά του τριγωνικού χωρίου, να είναι συνευθειακά, έτσι ώστε οι επιφάνειες που προκύπτουν από δύο απεικονίσεις w που αντιστοιχούν σε γειτονικούς τομείς να “κολλάνε” μεταξύ τους.

Η κατασκευή αυτή, όμως, στερείται της προσαρμοστικότητας, που είναι απαραίτητη για να κατασκευαστούν πολύπλοκες επιφάνειες που θα προσεγγίζουν φυσικά πρότυπα. Γι αυτό το λόγο, οι Geronimo και Hardin ([GH93]) γενίκευσαν τη προηγούμενη κατασκευή ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν και μη συνευθειακά σημεία παρεμβολής. Ο Nailiang Zhao ([Zha96]) έδωσε μια ακόμη πιο γενική κατασκευή χρησιμοποιώντας affine αλλά και μη affine απεικονίσεις με αυθαίρετα επιλεγμένους συντελεστές συστολής σε τριγωνικά χωρία. Για να αποφύγει τη χρήση συνευθειακών σημείων παρεμβολής στα σύνορα του χωρίου, χρησιμοποίησε (όπως και οι Geronimo και Hardin) την έννοια της “Περιστροφικής Τριγωνοποίησης”¹. Έτσι το κοινό σύνορο δύο γειτονικών τριγωνικών τομέων

¹ Consistent Triangulation.



Σχήμα 6.1: Μια FEΠ σύμφωνα με την κατασκευή των Geronimo και Hardin.



Σχήμα 6.2: Περιστροφική Τριγωνοποίηση. Το αρχικό χωρίο διαιρέθηκε σε 4 τομείς. Στο σχήμα φαίνεται η λειτουργία της απεικόνισης w_2 .

αποτελεί την εικόνα του ίδιου συνόρου του μεγάλου χωρίου μέσω οποιασδήποτε από τις απεικονίσεις που αντιστοιχούν στους τομείς αυτούς (σχήμα 6.2).

Οι παραπάνω μέθοδοι απαιτούν να έχουμε τα δεδομένα στις κορυφές τριγώνων, γεγονός που



δημιουργεί προβλήματα στην κατασκευή επιφανειών παρεμβολής με χρήση H/Υ . Τα δεδομένα συνήθως μας δίδονται στις κορυφές τετραγωνικού πλέγματος. Όμως στην περίπτωση αυτή οι affine συναρτήσεις είναι τελείως ακατάλληλες. Ο λόγος της ακαταλληλότητάς τους είναι η ίδια η γεωμετρική συμπεριφορά του $\mathbb{R}^3$. Συγκεκριμένα: Δύο (διαφορετικά) σημεία του $\mathbb{R}^2$ ορίζουν μια ευθεία που περιγράφεται από μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax + b$. Τέσσερα σημεία του $\mathbb{R}^3$ δεν ορίζουν γενικά επίπεδο. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν τρίγωνα ώστε να χρησιμοποιηθούν τρία μόνον σημεία για τον προσδιορισμό επιπέδου μέσω affine συναρτήσεων. Έχοντας τα δεδομένα σε πλέγμα χρειάζονται άλλες απεικονίσεις όχι affine. Οι απεικονίσεις αυτές αποτελούν την “γενίκευση” των affine απεικονίσεων με την ακόλουθη ιδιότητα. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = ax + b$ μας δίνει την καμπύλη ελαχίστου μήκους που διέρχεται από δύο σημεία. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = ax + by + \gamma xy + \delta$ μας δίνει την επιφάνεια ελαχίστου εμβαδού που διέρχεται από τέσσερα σημεία (που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο).

Γι αυτό οι H. Xie και H. Sun ([XS97]) χρησιμοποίησαν bivariate απεικονίσεις (βλέπε σελ. 90) σε δεδομένα που είναι τοποθετημένα σε ορθογώνιο πλέγμα, με αυθαίρετους συντελεστές συστολής και χωρίς καμιά συνθήκη για τα συνοριακά δεδομένα. Η κατασκευή τους οδηγεί σε ελκυστές που δεν είναι γενικά γραφήματα συνεχών συναρτήσεων, όπως έδειξε η κα. Δάλλα στην εργασία [Dal02]. Επιπλέον, η Δάλλα απέδειξε ότι πρέπει να χρησιμοποιηθούν συννευθιακά συνοριακά σημεία, ώστε οι ελκυστές να είναι γραφήματα συνεχών συναρτήσεων. Τέλος, ο Robert Malysz (βλέπε [Mal]) έδωσε μια παρόμοια κατασκευή, χρησιμοποιώντας αυθαίρετα συνοριακά σημεία παρεμβολής, αλλά τους ίδιους συντελεστές συστολής για όλες τις απεικονίσεις w .

Όλες οι κατασκευές που αναφέρθηκαν οδηγούν σε αυτοόμοιους ελκυστές, δηλαδή σε επιφάνειες που οποιοδήποτε μικρό κομμάτι τους μοιάζει με όλη την επιφάνεια. Επιπλέον, οι περιορισμοί που απαιτούνται για τα δεδομένα τις καθιστούν δύσχρηστες. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια νέα μέθοδο κατασκευής fractal επιφανειών που χρησιμοποιεί ΠΣΕΣ. Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά πιο ευέλικτη από όσες προαναφέρθηκαν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση οποιασδήποτε φυσικής ή τεχνητής επιφάνειας. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο ;; η κατασκευή αυτή θα χρησιμοποιηθεί στη συμπίεση εικόνων.

6.1 Κατασκευή Bivariate FEΠ σε Ορθογώνιο Πλέγμα με Χρήση ΠΣΕΣ

Έστω ότι

$$\Delta = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$$

είναι ένα σύνολο $(N+1) \cdot (M+1)$ σημείων παρεμβολής του $X = [0, 1] \times [0, p] \times \mathbb{R}$, τέτοιων ώστε $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ και $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = p$. Επιπλέον, έστω ότι

$$Q = \{(\hat{x}_k, \hat{y}_l, \hat{z}_{kl}) : k = 0, 1, \dots, K; l = 0, 1, \dots, L\}$$

είναι ένα υποσύνολο του Δ ($Q \subset \Delta$) αποτελούμενο από $(K+1) \cdot (L+1)$ σημεία, τέτοια ώστε $0 = \hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_K = 1$ και $0 = \hat{y}_0 < \hat{y}_1 < \dots < \hat{y}_L = p$. Τα σημεία παρεμβολής χωρίζουν το $[0, 1] \times [0, p]$ σε $N \cdot M$ τετράγωνα $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, 1, \dots, M$, τα οποία καλούμε **τομείς**, ενώ τα σημεία του Q χωρίζουν το $[0, 1] \times [0, p]$ σε $K \cdot L$ τετράγωνα $J_{kl} = [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k] \times [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l]$, $k = 0, 1, \dots, K$; $l = 0, 1, \dots, L$, τα οποία καλούμε **περιοχές**. Σημειώνουμε, επίσης, ότι τα σημεία του Q επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε περιοχή J_{kl} να περιέχει περισσότερους από έναν τομείς.

Επίσης, θεωρούμε μια απεικόνιση

$$\mathbb{J} : \{1, 2, \dots, N\} \times \{1, 2, \dots, M\} \rightarrow \{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, L\}$$



με $\mathbb{J}(i, j) = (\mathbb{K}(i, j), \mathbb{L}(i, j)) = (k, l)$ και συστολές w_{ij} τέτοιες ώστε

$$w_{ij} \begin{pmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{y}_{l-1} \\ \hat{z}_{k-1, l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{j-1} \\ z_{i-1, j-1} \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

$$w_{ij} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_{l-1} \\ \hat{z}_{k, l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_{j-1} \\ z_{i, j-1} \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

$$w_{ij} \begin{pmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{y}_l \\ \hat{z}_{k-1, l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_j \\ z_{i-1, j} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

$$w_{ij} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_l \\ \hat{z}_{k, l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \\ z_{i, j} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

για $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, 1, \dots, M$. Οι συστολές w_{ij} απεικονίζουν τις κορυφές της περιοχής J_{kl} στις κορυφές του τομέα I_{ij} . Τέλος, ορίζουμε και μια 1-1 απεικόνιση

$$\Phi : \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} \rightarrow \{1, \dots, N \cdot M\}$$

(δηλαδή μια αρίθμηση των στοιχείων του συνόλου $\{(i, j) : i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M\}$).

Ένα ΠΣΕΣ, που συνδέεται με τα δεδομένα του συνόλου Δ , αποτελείται από το ΣΕΣ $\{X; w_{i,j}, i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$ (ή πιο σύντομα $\{X; w_{1-N, 1-M}\}$) μαζί με ένα πίνακα πιθανοτήτων $(p_{nm})^{N \cdot M}$ τέτοιον ώστε

$$\sum_{n=1}^{N \cdot M} p_{mn} = 1, \quad m = 1, \dots, N \cdot M. \quad (6.5)$$

Ο αντίστοιχος πίνακας σύνδεσης $C = (c_{nm})^{N \cdot M}$ ορίζεται ως εξής

$$c_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{if } p_{mn} > 0 \\ 0, & \text{if } p_{mn} = 0, \end{cases}$$

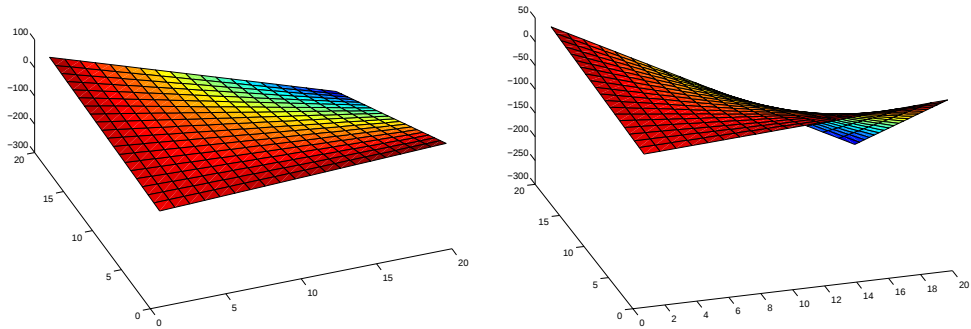
όπου $n, m = 1, 2, \dots, N \cdot M$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο κεφάλαιο 4 ο αριθμός p_{nm} εκφράζει την πιθανότητα μεταπήδησης της αλυσίδας Markov από την κατάσταση n στην κατάσταση m .

Ένα υπερβολικό ΠΣΕΣ έχει πάντα ένα μοναδικό ελκυστή, ο οποίος δεν είναι, εν γένει, το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης (δηλαδή μια συνεχής επιφάνεια), αλλά απλώς ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Εδώ θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση όπου οι w_{ij} είναι απεικονίσεις της μορφής

$$w_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij}x + b_{ij} \\ c_{ij}y + d_{ij} \\ e_{ij}x + f_{ij}y + g_{ij}xy + s_{ij}z + k_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{ij}(x) \\ \psi_{ij}(y) \\ F_{ij}(x, y, z) \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Απεικονίσεις αυτής της μορφής ονομάζονται **bivariate απεικονίσεις** και έχουν ορισμένες βασικές ιδιότητες.

1. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στον άξονα των z μεταφέρεται σε ένα νέο ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στον άξονα των z , το οποίο έχει μήκος ίσο με το γινόμενο του μήκους του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος και του συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας.
2. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο επίπεδο xz ή στο yz μεταφέρεται σε ένα νέο ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο επίπεδο xz ή στο yz αντίστοιχα.



Σχήμα 6.3: Μια “bivariate” επιφάνεια της μορφής $z(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma xy + \epsilon$. Η επιφάνεια εμφανίζεται υπό δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες.

3. Κάθε παραλληλόγραμμο παράλληλο στο επίπεδο xz ή στο yz μεταφέρεται σε ένα νέο παραλληλόγραμμο παράλληλο στο επίπεδο xz ή στο yz αντίστοιχα.

Και η κυριότερη:

4. Το γράφημα μιας συνάρτησης της μορφής $z(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma xy + \epsilon$ (σχήμα 6.3) παραμένει “αναλλοίωτο” με την εφαρμογή μιας bivariate απεικόνισης. Συγκεκριμένα, έστω $G = \{(x, y, z) : (x, y) \in [0, 1] \times [0, p], z(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma xy + \epsilon\}$ και w απεικόνιση της μορφής 6.6. Τότε το $w(G)$ είναι το γράφημα μιας άλλης συνάρτησης της μορφής $z(x, y) = \alpha'x + \beta'y + \gamma'xy + \epsilon'$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση T_{ij} ως εξής

$$T_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij}x + b_{ij} \\ c_{ij}y + d_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{ij}(x) \\ \psi_{ij}(y) \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

έτσι ώστε

$$w_{ij} = \begin{pmatrix} T_{ij} \\ F_{ij} \end{pmatrix}.$$

Από τις εξισώσεις 6.1-6.4 προκύπτει το παρακάτω γραμμικό σύστημα 8 εξισώσεων

$$a_{ij}\hat{x}_{k-1} + b_{ij} = x_{i-1}, \quad (6.8)$$

$$a_{ij}\hat{x}_k + b_{ij} = x_i, \quad (6.9)$$

$$c_{ij}\hat{y}_{l-1} + d_{ij} = y_{j-1}, \quad (6.10)$$

$$c_{ij}\hat{y}_l + d_{ij} = y_j, \quad (6.11)$$

$$e_{ij}\hat{x}_{k-1} + f_{ij}\hat{y}_{l-1} + g_{ij}\hat{x}_{k-1}\hat{y}_{l-1} + s_{ij}\hat{z}_{k-1,l-1} + k_{ij} = z_{i-1,j-1}, \quad (6.12)$$

$$e_{ij}\hat{x}_k + f_{ij}\hat{y}_{l-1} + g_{ij}\hat{x}_k\hat{y}_{l-1} + s_{ij}\hat{z}_{k,l-1} + k_{ij} = z_{i,j-1}, \quad (6.13)$$

$$e_{ij}\hat{x}_{k-1} + f_{ij}\hat{y}_l + g_{ij}\hat{x}_{k-1}\hat{y}_l + s_{ij}\hat{z}_{k-1,l} + k_{ij} = z_{i-1,j}, \quad (6.14)$$

$$e_{ij}\hat{x}_k + f_{ij}\hat{y}_l + g_{ij}\hat{x}_k\hat{y}_l + s_{ij}\hat{z}_{k,l} + k_{ij} = z_{i,j}, \quad (6.15)$$



το οποίο μπορεί πάντα να επιλυθεί ως προς a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , g_{ij} , e_{ij} , f_{ij} , k_{ij} , σε σχέση με τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές s_{ij} , που θεωρούνται ως ελεύθεροι παράμετροι. Πράγματι, από τις εξισώσεις 6.8 και 6.9 υπολογίζονται οι συντελεστές a_{ij} και b_{ij} ενώ από τις 6.10 και 6.11 υπολογίζονται οι συντελεστές c_{ij} και d_{ij} . Επίσης, αφαιρώντας τις 6.12, 6.13 και τις 6.14, 6.15 προκύπτουν οι εξισώσεις

$$e_{ij}(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) + g_{ij}\hat{y}_{l-1}(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) + s_{ij}(\hat{z}_{k,l-1} - \hat{z}_{k-1,l-1}) = z_{i,j-1} - z_{i-1,j-1}, \quad (6.16)$$

$$e_{ij}(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) + g_{ij}\hat{y}_l(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) + s_{ij}(\hat{z}_{k,l} - \hat{z}_{k-1,l}) = z_{i,j} - z_{i-1,j}, \quad (6.17)$$

από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τα g_{ij} , e_{ij} . Ομοίως αφαιρώντας τις 6.12, 6.14 και 6.13, 6.15 προκύπτουν οι

$$f_{ij}(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}) + g_{ij}\hat{x}_{k-1}(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}) + s_{ij}(\hat{z}_{k-1,l} - \hat{z}_{k-1,l-1}) = z_{i-1,j} - z_{i-1,j-1}, \quad (6.18)$$

$$f_{ij}(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}) + g_{ij}\hat{x}_k(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}) + s_{ij}(\hat{z}_{k,l} - \hat{z}_{k,l-1}) = z_{i,j} - z_{i,j-1}, \quad (6.19)$$

από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε το f_{ij} . Έτσι, η λύση του συστήματος είναι

$$a_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}} \quad (6.20)$$

$$b_{ij} = \frac{\hat{x}_k x_{i-1} - \hat{x}_{k-1} x_i}{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}} \quad (6.21)$$

$$c_{ij} = \frac{y_j - y_{j-1}}{\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}} \quad (6.22)$$

$$d_{ij} = \frac{\hat{y}_l y_{j-1} - \hat{y}_{l-1} y_j}{\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}} \quad (6.23)$$

$$g_{ij} = \frac{z_{ij} + z_{i-1,j-1} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1} - s_{ij}(\hat{z}_{kl} + \hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k-1,l} - \hat{z}_{k,l-1})}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} \quad (6.24)$$

$$e_{ij} = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - s_{ij}(\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-1}) - g_{ij}\hat{y}_{l-1}(\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k)}{\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k} \quad (6.25)$$

$$f_{ij} = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - s_{ij}(\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k-1,l}) - g_{ij}\hat{x}_{k-1}(\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l)}{\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l} \quad (6.26)$$

$$k_{ij} = z_{ij} - e_{ij}\hat{x}_k - f_{ij}\hat{y}_l - s_{ij}\hat{z}_{kl} - g_{ij}\hat{x}_k\hat{y}_l. \quad (6.27)$$

Παρατηρούμε ότι $0 < a_{ij}, c_{ij} < 1$, για $i = 1, 2, \dots, N$ και $j = 1, 2, \dots, M$. Πώς μπορεί κάποιος να εξασφαλίσει ότι ένα ΠΣΕΣ που αποτελείται από bivariate απεικονίσεις είναι υπερβολικό; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνει η παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1

Θεωρούμε ένα ΠΣΕΣ, όπως αυτό που ορίσαμε παραπάνω, που να συνδέεται με τα δεδομένα του συνόλου Δ . Αν για τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας ισχύει ότι

$$0 < |s_{ij}| < 1, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

τότε υπάρχει μια μετρική ορισμένη στον χώρο $[0, 1] \times [0, p] \times \mathbb{R}$, η οποία είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια μετρική, τέτοια ώστε το ΠΣΕΣ να είναι υπερβολικό.

Απόδειξη.

Έστω (x, y, z) , (x', y', z') δύο σημεία του $[0, 1] \times [0, p] \times \mathbb{R}$. Θα χρησιμοποιήσουμε μια μετρική της μορφής

$$\rho((x, y, z), (x', y', z')) = |x - x'| + |y - y'| + \theta|z - z'|, \quad \theta > 0$$



η οποία είναι ισοδύναμη με την ευκλείδεια μετρική για κάθε τιμή της παραμέτρου θ . Βέβαια, θα πρέπει να βρούμε μια κατάλληλη τιμή για το θ ώστε κάθε μια από τις απεικονίσεις w_{ij} να είναι συστολή, δηλαδή

$$\rho \left(w_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, w_{ij} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) \leq D \cdot \rho \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right)$$

με $D < 1$ για $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$.

Παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} \rho \left(w_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, w_{ij} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) &= |a_{ij}(x - x')| + |c_{ij}(y - y')| + \\ &\quad \theta |e_{ij}(x - x') + f_{ij}(y - y') + g_{ij}(xy - x'y') + s_{ij}(z - z')| \\ &\leq |a_{ij}| |x - x'| + |c_{ij}| |y - y'| + \theta |f_{ij}| |y - y'| + \theta |g_{ij}| |xy - x'y'| \\ &\quad + \theta |s_{ij}| |z - z'| \\ &= (|a_{ij}| + \theta |e_{ij}|) |x - x'| + (|c_{ij}| + \theta |f_{ij}|) |y - y'| + \theta |s_{ij}| |z - z'| + \\ &\quad \theta |g_{ij}| |xy - x'y'| \\ &= (|a_{ij}| + \theta |e_{ij}|) |x - x'| + (|c_{ij}| + \theta |f_{ij}|) |y - y'| + \theta |s_{ij}| |z - z'| + \\ &\quad \theta |g_{ij}| |x(y - y') + y'(x - x')| \\ &\leq (|a_{ij}| + \theta |e_{ij}|) |x - x'| + (|c_{ij}| + \theta |f_{ij}|) |y - y'| + \theta |s_{ij}| |z - z'| + \\ &\quad \theta |g_{ij}| |x| |y - y'| + \theta |g_{ij}| |y'| |x - x'| \\ &\leq (|a_{ij}| + \theta |e_{ij}|) |x - x'| + (|c_{ij}| + \theta |f_{ij}|) |y - y'| + \theta |s_{ij}| |z - z'| + \\ &\quad \theta |g_{ij}| |y - y'| + \theta |g_{ij}| p |x - x'| \\ &= (|a_{ij}| + \theta |e_{ij}| + \theta p |g_{ij}|) |x - x'| + (|c_{ij}| + \theta |f_{ij}| + \theta |g_{ij}|) |y - y'| + \\ &\quad \theta |s_{ij}| |z - z'|. \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\tag{6.29}$$

Για να είναι η w_{ij} συστολή ως προς τη μετρική ρ πρέπει να ισχύουν

$$\begin{aligned} |a_{ij}| + \theta |e_{ij}| + \theta p |g_{ij}| &< 1, \\ |c_{ij}| + \theta |f_{ij}| + \theta |g_{ij}| &< 1. \end{aligned}$$

Άρα θα πρέπει

$$\theta < \frac{1 - |a_{ij}|}{|e_{ij}| + p |g_{ij}|} \text{ και } \theta < \frac{1 - |c_{ij}|}{|f_{ij}| + |g_{ij}|},$$

για $|e_{ij}| + p |g_{ij}| \neq 0$, $|f_{ij}| + |g_{ij}| \neq 0$ και τυχαίο θ διαφορετικά.

Επομένως για να είναι όλες οι απεικονίσεις w_{ij} συστολές, μπορούμε να επιλέξουμε το θ ως εξής:

$$\theta = \min \left\{ \frac{\min_{i,j} \{1 - |a_{ij}|\}}{\max_{i,j} \{2(|e_{ij}| + p |g_{ij}|)\}}, \frac{\min_{i,j} \{1 - |c_{ij}|\}}{\max_{i,j} \{2(|f_{ij}| + |g_{ij}|)\}} \right\},$$

στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον από τους παρονομαστές είναι μη μηδενικός. Διαφορετικά



επιλέγουμε ένα τυχαίο θ . Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} \rho \left(w_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, w_{ij} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) &\leq (a_{ij} + \theta(|e_{ij}| + p|g_{ij}|))|x - x'| + (c_{ij} + \theta(|f_{ij}| + |g_{ij}|))|y - y'| + \\ &\quad \theta|s_{ij}||z - z'| \\ &\leq \left(a_{ij} + \frac{1 - a_{ij}}{2(|e_{ij}| + p|g_{ij}|)}(|e_{ij}| + p|g_{ij}|) \right)|x - x'| + \\ &\quad \left(c_{ij} + \frac{1 - c_{ij}}{2(|f_{ij}| + |g_{ij}|)}(|f_{ij}| + |g_{ij}|) \right)|y - y'| + \theta|s_{ij}||z - z'| \\ &= \frac{1 + a_{ij}}{2}|x - x'| + \frac{1 + c_{ij}}{2}|y - y'| + \theta|s_{ij}||z - z'|, \end{aligned}$$

για $i = 1, 2, \dots, N$ και $j = 1, 2, \dots, M$. Οπότε θέτοντας

$$A = \max_{i,j} \left\{ \frac{1 + a_{ij}}{2} \right\} < 1, \quad B = \max_{i,j} \left\{ \frac{1 + c_{ij}}{2} \right\} < 1, \quad C = \max_{i,j} \{|s_{ij}|\} < 1$$

και

$$D = \max\{A, B, C\} < 1$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} \rho \left(w_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, w_{ij} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) &\leq A|x - x'| + B|y - y'| + \theta C|z - z'| \\ &\leq \max\{A, B, C\}(|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|) \\ &= D \cdot \rho \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

για $i = 1, 2, \dots, N$ και $j = 1, 2, \dots, M$. Άρα το ΠΣΕΣ είναι υπερβολικό με συντελεστή συστολής D , ως προς τη μετρική ρ . $\square$

Όπως ήδη αναφέρθηκε, έχει αποδειχθεί (βλέπε σελ. 45) ότι υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο (ελκυστής) $G \subset [0, 1] \times [0, p] \times \mathbb{R}$ του υπερβολικού ΠΣΕΣ. Παρακάτω θα δώσουμε συνθήκες που θα εξασφαλίζουν ότι το G είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης που παρεμβάλλεται στα δεδομένα (δηλαδή μια επιφάνεια). Σε αυτή την περίπτωση, ο ελκυστής G θα λέγεται **Bivariate Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής (ΠΒΦΕΠ)**. Περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση όπου οι τομείς είναι τετράγωνα πλευράς $\delta = 1/N$ και οι περιοχές τετράγωνα πλευράς $\psi = 1/K$ (οπότε $M = pN$ και $L = pK$) και ο αριθμός

$$a = \frac{\psi}{\delta} = \frac{N}{K}$$

είναι ακέραιος. Σημειώνουμε ότι ο αριθμός a^2 εκφράζει το πλήθος τομέων που περιέχει κάθε περιοχή. Σε κάθε τομέα αντιστοιχούμε ένα μοναδικό ακέραιο αριθμό, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $\Phi(i, j) = (i - 1)M + j$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$. Η αντίστροφη απεικόνιση θα είναι $\eta \Phi^{-1}(n) = ((n - 1) \operatorname{div} M + 1, (n - 1) \bmod M + 1)$, για $n = 1, 2, \dots, NM$ και ο $NM \times NM$ πίνακας πιθανοτήτων θα είναι

$$p_{n,m} = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & \text{Αν } I_{\Phi^{-1}(n)} \subset J_{\mathbb{J}(\Phi^{-1}(m))} \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$



για $n, m = 1, 2, \dots, NM$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο p_{nm} είναι θετικό αν και μόνο αν υπάρχει μια απεικόνιση T_{ij} , η οποία απεικονίζει την περιοχή που περιέχει τον n -οστό τομέα στον m -οστό τομέα. Θυμίζουμε ότι, αν πάρουμε ένα σημείο του συνόλου $I_{ij} \times \mathbb{R}$ με $n = \Phi(i, j)$, λέμε ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση n . Το στοιχείο p_{nm} του πίνακα πιθανοτήτων δείχνει την πιθανότητα εφαρμογής της απεικόνισης $w_{\Phi^{-1}(m)}$ σε αυτό το σημείο ώστε το σύστημα να μεταβεί στην κατάσταση m . Με όμοιο τρόπο, σε κάθε περιοχή αντιστοιχούμε ένα μοναδικό ακέραιο αριθμό, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $\hat{\Phi}(k, l) = (k-1)K + l$, $k = 1, 2, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L$. Επιπλέον ορίζουμε και τον $1 \times NM$ πίνακα C^v (διάνυσμα συνδέσεων) ως εξής:

$$c_n^v = \hat{\Phi}(\mathbb{J}(\Phi^{-1}(n))).$$

Το επόμενο θεώρημα περιγράφει τις πιο απλές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα σημεία παρεμβολής, ώστε ο ελκυστής που θα προκύψει να είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, τα σημεία παρεμβολής που βρίσκονται στις τέσσερις πλευρές κάθε περιοχής πρέπει να είναι συνευθειακά. Σε αυτή την περίπτωση, οποιαδήποτε επιλογή των συντελεστών s_{ij} θα οδηγήσει σε ένα ΠΣΕΣ που θα έχει ως ελκυστή μια συνεχή επιφάνεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1

Θεωρούμε ένα υπερβολικό ΠΣΕΣ που να συνδέεται με τα δεδομένα του συνόλου Δ , όπως αυτό που ορίσαμε παραπάνω. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι τα σημεία του Δ είναι τέτοια ώστε κάθε ένα από τα σύνολα

$$\begin{aligned} &\{(x_{(k-1)a}, y_{(l-1)a+\nu}, z_{(k-1)a}, (l-1)a+\nu), \nu = 1, \dots, a-1\} \\ &\{(x_{ka}, y_{(l-1)a+\nu}, z_{ka}, (l-1)a+\nu), \nu = 1, \dots, a-1\} \\ &\{(x_{(k-1)a+\nu}, y_{(l-1)a}, z_{(k-1)a+\nu}, (l-1)a), \nu = 1, \dots, a-1\} \\ &\{(x_{(k-1)a+\nu}, y_{la}, z_{(k-1)a+\nu}, la), \nu = 1, \dots, a-1\} \end{aligned}$$

για $k = 1, 2, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L$, να αποτελείται από συνευθειακά σημεία. Τότε υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \times [0, p] \rightarrow \mathbb{R}$ που παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ και το γράφημά της $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in [0, 1] \times [0, p]\}$ ταυτίζεται με τον ελκυστή του ΠΣΕΣ.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{F}$ των συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο $[0, 1] \times [0, p]$ με την ιδιότητα τα σύνολα

$$\begin{aligned} &\{(\hat{x}_k, y, f(x, y)) : y \in [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l]\}, k = 0, 1, \dots, K, l = 1, 2, \dots, L, \\ &\{(x, \hat{y}_l, f(x, y)) : x \in [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k]\}, k = 1, 2, \dots, K, l = 0, 1, \dots, L, \end{aligned}$$

όπου $\hat{x}_k = x_{ka}$ και $\hat{y}_l = y_{la}$, να είναι ευθύγραμμα τμήματα και $f(\hat{x}_k, \hat{y}_l) = \hat{z}_{kl}$ για $k = 0, 1, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L$. Το σύνολο $\mathcal{F}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του διανυσματικού χώρου των συνεχών συναρτήσεων $C([0, 1] \times [0, p]) = \{g : g : [0, 1] \times [0, p] \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ συνεχής}\}$ εφοδιασμένου με την μετρική ρ_∞ ($\rho_\infty(g_1, g_2) = \sup_x \{|g_1(x) - g_2(x)|\}$). Αυτό σημαίνει ότι ο $\mathcal{F}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Ορίζουμε τον τελεστή **Read-Bajraktarevic** $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ως εξής

$$Tf(x, y) = e_{ij}\phi_{ij}^{-1}(x) + f_{ij}\psi_{ij}^{-1}(y) + g_{ij}\phi_{ij}^{-1}(x)\psi_{ij}^{-1}(y) + s_{ij}f(\phi_{ij}^{-1}(x), \psi_{ij}^{-1}(y)) + k_{ij},$$

για $(x, y) \in I_{ij}$, $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$. Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι καλά ορισμένος. Αυτό ισχύει προφανώς για κάθε $(x, y) \in I_{ij}^0$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, N$. Θα πρέπει να το αποδείξουμε και στην περίπτωση που $(x, y) \in \partial I_{ij}$. Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει ένα από τα παρακάτω.



1. $(x, y) \in I_{i,j} \cup I_{i+1,j}$,
2. $(x, y) \in I_{i,j} \cup I_{i-1,j}$,
3. $(x, y) \in I_{i,j} \cup I_{i,j+1}$,
4. $(x, y) \in I_{i,j} \cup I_{i,j-1}$.

Θα περιοριστούμε στην πρώτη περίπτωση (οι υπόλοιπες αποδεικνύονται ανάλογα). Επειδή $x = x_i$ και $y \in [y_{j-1}, y_j]$, το (x, y) μπορεί να θεωρηθεί και ως σημείο του $I_{i,j}$ και ως σημείο του $I_{i+1,j}$. Για να είναι η T καλά ορισμένη, θα πρέπει το $T(x, y)$ να δίνει την ίδια τιμή είτε θεωρήσουμε το (x, y) ως σημείο του $I_{i,j}$, είτε ως σημείο του $I_{i+1,j}$ (βλέπε σχήμα 6.4). Στην πρώτη περίπτωση θα ισχύει ότι $\phi_{ij}^{-1}(x) = \hat{x}_{\mathbb{K}(i,j)}$ και $\psi_{ij}^{-1}(y) \in [\hat{y}_{\mathbb{L}(i,j)-1}, \hat{y}_{\mathbb{L}(i,j)}]$. Το σημείο $(\phi_{ij}^{-1}(x), \psi_{ij}^{-1}(y), f(\phi_{ij}^{-1}(x), \psi_{ij}^{-1}(y)))$ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα σημεία $(\hat{x}_{\mathbb{K}(i,j)}, \hat{y}_{\mathbb{L}(i,j)-1}, \hat{z}_{\mathbb{K}(i,j), \mathbb{L}(i,j)-1})$ και $(\hat{x}_{\mathbb{K}(i,j)}, \hat{y}_{\mathbb{L}(i,j)}, \hat{z}_{\mathbb{K}(i,j), \mathbb{L}(i,j)})$ (αφού $f \in \mathcal{F}$). Επομένως, το σημείο $(x, y, Tf(x, y))$ θα ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα σημεία $(x_i, y_{j-1}, z_{i,j-1})$ και $(x_i, y_j, z_{i,j})$.

Θεωρώντας το (x, y) ως σημείο του $I_{i+1,j}$ θα ισχύει $\phi_{i+1,j}^{-1}(x) = \hat{x}_{\mathbb{K}(i+1,j)-1}$ και $\psi_{i+1,j}^{-1}(y) \in [\hat{y}_{\mathbb{L}(i+1,j)-1}, \hat{y}_{\mathbb{L}(i+1,j)}]$. Το σημείο $(\phi_{i+1,j}^{-1}(x), \psi_{i+1,j}^{-1}(y), f(\phi_{i+1,j}^{-1}(x), \psi_{i+1,j}^{-1}(y)))$ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα σημεία

$$(\hat{x}_{\mathbb{K}(i+1,j)-1}, \hat{y}_{\mathbb{L}(i+1,j)-1}, \hat{z}_{\mathbb{K}(i+1,j), \mathbb{L}(i+1,j)-1})$$

$$\text{και } (\hat{x}_{\mathbb{K}(i+1,j)-1}, \hat{y}_{\mathbb{L}(i+1,j)}, \hat{z}_{\mathbb{K}(i+1,j), \mathbb{L}(i+1,j)})$$

(αφού $f \in \mathcal{F}$). Επομένως, το $(x, y, Tf(x, y))$ ανήκει και πάλι στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν τα σημεία $(x_i, y_{j-1}, z_{i,j-1})$ και $(x_i, y_j, z_{i,j})$. Άρα η Tf είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, δείξαμε ότι τα σύνολα $\{(x, y, Tf(x, y)) : x = x_i, y \in [y_{j-1}, y_j]\}$, για $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$ και $\{(x, y, Tf(x, y)) : y = y_j, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, για $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, M$ είναι ευθύγραμμα τμήματα. Αυτό σημαίνει ότι και τα σύνολα

$$\{(\hat{x}_k, y, Tf(\hat{x}_k, y)) : y \in [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l]\}, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\{(x, \hat{y}_l, Tf(x, \hat{y}_l)) : x \in [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k]\}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad l = 0, 1, \dots, L$$

θα είναι ευθύγραμμα τμήματα, αφού το ίδιο συμβαίνει για τα

$$\{(x_{(k-1)a}, y_{(l-1)a+\nu}, z_{(k-1)a, (l-1)a+\nu}), \quad \nu = 1, \dots, a-1\},$$

$$\{(x_{ka}, y_{(l-1)a+\nu}, z_{ka, (l-1)a+\nu}), \quad \nu = 1, \dots, a-1\},$$

$$\{(x_{(k-1)a+\nu}, y_{(l-1)a}, z_{(k-1)a+\nu, (l-1)a}), \quad \nu = 1, \dots, a-1\},$$

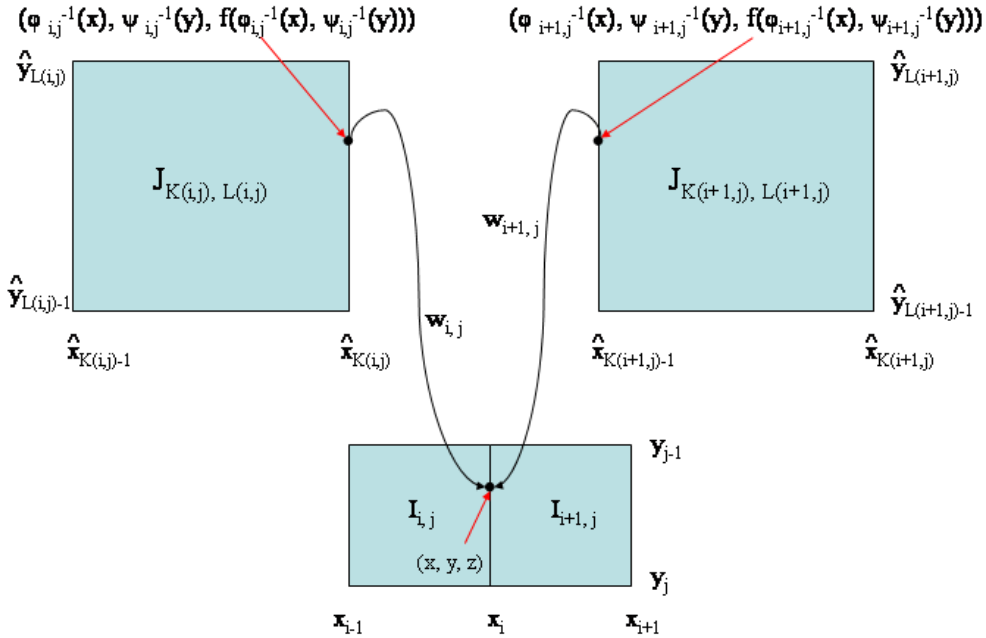
$$\{(x_{(k-1)a+\nu}, y_{la}, z_{(k-1)a+\nu, la}), \quad \nu = 1, \dots, a-1\},$$

από την υπόθεσή μας (ευθύγραμμα τμήματα με συνευθειακά άκρα ανήκουν στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα). Άρα $Tf \in \mathcal{F}$. Επίσης, εύκολα βλέπουμε κανείς ότι η T είναι συστολή στον $\mathcal{F}$ ως προς την μετρική ρ_∞ με συντελεστή συστολής $s = \max_{i,j} \{|s_{i,j}|\}$. Άρα από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach προκύπτει ότι υπάρχει $f \in \mathcal{F}$ με $Tf = f$. Η συνάρτηση αυτή θα είναι πολυγωνική για $x = x_i$, $i = 0, 1, \dots, N$ και για $y = y_j$, $j = 0, 1, \dots, M$. Αν θεωρήσουμε ως G το γράφημα της f εύκολα βλέπουμε ότι

$$G = \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j=1}^M w_{i,j}(G),$$

άρα το G είναι ο ελκυστής του ΠΣΕΣ.

□



Σχήμα 6.4: Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται τα βασικά βήματα της απόδειξης του θεωρήματος 6.1.

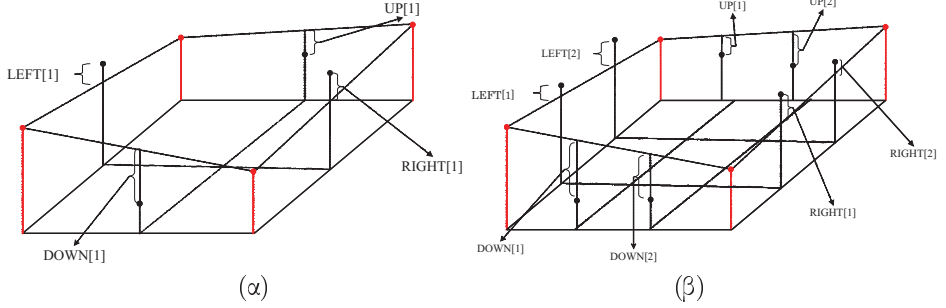
Είναι προφανές ότι οι συνθήκες που δίνει το παραπάνω θεώρημα είναι αρκετά περιοριστικές. Είναι λογικό λοιπόν να αναρωτηθεί κανείς μήπως υπάρχουν συνθήκες που να εξασφαλίζουν τη δημιουργία μιας επιφάνειας, στην περίπτωση που τα σημεία παρεμβολής στις πλευρές των περιοχών είναι μη συνευθειακά. Πράγματι, αν κάποιος επιλέξει σημεία παρεμβολής και συντελεστές s_{ij} με την ιδιότητα τα νέα σημεία που θα προκύπτουν σε κάθε επανάληψη του ΠΣΕΣ στις πλευρές γειτονικών τομέων να είναι ίδια, τότε ο ελκυστής του ΠΣΕΣ θα είναι μια επιφάνεια. Για να περιγράψουμε καλύτερα την παραπάνω ιδιότητα και να δώσουμε συνθήκες για τέτοιες κατασκευές χρειαζόμαστε τους παρακάτω ορισμούς. Για κάθε περιοχή J_{kl} , $k = 1, 2, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L$ ορίζουμε τις παρακάτω αποστάσεις:

$$L_{kl}[\nu], \quad \nu = 1, \dots, a-1,$$

είναι η κατακόρυφη απόσταση κάθε ενός σημείου παρεμβολής
 $\{(x_{(k-1)a}, y_{(l-1)a+\nu}, z_{(k-1)a}, (l-1)a+\nu), \quad \nu = 1, \dots, a-1\}$
από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία
 $(x_{(k-1)a}, y_{(l-1)a}, z_{(k-1)a}, (l-1)a)$ και $(x_{(k-1)a}, y_{la}, z_{(k-1)a}, la)$,

$$R_{kl}[\nu], \quad \nu = 1, \dots, a-1,$$

είναι η κατακόρυφη απόσταση κάθε ενός σημείου παρεμβολής
 $\{(x_{ka}, y_{(l-1)a+\nu}, z_{ka}, (l-1)a+\nu), \quad \nu = 1, \dots, a-1\}$



Σχήμα 6.5: Οι αποστάσεις των συνοριακών σημείων παρεμβολής μιας περιοχής από τα ευθύγραμμο τμήματα που ορίζουν τα τέσσερα ακραία σημεία της περιοχής, για διάφορες τιμές του a . (α) $a = 2$, (β) $a = 3$.

από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία
 $(x_{ka}, y_{(l-1)a}, z_{ka}, (l-1)a)$ και $(x_{ka}, y_{la}, z_{ka}, la)$,

$D_{kl}[\nu]$, $\nu = 1, \dots, a-1$,
 είναι η κατακόρυφη απόσταση κάθε ενός σημείου παρεμβολής
 $\{(x_{(k-1)a+\nu}, y_{(l-1)a}, z_{(k-1)a+\nu}, (l-1)a), \nu = 1, \dots, a-1\}$
 από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία
 $(x_{(k-1)a}, y_{(l-1)a}, z_{(k-1)a}, (l-1)a)$ και $(x_{ka}, y_{(l-1)a}, z_{ka}, (l-1)a)$,

$U_{kl}[\nu]$, $\nu = 1, \dots, a-1$,
 είναι η κατακόρυφη απόσταση κάθε ενός σημείου παρεμβολής
 $\{(x_{(k-1)a+\nu}, y_{la}, z_{(k-1)a+\nu}, la), \nu = 1, \dots, a-1\}$
 από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία
 $(x_{(k-1)a}, y_{la}, z_{(k-1)a}, la)$ και $(x_{ka}, y_{la}, z_{ka}, la)$.

Σημειώνουμε ότι κάθε μια από τις παραπάνω αποστάσεις λαμβάνεται θετική αν το αντίστοιχο σημείο παρεμβολής είναι πάνω από το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα ή αρνητική αλλιώς. Το σχήμα 6.5 δείχνει τι ακριβώς εκφράζουν αυτές οι αποστάσεις.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες αποστάσεις των σημείων που προκύπτουν, μέσω του ΠΣΕΣ, στο κ ($\kappa \geq 1$) επαναληπτικό βήμα του Αλγορίθμου Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων (AAE)

$L_{kl}^\kappa[\nu]$, $\nu = 1, \dots, a^\kappa - 1$,
 είναι η κατακόρυφη απόσταση κάθε ενός σημείου που προέκυψε στο κ βήμα
 με $x = \hat{x}_{k-1}$ και $y \in [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l]$
 από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία
 $(x_{(k-1)a}, y_{(l-1)a}, z_{(k-1)a}, (l-1)a)$ και $(x_{(k-1)a}, y_{la}, z_{(k-1)a}, la)$,

$R_{kl}^\kappa[\nu]$, $\nu = 1, \dots, a^\kappa - 1$,
 είναι η κατακόρυφη απόσταση κάθε ενός σημείου που προέκυψε στο κ βήμα



με $x = \hat{x}_k$ και $y \in [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l]$
 από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία
 $(x_{ka}, y_{(l-1)a}, z_{ka}, (l-1)a)$ και $(x_{ka}, y_{la}, z_{ka}, la)$,

$D_{kl}^\kappa[\nu]$, $\nu = 1, \dots, a^\kappa - 1$,
 είναι η κατακόρυφη απόσταση κάθε ενός σημείου που προέκυψε στο κ βήμα
 με $y = \hat{y}_{l-1}$ και $x \in [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k]$
 από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία
 $(x_{(k-1)a}, y_{(l-1)a}, z_{(k-1)a}, (l-1)a)$ και $(x_{ka}, y_{(l-1)a}, z_{ka}, (l-1)a)$,

$U_{kl}^\kappa[\nu]$, $\nu = 1, \dots, a^\kappa - 1$,
 είναι η κατακόρυφη απόσταση κάθε ενός σημείου που προέκυψε στο κ βήμα
 με $y = \hat{y}_l$ και $x \in [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k]$
 από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία
 $(x_{(k-1)a}, y_{la}, z_{(k-1)a}, la)$ και $(x_{ka}, y_{la}, z_{ka}, la)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2

Για να είναι ο ελκυστής ενός Bivariate ΠΣΕΣ (όπως αυτό που ορίσαμε παραπάνω) μια συνεχής επιφάνεια είναι απαραίτητο να ισχύουν

$$\begin{aligned} s_{i,j} \cdot R_{\mathbb{J}(i,j)}^\kappa[\nu] &= s_{i+1,j} \cdot L_{\mathbb{J}(i+1,j)}^\kappa[\nu], \\ s_{i,j} \cdot U_{\mathbb{J}(i,j)}^\kappa[\nu] &= s_{i,j+1} \cdot D_{\mathbb{J}(i,j+1)}^\kappa[\nu], \end{aligned}$$

για $i = 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, M-1$, $\nu = 1, \dots, a^{\kappa-1} - 1$, $\kappa \in \mathbb{N}^2$.

Απόδειξη.

Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης του θεωρήματος 6.1. Ας θεωρήσουμε μια συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \times [0, p] \rightarrow \mathbb{R}$. Για $k = 1, 2, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$L_{kl}^f : [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η τιμή $L_{kl}^f(y)$ εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση του σημείου $f(\hat{x}_{k-1}, y)$ από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{l-1})$ και $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_l)$.

$R_{kl}^f : [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η τιμή $R_{kl}^f(y)$ εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση του σημείου $f(\hat{x}_k, y)$ από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1})$ και $(\hat{x}_k, \hat{y}_l)$.

$D_{kl}^f : [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η τιμή $D_{kl}^f(x)$ εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση του σημείου $f(x, \hat{y}_{l-1})$ από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{l-1})$ και $(\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1})$.

$U_{kl}^f : [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η τιμή $U_{kl}^f(x)$ εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση του σημείου $f(x, \hat{y}_l)$ από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_l)$ και $(\hat{x}_k, \hat{y}_l)$.

²Όστε σε κάθε βήμα οι περιοχές που απεικονίζονται σε γειτονικούς τομείς να “κολλάνε” μεταξύ τους.



Στη συνέχεια ορίζουμε ως $\mathcal{F}$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων f ορισμένων στο $[0, 1] \times [0, p]$ με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} s_{i,j} \cdot R_{\mathbb{J}(i,j)}^f(y) &= s_{i+1,j} \cdot L_{\mathbb{J}(i+1,j)}^f(y), \quad y \in [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l] \\ s_{i,j} \cdot U_{\mathbb{J}(i,j)}^f(x) &= s_{i,j+1} \cdot D_{\mathbb{J}(i,j+1)}^f(x), \quad x \in [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k] \end{aligned}$$

για $i = 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, M-1$, $(k, l) = \mathbb{J}(i, j)$. Και πάλι το σύνολο $\mathcal{F}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του χώρου των συνεχών συναρτήσεων $C([0, 1] \times [0, p])$ εφοδιασμένου με την μετρική ρ_∞ . Ορίζουμε τον τελεστή T όπως και πριν και συνεχίζουμε την απόδειξη με τον ίδιο τρόπο. $\square$

Η παραπάνω πρόταση, δίνει μια γενική συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα σημεία παρεμβολής σε σχέση με τους με τους συντελεστές s_{ij} ώστε να κατασκευαστεί μια fractal επιφάνεια παρεμβολής. Είναι προφανές βέβαια ότι η συνθήκη που απαιτείται είναι πολύ δύσκολο να ελεγχθεί. Η πιο απλή περίπτωση είναι αυτή στην οποία τα σημεία παρεμβολής στα σύνορα των περιοχών είναι συνευθειακά. Όπως ήδη περιγράψαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 6.1, τότε όλα τα σημεία που θα προκύψουν σε επόμενα βήματα θα είναι επίσης συνευθειακά. Άρα, αν οι συνθήκες του θεωρήματος 6.1 ικανοποιούνται, τότε ικανοποιείται και η συνθήκη της πρότασης. Γενικά τα πράγματα δεν είναι πάντα τόσο απλά. Γι αυτό στην παρακάτω πρόταση δίνουμε απλούστερες συνθήκες, περιορίζοντας τα s_{ij} οι οποίες αν ικανοποιούνται εξασφαλίζουν το ότι η προηγούμενη συνθήκη ισχύει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.3

Θεωρούμε ένα Bivariate ΠΣΕΣ (όπως αυτό που ορίσαμε παραπάνω) με την ιδιότητα

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu] &= L_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu], \\ U_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu] &= D_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu], \end{aligned}$$

για $\nu = 1, 2, \dots, a-1$ και $s_{ij} = s$, για $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$. Ο ελκυστής αυτού του ΠΣΕΣ είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης.

6.1.1 Η box διάσταση της Bivariate FEΠ

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε διάφορους τρόπους κατασκευής Fractal Επιφανειών Παρεμβολής βασισμένων σε Bivariate ΠΣΕΣ (για συντομία θα τις αναφέρουμε ως **ΠΒFEΠ**). Εδώ θα υπολογίσουμε την box διάσταση μιας τέτοιας επιφάνειας. Καταρχήν, θυμίζουμε τον ορισμό της box διάστασης ενός συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Αν $\mathcal{N}(B, \epsilon)$ είναι ο μικρότερος αριθμός από κλειστές σφαίρες ακτίνας ϵ που καλύπτουν το B και το όριο

$$D = D(B) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{N}(B, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

υπάρχει, τότε ο αριθμός $D(B)$ καλείται box διάσταση του B . Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να προσθέσουμε και μερικούς ακόμη ορισμούς. Συγκεκριμένα ορίζουμε ως

$$\underline{D} = \underline{D}(B) = \liminf_{\epsilon > 0} \frac{\ln \mathcal{N}(B, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \quad \text{και} \quad \overline{D} = \overline{D}(B) = \limsup_{\epsilon > 0} \frac{\ln \mathcal{N}(B, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)},$$

ως την **κατώτερη** και την **ανώτερη** box διάσταση του B . Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιούμε κλειστούς κύβους πλευράς $(1/k^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Έτσι, αν $\mathcal{N}_n(B)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός κλειστών κύβων πλευράς $1/k^n$ που καλύπτουν το B και το όριο

$$D = D(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{N}_n(B)}{\ln(1/k^n)}$$



υπάρχει, τότε το B έχει box διάσταση ίση με D .

Υπάρχει όμως δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν σύνολα διαφορετικής μορφής για την κάλυψη του B . Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε καλύψεις από το σύνολο $\mathcal{C}_\epsilon$, $\epsilon > 0$, το οποίο αποτελείται από σύνολα διαμέτρου ϵ και έστω $\mathcal{N}^*(\epsilon)$ ο ελάχιστος αριθμός συνόλων του $\mathcal{C}_\epsilon$ που καλύπτουν το B . Αν υπάρχουν αριθμοί c_1 και c_2 , τέτοιοι ώστε

$$c_1 \mathcal{N}(B, \epsilon) \leq \mathcal{N}^*(\epsilon) \leq c_2 \mathcal{N}(B, \epsilon),$$

τότε το $\mathcal{N}^*(\epsilon)$ μπορεί να αντικαταστήσει το $\mathcal{N}(B, \epsilon)$ στον υπολογισμό της box διάστασης (η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον ορισμό).

Για να υπολογίσουμε την διάσταση μιας ΠΒFEP (δηλαδή του ελκυστή G ενός ΠΣΕΣ όπως αυτό που ορίσαμε παραπάνω) θα χρησιμοποιήσουμε καλύψεις της ακόλουθης μορφής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1

Έστω $r > 0$ και

$$C = \left\{ \left[\frac{k-1}{a^r}, \frac{k}{a^r} \right] \times \left[\frac{l-1}{a^r}, \frac{l}{a^r} \right] \times \left[b, b + \frac{1}{a^r} \right] : k, l, r \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Το C περιέχει (επικαλυπτόμενους) κύβους πλευράς $1/a^r$, τοποθετημένους σε τετράγωνο πλέγμα ως προς τους άξονες xy . (βλέπε σχήμα 6.6). Ορίζουμε ως

$\mathcal{N}^*(r)$ τον ελάχιστο αριθμό κύβων του C που είναι απαραίτητοι για να καλυφθεί το G ,

$\mathcal{N}(r)$ τον ελάχιστο αριθμό κύβων πλευράς $1/a^r$ που είναι απαραίτητοι για να καλυφθεί το G .

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

ΛΗΜΜΑ 6.1

$$\mathcal{N}(r) \leq \mathcal{N}^*(r) \leq 4\mathcal{N}(r).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.2

Το **εύρος** μιας συνάρτησης h μέσα σε ένα ορθογώνιο $I \subset \mathbb{R}^2$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{R}_h[I] = \max\{|h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)| : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I\}.$$

ΛΗΜΜΑ 6.2

Έστω ένα ΠΣΕΣ όπως αυτό που ορίσαμε παραπάνω και έστω ότι ο ο ελκυστής του G είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης h ορισμένης στο $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subseteq \mathbb{R}^2$, $\alpha, \gamma \geq 0$. Επίσης, έστω ότι w είναι μια από τις απεικονίσεις του ΠΣΕΣ της μορφής

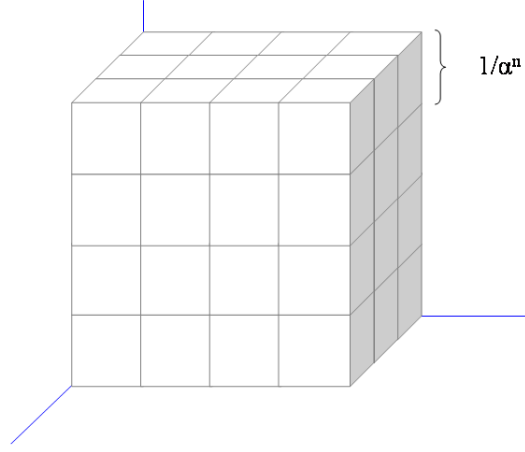
$$w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b \\ cy + d \\ ex + fy + gx + sz + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(y) \\ F(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

με

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b \\ cy + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(y) \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

τότε

$$\mathcal{R}_h[T(I)] \leq |e|(\beta - \alpha) + |f|(\delta - \gamma) + |g|\delta(\beta - \alpha) + |g|\beta(\delta - \gamma) + |s|\mathcal{R}_h[I].$$



Σχήμα 6.6: Τετράγωνοι κύβοι πλευράς $1/a^n$. Στο παραπάνω σχήμα οι κύβοι που έχουν σχεδιαστεί είναι μη επικαλυπτόμενοι. Το C περιέχει κύβους που η κάτω βάση τους μπορεί να αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε τιμή $z = b$.

Απόδειξη.

Έστω ότι $(x_1, y_1, z_1)^t, (x_2, y_2, z_2)^t \in G$ και

$$\begin{aligned} (x'_1, y'_1, z'_1)^t &= w((x_1, y_1, z_1)^t), \\ (x'_2, y'_2, z'_2)^t &= w((x_2, y_2, z_2)^t). \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} |z'_2 - z'_1| &\leq |e||x_2 - x_1| + |f||y_2 - y_1| + |g||x_2 y_2 - x_1 y_1| + |s||z_2 - z_1| \\ &= |e||x_2 - x_1| + |f||y_2 - y_1| + |g||x_2 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_1| + |s||z_2 - z_1| \\ &\leq |e||x_2 - x_1| + |f||y_2 - y_1| + |g||y_1||x_2 - x_1| + |g||x_2||y_2 - y_1| + |s||z_2 - z_1| \\ &\leq |e|(\beta - \alpha) + |f|(\delta - \gamma) + |g|\delta(\beta - \alpha) + |g|\beta(\delta - \gamma) + |s||z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

Από την τελευταία ανίσωση παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

Πριν δώσουμε το βασικό θεώρημα, χρειαζόμαστε ένα ακόμη βοηθητικό λήμμα και μερικούς ορισμούς. Ορίζουμε ως $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ τη συνάρτηση που δίνει το ακέραιο μέρος ενός αριθμού.

ΛΗΜΜΑ 6.3

Έστω αριθμοί $x, x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $x_1 + x_2 + \dots + x_k = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\lambda x - k \leq [x_1] + [x_2] + \dots + [x_k] \leq \lambda x.$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 6.3**

Έστω $U, V \in \mathbb{R}^N$ με $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)^t$ και $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)^t$. Ορίζουμε τη σχέση $\prec$ ως εξής:

$$U \prec V, \quad \text{αν και μόνο αν } u_i < v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.4

Έστω $P = \{(x_i, y_j, z_{ij}); \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, M\}$ ένα σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^3$. Ονομάζουμε τα σημεία του P **x-συγγραμμικά**, αν και μόνο αν όλα τα σημεία του P με την ίδια συντεταγμένη x είναι συγγραμμικά. Ονομάζουμε τα σημεία του P **y-συγγραμμικά**, αν και μόνο αν όλα τα σημεία του P με την ίδια συντεταγμένη y είναι συγγραμμικά.

Το παρακάτω θεώρημα δίνει την box διάσταση μιας Bivariate Fractal Επιφάνειας Παρεμβολής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2

Έστω ένα Bivariate ΠΣΕΣ που συνδέεται με τα δεδομένα του Δ όπως περιγράψαμε παραπάνω, εφοδιασμένο με έναν μη-αναγώγιμο πίνακα συνδέσεων C . Επίσης, έστω ο $N \cdot M \times N \cdot M$ διαγώνιος πίνακας

$$S = \text{diag}(|s_{11}|, |s_{12}|, \dots, |s_{1M}|, |s_{21}|, |s_{22}|, \dots, |s_{2M}|, \dots, |s_{N1}|, |s_{N2}|, \dots, |s_{NM}|)$$

με $0 < |s_{ij}| < 1$, $i = 1, \dots, N$ και $j = 1, \dots, M$. Υποθέτουμε ότι ο ελκυστής G του ΠΣΕΣ είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης f που παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ και ότι τα σημεία παρεμβολής κάθε περιοχής δεν είναι x-συγγραμμικά ή δεν είναι y-συγγραμμικά. Τότε, η box διάσταση του G δίνεται από τον τύπο

$$D(G) = \begin{cases} 1 + \log_a \lambda, & \text{αν } \lambda > a \\ 2, & \text{αν } \lambda \leq a \end{cases}$$

όπου $\lambda = \rho(SC) > 0$, η φασματική ακτίνα του μη αναγώγιμου πίνακα $S \cdot C$.

Απόδειξη.

Έστω $R_{kl} = R_f[J_{kl}]$ το εύρος της f μέσα στην περιοχή J_{kl} . Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο πίνακας συνδέσεων $C = (C_{nm})$ του ΠΣΕΣ δίνεται από τη σχέση

$$C_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{αν } p_{mn} > 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αν $U = (u_1, u_2, \dots, u_{NM})^t \in \mathbb{R}^{NM}$, ορίζουμε

$$\Omega(U) = u_1 + u_2 + \dots + u_{NM}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, μπορούμε να πούμε ότι, σε κάθε περιοχή J_{kl} υπάρχει ένας αριθμός i_0 ώστε τα σημεία $\{(x_{i_0}, y_{j_\nu}, z_{i_0, j_\nu}) : (x_{i_0}, y_{j_\nu}) \in J_{kl}, \nu = 1, 2, \dots, a+1\}$ να μην είναι συγγραμμικά, ή υπάρχει ένας αριθμός j_0 ώστε τα σημεία $\{(x_{i_\nu}, y_{j_0}, z_{i_\nu, j_0}) : (x_{i_\nu}, y_{j_0}) \in J_{kl}, \nu = 1, 2, \dots, a+1\}$ να μην είναι συγγραμμικά. Έτσι ορίζουμε ως V_{kl} την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση των σημείων από το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τα σημεία $(x_{i_0}, y_{j_1}, z_{i_0, j_1})$ και $(x_{i_0}, y_{j_{a+1}}, z_{i_0, j_{a+1}})$ στην πρώτη περίπτωση, ή από τα σημεία $(x_{i_{11}}, y_{j_0}, z_{i_{11}, j_0})$ και $(x_{i_{a+11}}, y_{j_0}, z_{i_{a+11}, j_0})$ στη δεύτερη περίπτωση. Ως συνήθως, με τον όρο **κατακόρυφη απόσταση** εννοούμε την απόσταση που υπολογίζεται σε σχέση μόνο με τον άξονα z . Θα αναφερόμαστε σε αυτή την απόσταση ως “ύψος”.



Μετά την πρώτη επανάληψη του ΑΑΕ (αφού εφαρμόσουμε κάθε w_{ij} στα σημεία παρεμβολής που βρίσκονται στην περιοχή $J_{\mathbb{J}(i,j)}$) λαμβάνουμε $(a+1)^2$ καινούρια σημεία και ένα ύψος $|s_{ij}|V_{\mathbb{J}(i,j)}$ μέσα σε κάθε τομέα. Για να υπολογίσουμε αυτό το ύψος χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα των bivariate απεικονίσεων που λέει ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στον άξονα z απεικονίζεται σε ένα νέο ευθύγραμμο τμήμα εξ' ίσου παράλληλο στον άξονα z με μήκος που έχει “συσταλεί” κατά τον συντελεστή s_{ij} , καθώς επίσης και την ιδιότητα ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο επίπεδο xz ή στο επίπεδο yz απεικονίζεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα επίσης παράλληλο στο επίπεδο xz ή στο επίπεδο yz αντίστοιχα. Από το Λήμμα 6.2 υπολογίζουμε ότι το εύρος της f μέσα σε κάθε τομέα θα είναι

$$R_f[I_{ij}] = R_f[T_{ij}(J_{\mathbb{J}(i,j)})] \leq \beta_{ij} \frac{a}{N} + |s_{ij}|R_f[J_{\mathbb{J}(i,j)}],$$

όπου $\beta_{ij} = |e_{ij}| + |f_{ij}| + |g_{ij}| + |g_{ij}|p, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$.

Στη συνέχεια, ορίζουμε τα μη αρνητικά διανύσματα B, H_1, R, U_1 και $\mathbb{I}$, ως εξής:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1M} \\ \vdots \\ \beta_{N1} \\ \beta_{N2} \\ \vdots \\ \beta_{NM} \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} |s_{11}|V_{\mathbb{J}(1,1)} \\ |s_{12}|V_{\mathbb{J}(1,2)} \\ \vdots \\ |s_{1M}|V_{\mathbb{J}(1,M)} \\ \vdots \\ |s_{N1}|V_{\mathbb{J}(N,1)} \\ |s_{N2}|V_{\mathbb{J}(N,2)} \\ \vdots \\ |s_{NM}|V_{\mathbb{J}(N,M)} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} |s_{11}|R_{\mathbb{J}(1,1)} \\ |s_{12}|R_{\mathbb{J}(1,2)} \\ \vdots \\ |s_{1M}|R_{\mathbb{J}(1,M)} \\ \vdots \\ |s_{N1}|R_{\mathbb{J}(N,1)} \\ |s_{N2}|R_{\mathbb{J}(N,2)} \\ \vdots \\ |s_{NM}|R_{\mathbb{J}(N,M)} \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \frac{a}{N}B + R \quad \text{και} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Αφού ο G είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης ορισμένης στο $[0, 1] \times [0, p]$, για να καλύψουμε το κομμάτι του G που βρίσκεται μέσα στο $I_{ij} \times \mathbb{R}$ χρειαζόμαστε περισσότερους κύβους από όσους χρειάζονται για να καλύψουμε το ύψος $|s_{ij}|V_{\mathbb{J}(i,j)}$ και λιγότερους κύβους από όσους χρειάζονται για να καλύψουμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τα ακόλουθα έξι επίπεδα. Θυμίζουμε ότι $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Τότε το πρώτο επίπεδο ορίζεται από την εξίσωση $y = y_{j-1}$, ενώ το δεύτερο (παράλληλο με το πρώτο) από την $y = y_j$. Το τρίτο και το τέταρτο επίπεδο ορίζονται από την $x = x_i$ και την $x = x_{i-1}$. Τέλος, αν $z_{\max}[i, j]$, $z_{\min}[i, j]$ είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f μέσα στον τομέα I_{ij} , τότε το πέμπτο και το έκτο επίπεδο ορίζονται από τις $z = z_{\max}[i, j]$ και $z = z_{\min}[i, j]$, αντίστοιχα.

Τότε,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [|s_{ij}|V_{\mathbb{J}(i,j)}a^r] \leq \mathcal{N}^*(r) \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(\left(\beta_{ij} \frac{a}{N} + |s_{ij}|R_{\mathbb{J}(i,j)} \right) a^r + 1 \right) \left(\left[\frac{1}{N}a^r \right] + 1 \right)^2.$$



Οπότε (από το Λήμμα 6.3) έχουμε:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (|s_{ij}| V_{\mathbb{J}(i,j)} a^r) - NM \leq \mathcal{N}^*(r) \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left(\left(\beta_{ij} \frac{a}{N} + |s_{ij}| R_{\mathbb{J}(i,j)} \right) a^r + 1 \right) \left(\left[\frac{1}{N} a^r \right] + 1 \right)^2$$

$$\text{ή} \quad \Omega(H_1 a^r) - NM \leq \mathcal{N}^*(r) \leq \Omega(U_1 \cdot a^r + \mathbb{I}) \cdot \left(\left[\frac{1}{N} a^r \right] + 1 \right)^2.$$

Μετά την δεύτερη επανάληψη παίρνουμε a^2 τετράγωνα πλευράς $\frac{1}{aN}$ μέσα σε κάθε τομέα, τα οποία καλούμαι υποτομές. Κάθε υποτομέα παράγεται από τους τομείς που βρίσκονται μέσα στην περιοχή που απεικονίζεται στον αρχικό τομέα. Τα μέγιστα εύροι που παράγονται μέσα σε κάθε υποτομέα περιέχονται (ως συντεταγμένες) στο διάνυσμα

$$U_2 = SC \cdot U_1 + a^2 B \frac{1}{N},$$

ενώ τα ύψη που παράγονται μέσα σε κάθε υποτομέα (a^2 υποτομές σε κάθε τομέα) περιέχονται (ως συντεταγμένες) στο διάνυσμα

$$H_2 = SC \cdot H_1.$$

Έτσι, ακολουθώντας μια παρόμοια διαδικασία με την παραπάνω (στη πρώτη επανάληψη) καταλήγουμε στην σχέση:

$$\Omega(H_2 \cdot a^r) - a^2 MN \leq \mathcal{N}^*(r) \leq \Omega(U_2 \cdot a^r + a^2 \mathbb{I}) \cdot \left(\left[\frac{1}{aN} a^r \right] + 1 \right)^2.$$

Μετά την τρίτη επανάληψη παίρνουμε a^4 υποτομές πλευράς $\frac{1}{a^2 N}$ μέσα σε κάθε τομέα, έχοντας, έτσι, $a^4 NM$ συνολικά υποτομές. Τα εύροι που παράγονται περιέχονται (ως συντεταγμένες) στο διάνυσμα

$$U_3 = SC \cdot U_2 + a^4 B \frac{1}{aN} = SC \cdot U_2 + a^3 B \frac{1}{N}$$

ενώ τα ύψη που παράγονται περιέχονται (ως συντεταγμένες) στο διάνυσμα

$$H_3 = SC \cdot H_2.$$

Οπότε,

$$\Omega(H_3 \cdot a^r) - a^4 MN \leq \mathcal{N}^*(r) \leq \Omega(U_3 \cdot a^r + a^4 \mathbb{I}) \cdot \left(\left[\frac{1}{a^2 N} a^r \right] + 1 \right)^2.$$

Έτσι, στην κ επανάληψη θα έχουμε $a^{2(\kappa-1)}$ εύροι, ύψοι και υποτομές πλευράς $\frac{1}{a^{\kappa-1} N}$ μέσα σε κάθε τομέα, οπότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.3 παίρνουμε:

$$\Omega(H_\kappa \cdot a^r) - MN a^{2(\kappa-1)} \leq \mathcal{N}^*(r) \leq \Omega(U_\kappa \cdot a^r + \mathbb{I} \cdot a^{2(\kappa-1)}) \cdot \left(\left[\frac{1}{a^{\kappa-1} N} a^r \right] + 1 \right)^2 \quad (6.32)$$

όπου

$$U_\kappa = SC \cdot U_{\kappa-1} + a^{2(\kappa-1)} B \frac{1}{a^{\kappa-2} N} = SC \cdot U_{\kappa-1} + B \frac{a^\kappa}{N}$$

και

$$H_\kappa = SC \cdot H_{\kappa-1}.$$

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$U_\kappa = (SC)^{\kappa-1} \cdot R + (SC)^{\kappa-1} B \frac{a}{N} + (SC)^{\kappa-2} \cdot B \frac{a^2}{N} + (SC)^{\kappa-3} \cdot B \frac{a^3}{N} + \dots + SC \cdot B \frac{a^{\kappa-1}}{N} + B \frac{a^\kappa}{N}$$



και

$$H_k = (SC)^{k-1} \cdot H_1.$$

Αυτό ισχύει μόνο αν για τον αριθμό κ των βημάτων ισχύει ότι $\frac{1}{a^{\kappa-1}N} \geq \frac{1}{a^r}$, ώστε οι κύβοι που χρησιμοποιούμε να μην επικαλύπτονται. Επιλέγουμε $\kappa \in \mathbb{N}$ ώστε $r - \mu - 1 \leq \kappa < r - \mu$, όπου $\mu = \frac{\log N}{\log a} - 1 > 0$.

Αφού ο $S \cdot C$ είναι μη αρνητικός, μη αναγωγίμος πίνακας, το θεώρημα του Frobenius (θεώρημα 1.4, σελ. 22) αναφέρει ότι υπάρχει ένα μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα του $S \cdot C$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = \rho(SC) > 0$. (Η μοναδικότητα αναφέρεται στο γεγονός ότι ένας μη αρνητικός μη αναγωγίμος πίνακας δε μπορεί να έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητα και μη αρνητικά ιδιοδιανύσματα που να αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή. Έτσι κάθε άλλο θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = \rho(SC) > 0$ πρέπει να εξαρτάται γραμμικά από το πρώτο).

Επιλέγουμε τα ακόλουθα ιδιοδιανύσματα (τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ):

$$\hat{U} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{NM}), \quad \text{έτσι ώστε} \quad 0 \prec \hat{U} \prec H_1 \quad (6.33)$$

$$U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_{NM}^*), \quad \text{έτσι ώστε} \quad U^* \succ R \text{ και } U^* \succ \frac{1}{N}B. \quad (6.34)$$

Οπότε, από δεξιά μέρος της (6.32), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) &\leq \Omega \left(U_\kappa \cdot a^r + a^{2(\kappa-1)}\mathbb{I} \right) \cdot \left(\left[\frac{1}{a^{\kappa-1}N} a^r \right] + 1 \right)^2 \\ &\leq \Omega \left(U_\kappa \cdot a^r + a^{2\kappa-2}\mathbb{I} \right) \cdot \left(\frac{a^{\mu+2}}{N} + 1 \right)^2 \quad (\text{αφού } \kappa \geq r - \mu - 1) \\ &= \Omega \left(U_\kappa \cdot a^r + a^{2\kappa-2}\mathbb{I} \right) \cdot (a+1)^2 \quad (\text{αφού } a^\mu = \frac{N}{a}) \\ &= \Omega \left((SC)^{\kappa-1} R a^r + (SC)^{\kappa-1} B a^r \frac{a}{N} + (SC)^{\kappa-2} B a^r \frac{a^2}{N} + \dots + (SC) B a^r \frac{a^{\kappa-1}}{N} + \right. \\ &\quad \left. B a^r \frac{a^\kappa}{N} + a^{2\kappa-2}\mathbb{I} \right) \cdot (a+1)^2 \\ \mathcal{N}^*(r) &\leq \Omega \left((SC)^{\kappa-1} R a^r + (SC)^{\kappa-1} B \frac{a^{r+1}}{N} + (SC)^{\kappa-2} B \frac{a^{r+2}}{N} + \dots + (SC) B \frac{a^{r+\kappa-1}}{N} + \right. \\ &\quad \left. B \frac{a^{r+\kappa}}{N} + a^{2\kappa-2}\mathbb{I} \right) \cdot (a+1)^2 \quad (6.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) &\leq \Omega \left((SC)^{\kappa-1} U^* a^r + (SC)^{\kappa-1} U^* a^{r+1} + (SC)^{\kappa-2} U^* a^{r+2} + \dots + (SC) U^* a^{r+\kappa-1} + \right. \\ &\quad \left. U^* a^{r+\kappa} + a^{2\kappa-2}\mathbb{I} \right) \cdot (a+1)^2 \quad (\text{αφού } \frac{1}{N}B \prec U^* \text{ και } R \prec U^*) \\ &= \Omega \left(\lambda^{\kappa-1} U^* a^r + \lambda^{\kappa-1} U^* a^{r+1} + \lambda^{\kappa-2} U^* a^{r+2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \lambda U^* a^{r+\kappa-1} + U^* a^{r+\kappa} + a^{2\kappa-2}\mathbb{I} \right) \cdot (a+1)^2 \\ &\quad (\text{αφού το } U^* \text{ είναι ιδιοδιάνυσμα.}) \\ &= \left(\lambda^{\kappa-1} \Omega(U^*) a^r + \lambda^{\kappa-1} \Omega(U^*) a^{r+1} + \lambda^{\kappa-2} \Omega(U^*) a^{r+2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \lambda \Omega(U^*) a^{r+\kappa-1} + \Omega(U^*) a^{r+\kappa} + a^{2\kappa-2} \Omega(\mathbb{I}) \right) \cdot (a+1)^2 \end{aligned}$$



Οπότε θέτοντας $\gamma^* = \Omega(U^*)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) \leq & (\lambda^{\kappa-1} \gamma^* a^r + \lambda^{\kappa-1} \gamma^* a^{r+1} + \lambda^{\kappa-2} \gamma^* a^{r+2} + \dots \\ & + \lambda \gamma^* a^{r+\kappa-1} + \gamma^* a^{r+\kappa} + a^{2\kappa-2} NM) \cdot (a+1)^2 \end{aligned}$$

και αφού $\kappa \leq r - \mu$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) \leq & (\lambda^{r-\mu-1} \gamma^* a^r + \lambda^{r-\mu-1} \gamma^* a^{r+1} + \lambda^{r-\mu-2} \gamma^* a^{r+2} + \dots \\ & + \lambda \gamma^* a^{2r-\mu-1} + \gamma^* a^{2r-\mu} + a^{2r-2\mu-2} NM) \cdot (a+1)^2 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Σε αυτό το σημείο διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την τιμή του λ .

Υποθέτοντας ότι $\lambda > a$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) & \leq \lambda^{r-\mu-1} a^r \gamma^* \left(1 + \frac{a^2}{\lambda} + \dots + \frac{a^{r-\mu-1}}{\lambda^{r-\mu-2}} + \frac{a^{r-\mu}}{\lambda^{r-\mu-1}} + \frac{a^{r-2\mu-2} NM}{\lambda^{r-\mu-1}} \right) \cdot (a+1)^2 \\ & = \lambda^{r-\mu-1} a^r \gamma^* \left(1 + \frac{a^{r-2\mu-2} NM}{\lambda^{r-\mu-1}} + \frac{a \left(1 - \left(\frac{a}{\lambda} \right)^{r-\mu} \right)}{1 - \frac{a}{\lambda}} \right) \cdot (a+1)^2. \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει

$$\left(1 + \frac{a^{r-2\mu-2} NM}{\lambda^{r-\mu-1}} + \frac{a \left(1 - \left(\frac{a}{\lambda} \right)^{r-\mu} \right)}{1 - \frac{a}{\lambda}} \right) > 0.$$

Άρα, στην περίπτωση που $\lambda > a$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \mathcal{N}^*(r)}{r \ln a} & \leq \frac{(r-\mu-1) \ln \lambda}{r \ln a} + \frac{r \ln a}{r \ln a} + \frac{\ln \gamma^*}{r \ln a} + \frac{\ln \left(1 + \frac{a^{r-2\mu-2} NM}{\lambda^{r-\mu-1}} + \frac{a \left(1 - \left(\frac{a}{\lambda} \right)^{r-\mu} \right)}{1 - \frac{a}{\lambda}} \right)}{r \ln a} \\ & \quad + \frac{2 \ln (a+1)}{r \ln a} \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\overline{D}(G) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{N}^*(r)}{r \ln a} \leq 1 + \log_a \lambda. \quad (6.37)$$

Στην περίπτωση που $\lambda \leq a$, τότε από την 6.36 θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) & \leq (\lambda^{r-\mu-1} \gamma^* a^r + \lambda^{r-\mu-1} \gamma^* a^{r+1} + \lambda^{r-\mu-2} \gamma^* a^{r+2} + \dots \\ & \quad + \lambda \gamma^* a^{2r-\mu-1} + \gamma^* a^{2r-\mu} + a^{2r-2\mu-2} NM) \cdot (a+1)^2 \\ & \leq (a^{2r-\mu-1} \gamma^* + a^{2r-\mu} \gamma^* + a^{2r-\mu} \gamma^* + \dots \\ & \quad + \lambda^{2r-\mu} \gamma^* + a^{2r-\mu} \gamma^* + a^{2r-2\mu-2} NM) \cdot (a+1)^2 \\ & \leq (a^{2r-\mu-1} \gamma^* + (r-\mu) a^{2r-\mu} \gamma^* + a^{2r-2\mu-2} NM) (a+1)^2 \\ & \leq a^{2r-\mu-2} \gamma^* (a + (r-\mu) a^2 + NM) (a+1)^2. \end{aligned}$$



Οπότε

$$\frac{\ln \mathcal{N}^*(r)}{r \ln a} \leq \frac{(2r - \mu - 2) \ln a}{r \ln a} + \frac{\ln(\gamma^*(a + (r - \mu)a^2 + NM)(a + 1)^2)}{r \ln a},$$

δηλαδή $D(G) \leq 2$. Όμως, αφού ο G είναι μια συνεχής επιφάνεια, θα έχουμε ότι $D(G) = 2$.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία για το αριστερό μέρος της (6.32), για $\lambda > a$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) &\geq \Omega(H_\kappa \cdot a^r) - MN a^{2\kappa-2} \\ \mathcal{N}^*(r) &\geq \Omega((SC)^{\kappa-1} \cdot H_1 \cdot a^r) - MN a^{2\kappa-2} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) &\geq \Omega((SC)^{\kappa-1} \cdot \hat{U} \cdot a^r) - MN a^{2\kappa-2} \quad (\text{αφού } H_1 \succ \hat{U}) \\ &\geq \Omega(\lambda^{\kappa-1} \cdot \hat{U} \cdot a^r) - MN a^{2\kappa-2} \quad (\text{το } \hat{U} \text{ είναι ιδιοδιάνυσμα}) \\ &= \lambda^{\kappa-1} a^r \sum_{n=1}^{NM} \hat{u}_i - MN a^{2\kappa-2} \\ &= \lambda^{\kappa-1} a^r \hat{\gamma} - MN a^{2\kappa-2} \quad \left(\hat{\gamma} = \sum_{n=1}^{NM} \hat{u}_i \right) \\ &\geq \lambda^{r-\mu-2} \hat{\gamma} a^r - MN a^{2r-2\mu-2} \quad (\text{αφού } r - \mu - 1 \leq \kappa < r - \mu) \\ &\geq a^r \lambda^{r-\mu-2} \left(\hat{\gamma} - \frac{MN^2 a^{r-2\mu-2}}{\lambda^{r-\mu-2}} \right). \end{aligned}$$

Αφού όμως $\lambda > a$, θα υπάρχει αριθμός r_0 τέτοιος ώστε $\left(\hat{\gamma} - \frac{pN^2 a^{r-2\mu-2}}{\lambda^{r-\mu-2}} \right) > 0$, για $r > r_0$. Οπότε,

$$\frac{\log \mathcal{N}^*(r)}{r \log a} \geq \frac{r \log a}{r \log a} + \frac{(r - \mu - 2) \log \lambda}{r \log a} + \frac{\log \left(\hat{\gamma} - \frac{MN^2 a^{r-2\mu-2}}{\lambda^{r-\mu-2}} \right)}{r \log a}, \quad \text{για } r > r_0$$

που σημαίνει ότι

$$\underline{D}(G) = \liminf \frac{\ln \mathcal{N}^*(r)}{r \ln a} \geq 1 + \log_a \lambda. \quad (6.39)$$

Έτσι από τις 6.37 και 6.39 θα έχουμε ότι $D(G) = 1 + \log_a \lambda$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.4

Έστω το ΠΣΕΣ και ο πίνακας S όπως έχουν οριστεί παραπάνω. Υποθέτουμε ότι ο ελκυστής του ΠΣΕΣ G είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης και ότι ο πίνακας συνδέσεων C είναι ένας μη αρνητικός πίνακας που έχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα X . Τότε η box διάσταση του ελκυστή είναι:

$$D(G) = \begin{cases} 1 + \log_a \lambda, & \text{αν } \lambda > a, \\ 2, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου $\lambda = \rho(SC)$.

**Απόδειξη.**

Αν υπάρχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα, αντιστοιχεί στην φασματική ακτίνα του πίνακα, η οποία θα είναι επίσης θετική (βλέπε [Gan00b] και [KT74] σελ.551). Οπότε το θετικό ιδιοδιάνυσμα X του πίνακα SC αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = \rho(SC) > 0$ (κάθε άλλο θετικό ιδιοδιάνυσμα θα αντιστοιχεί επίσης στην ιδιοτιμή λ). Μπορούμε να επιλέξουμε $\hat{U}$ και U^* στις ανισότητες (6.33) και (6.34) αντίστοιχα και η απόδειξη θα είναι παρόμοια με του θεωρήματος 6.2 Συνθήκες ώστε ένας μη αρνητικός πίνακας να έχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα δίνονται στο [Gan00b]. $\square$

Στην περίπτωση που ο πίνακας συνδέσεων του ΠΣΕΣ είναι αναγώγιμος δεν μπορούμε να βρούμε ακριβώς την box διάσταση του ελκυστή του, αλλά μπορούμε να βρούμε κάποια φράγματα. Καταρχήν χρειαζόμαστε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.5

Έστω $A \geq 0$, $A \neq 0$ ένας τετραγωνικός πίνακας $(N \times N)$. Επίσης, έστω ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $x \geq 0$. Ορίζουμε

$$\lambda_1(x) = \max\{\rho : Ax \geq \rho x\} \geq 0 \quad \text{και} \quad \lambda_2(x) = \min\{\sigma : Ax \leq \sigma x\}$$

Επίσης ορίζουμε

$$\lambda_1(A) = \min\{\lambda_1(x) : x \geq 0\} \geq 0. \quad \text{και} \quad \lambda_2(A) = \max\{\lambda_2(x) : x \geq 0\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.5

Έστω το ΠΣΕΣ και ο πίνακας S όπως έχουν οριστεί παραπάνω, όπου ο πίνακας συνδέσεων C είναι αναγώγιμος και ο ελκυστής του G του ΠΣΕΣ είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης. Τότε

$$\begin{aligned} \text{αν } \lambda_1(SC) > a, \quad \text{τότε } 1 + \log_a \lambda_1(SC) &\leq \underline{D}(G) \leq \overline{D}(G) \leq 1 + \log_a \lambda_2(SC) \\ \text{αν } \lambda_2(SC) \leq a, \quad \text{τότε } D(G) &= 2 \end{aligned}$$

Απόδειξη.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή που δόθηκε στο θεώρημα 6.2. Υποθέτοντας ότι $\lambda_1(SC) > a$ (οπότε $\lambda_2(SC) \geq \lambda_1(SC) > a$), από την (6.35) έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) &\leq \Omega \left((SC)^{\kappa-1} R a^r + (SC)^{\kappa-1} B \frac{a^{r+1}}{N} + (SC)^{\kappa-2} B \frac{a^{r+2}}{N} + \dots + (SC) B \frac{a^{r+\kappa-1}}{N} + \right. \\ &\quad \left. B \frac{a^{r+\kappa}}{N} + a^{2\kappa-2} \mathbb{I} \right) \cdot (a+1)^2 \quad (6.40) \\ &= \Omega \left(\lambda_2(SC)^{\kappa-1} R a^r + \lambda_2(SC)^{\kappa-1} B a^{r+1} + \lambda_2(SC)^{\kappa-2} B a^{r+2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2(SC) B a^{r+\kappa-1} + B a^{r+\kappa} + a^{2\kappa-2} \mathbb{I} \right) \cdot (a+1)^2 \end{aligned}$$

Με παρόμοια διαδικασία (όπως στο θεώρημα) καταλήγουμε στην $\overline{D}(G) \leq 1 + \log_a \lambda_2(SC)$.

Από την 6.40 έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^*(r) &\geq \Omega \left((SC)^{\kappa-1} \cdot H_1 \cdot a^r \right) - M N a^{2\kappa-2} \\ &\geq \Omega \left((\lambda_1(SC))^{\kappa-1} \cdot H_1 \cdot a^r \right) - M N a^{2\kappa-2}. \end{aligned}$$

Οπότε πάλι με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε την $1 + \log_a \lambda_1(SC) \leq \underline{D}(G)$. Τέλος, αν $\lambda_2(SC) \leq a$, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι $\underline{D}(G) = \overline{D}(G) = D(G) = 2$. $\square$



Ειδικές Περιπτώσεις

Περίπτωση I. Η Αυτόομοια Bivariate Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής.

Η αυτόομοια Bivariate Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής (ABFEP) (βλέπε [Dal02]) είναι μια ΠΒFEP με $K = 1$, $L = 1$, οπότε το σύνολο

$$Q = \{(\hat{x}_k, \hat{y}_l, \hat{z}_{kl}) : k = 0, 1; l = 0, 1\}$$

αποτελείται από 4 σημεία. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μόνο μία περιοχή $J_{11} = [0, 256] \times [0, 256]$, ο πίνακας συνδέσεων είναι

$$C_{ij} = 1, i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M$$

και $\delta = \frac{1}{N}$, $\psi = 1$, οπότε $a = N$. επιπλέον τα σύνολα

$$\begin{aligned} &\{(x_0, y_\nu, z_{0,\nu}), \nu = 1, \dots, a-1\}, \\ &\{(x_N, y_\nu, z_{N,\nu}), \nu = 1, \dots, a-1\}, \\ &\{(x_\nu, y_0, z_{\nu,0}), \nu = 1, \dots, a-1\}, \\ &\{(x_\nu, y_N, z_{\nu,N}), \nu = 1, \dots, a-1\} \end{aligned}$$

περιέχουν συνευθειακά σημεία. Ο C είναι ένας μη αναγώγιμος μη αρνητικός πίνακας με φασματική ακτίνα $\lambda = \rho(SC)$ που δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |s_{ij}|.$$

Ο ελκυστής αυτού του ΠΣΕΣ είναι μια συνεχής συνάρτηση όπως βεβαιώνει το θεώρημα 6.1. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 6.2 βλέπουμε ότι η διάσταση του ελκυστή θα δίνεται από τη σχέση

$$D(G) = \begin{cases} 1 + \log_N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |s_{ij}|, & \text{αν } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |s_{ij}| > N \\ 2, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (6.41)$$

Περίπτωση II. Ο SC είναι πολλαπλάσιος ενός στοχαστικού πίνακα.

Ας υποθέσουμε ένα ΠΣΕΣ όπως αυτό που περιγράφεται στο θεώρημα 6.2, με τον πίνακα C να είναι αναγώγιμος. Για να είναι ο SC πολλαπλάσιος ενός στοχαστικού πίνακα (δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι σταθερό και ίσο με β) θα πρέπει:

$$|s_{ij}| = \frac{\beta}{a^2} \quad \text{για } i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M.$$

Σε αυτή την περίπτωση, η φασματική ακτίνα του SC είναι $\lambda = \rho(SC) = \beta$ (βλέπε [Gan00b] σελ. 84) και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $(1, 1, \dots, 1)^T$. Αν ο ελκυστής G του ΠΣΕΣ είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης, τότε η box διάσταση του G θα είναι:

$$D(G) = \begin{cases} 1 + \log_a \beta, & \text{αν } \beta > a \\ 2, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (6.42)$$



6.1.2 Παραδείγματα

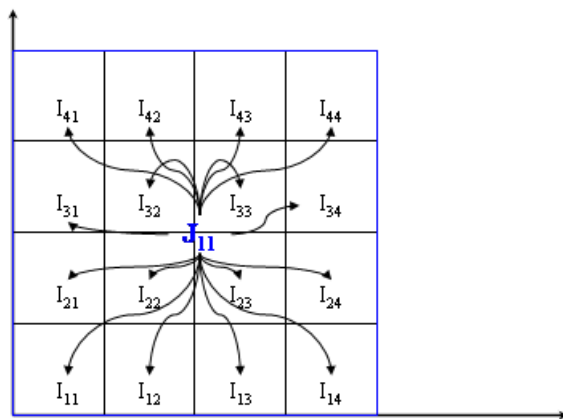
Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα fractal επιφανειών παρεμβολής που κατασκευάστηκαν σύμφωνα με την μεθοδολογία που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Όλες οι επιφάνειες σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Α'9 του παραρτήματος Α.

Παράδειγμα Ι. Ως πρώτο παράδειγμα θα δώσουμε την κατασκευή μιας Αυτόμοιας Bivariate Fractal Επιφάνειας Παρεμβολής με συνευθειακά σημεία παρεμβολής στο σύνολο του $[0, 256] \times [0, 256]$. Πιο συγκεκριμένα θέτουμε $M = N = 4$ και $K = L = 1$ (οπότε $a = 4$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} του πίνακα 6.1. Ο πίνακας σύνδεσης θα είναι ο

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

άρα $C^v = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα 6.3 ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που ορίσαμε θα είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : J_{1,1} = [0, 256] \times [0, 256] \rightarrow \mathbb{R}$. Επειδή ο C είναι θετικός είναι και μη αναγώγιμος (βλέπε θεώρημα 1.1 σελ. 21). Στα σχήματα 6.8 και 6.9 φαίνεται ο συγκεκριμένος ελκυστής που σύμφωνα με την εξίσωση 6.41 έχει διάσταση 2.1537.

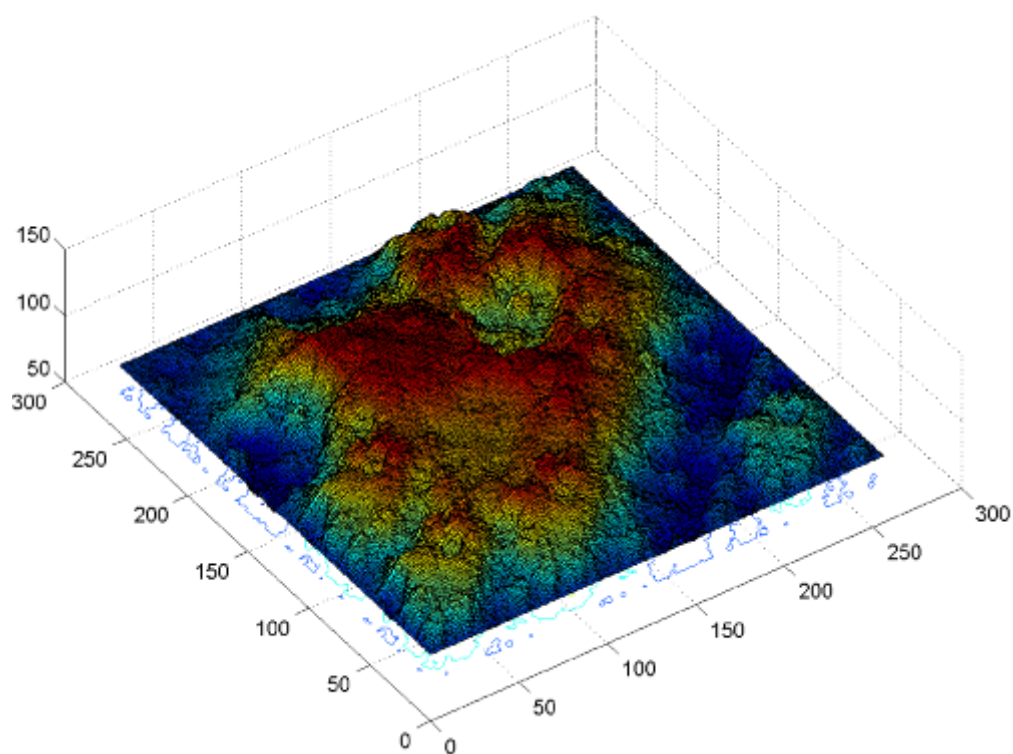


Σχήμα 6.7: Τα σημεία παρεμβολής ορίζουν 16 τομείς και 1 περιοχή.

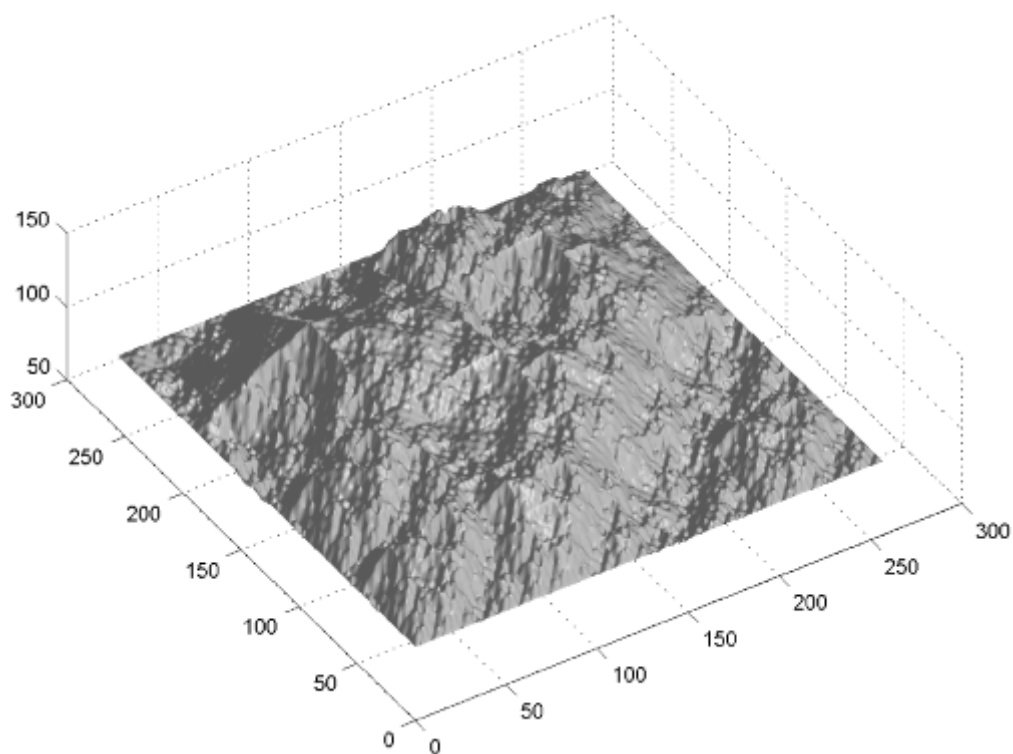
Δ						
		x				
		0	64	128	192	256
y	0	100	100	100	100	100
	64	100	130	130	140	100
	128	100	140	130	140	100
	192	100	100	130	140	100
	256	100	100	100	100	100

s_{ij}					
		j			
		1	2	3	4
i	1	0.45	0.40	-0.45	-0.15
	2	0.35	-0.15	0.15	-0.25
	3	-0.30	0.25	-0.45	0.45
	4	0.35	-0.35	0.20	0.25

Πίνακας 6.1: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος I.



Σχήμα 6.8: Ο ελκυστής του παραδείγματος I. Τα χρώματα εκφράζουν τις τιμές στον άξονα z . Η διάσταση του ελκυστή είναι 2.1537.



Σχήμα 6.9: Ο ελκυστής του παραδείγματος I. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.

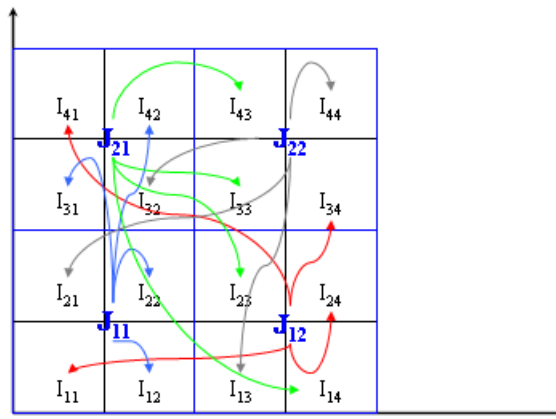


Παράδειγμα II. Εδώ έχουμε $M = N = 4$ και $K = L = 2$ (οπότε $a = 2$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} του πίνακα 6.2, ενώ ο πίνακας σύνδεσης θα είναι

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

άρα $C^v = (2, 1, 4, 3, 4, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 3, 4)$.

Τα σημεία παρεμβολής ικανοποιούν την συνθήκη του θεωρήματος 6.1, άρα ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που ορίσαμε θα είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [0, 256] \times [0, 256] \rightarrow \mathbb{R}$. Επειδή ο C^4 είναι θετικός, ο C θα είναι μη αναγώγιμος (βλέπε θεώρημα 1.1 σελ. 21). Στα σχήματα 6.11 και 6.12 φαίνεται ο συγκεκριμένος ελκυστής που σύμφωνα με το θεώρημα 6.2 έχει διάσταση 2.3325.



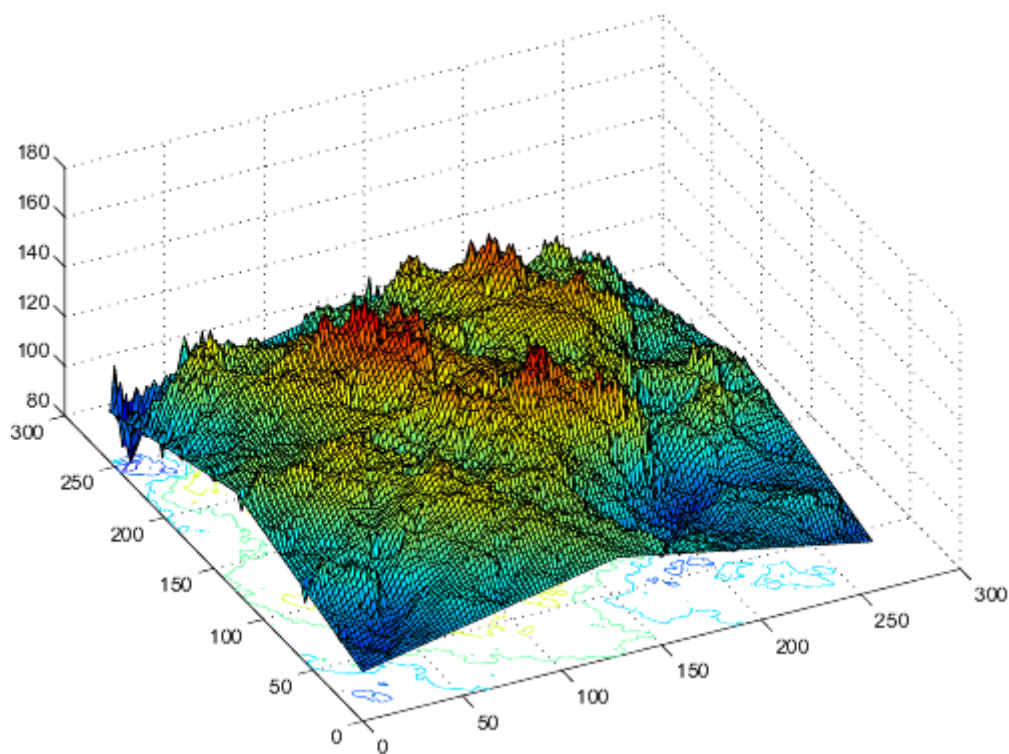
Σχήμα 6.10: Τα σημεία παρεμβολής ορίζουν 16 τομείς και 4 περιοχές.



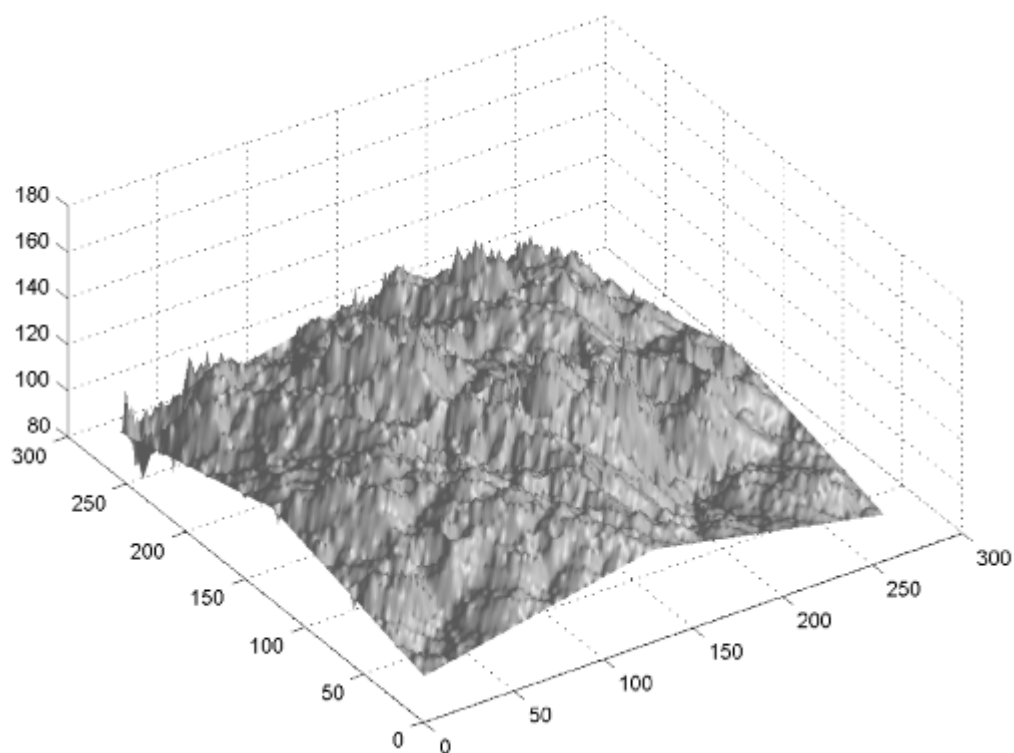
Δ						
		x				
		0	64	128	192	256
y	0	100	110	120	110	100
	64	110	130	130	100	110
	128	120	130	140	130	120
	192	110	140	130	140	110
	256	100	110	120	110	100

s_{ij}					
		j			
		1	2	3	4
i	1	0.45	0.55	-0.5	0.35
	2	0.5	-0.85	0.95	-0.75
	3	-0.45	0.85	-0.45	0.5
	4	-0.95	-0.55	0.75	0.65

Πίνακας 6.2: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος II.



Σχήμα 6.11: Ο ελκυστής του παραδείγματος II. Τα χρώματα εκφράζουν τις τιμές στον άξονα z . Η διάσταση του ελκυστή είναι 2.3325.



Σχήμα 6.12: Ο ελκυστής του παραδείγματος II. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.

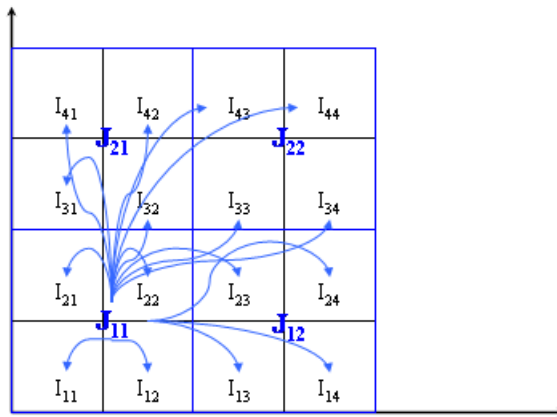


Παράδειγμα III. Και πάλι επιλέγουμε $M = N = 4$ και $K = L = 2$ (οπότε $a = 2$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} του πίνακα 6.3, ενώ ο πίνακας σύνδεσης θα είναι

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

άρα $C^v = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Τα σημεία παρεμβολής ικανοποιούν την συνθήκη της πρότασης 6.3, άρα ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που ορίσαμε θα είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [0, 256] \times [0, 256] \rightarrow \mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση ο C θα είναι αναγώγιμος, αλλά είναι πολλαπλάσιος ενός στοχαστικού πίνακα. Στα σχήματα 6.14 και 6.15 φαίνεται ο συγκεκριμένος ελκυστής που σύμφωνα με την εξίσωση 6.42 έχει διάσταση 2.5850.



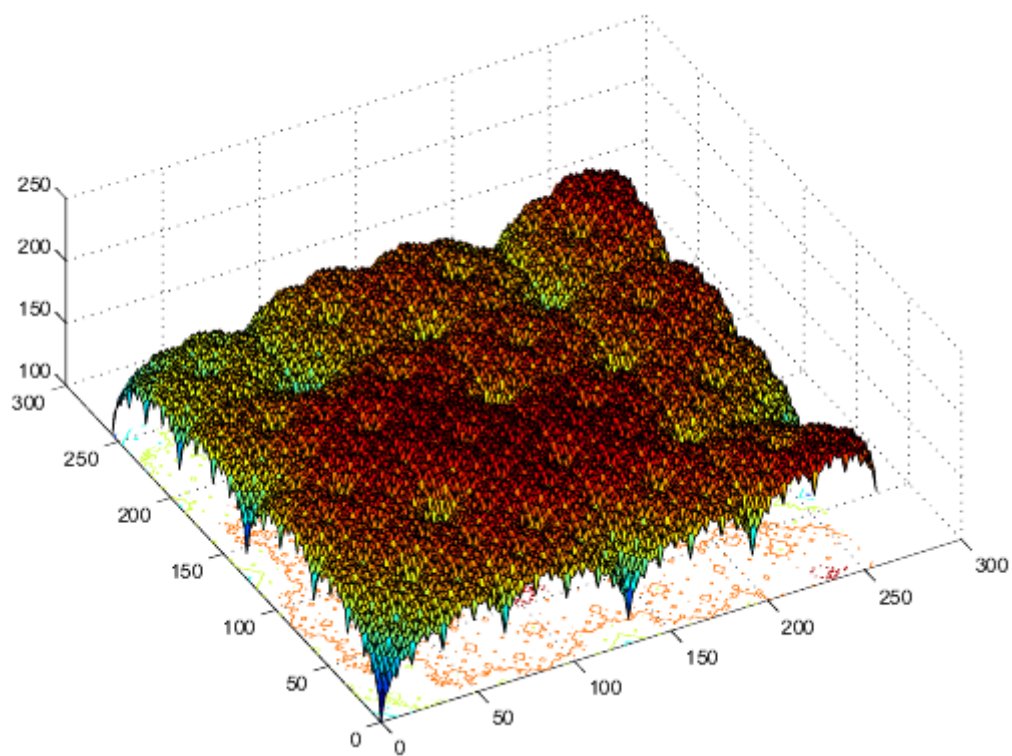
Σχήμα 6.13: Τα σημεία παρεμβολής ορίζουν 16 τομείς και 4 περιοχές. Όπως φαίνεται στο σχήμα χρησιμοποιείται μόνο η περιοχή J_{11} στις απεικονίσεις w_{ij} .



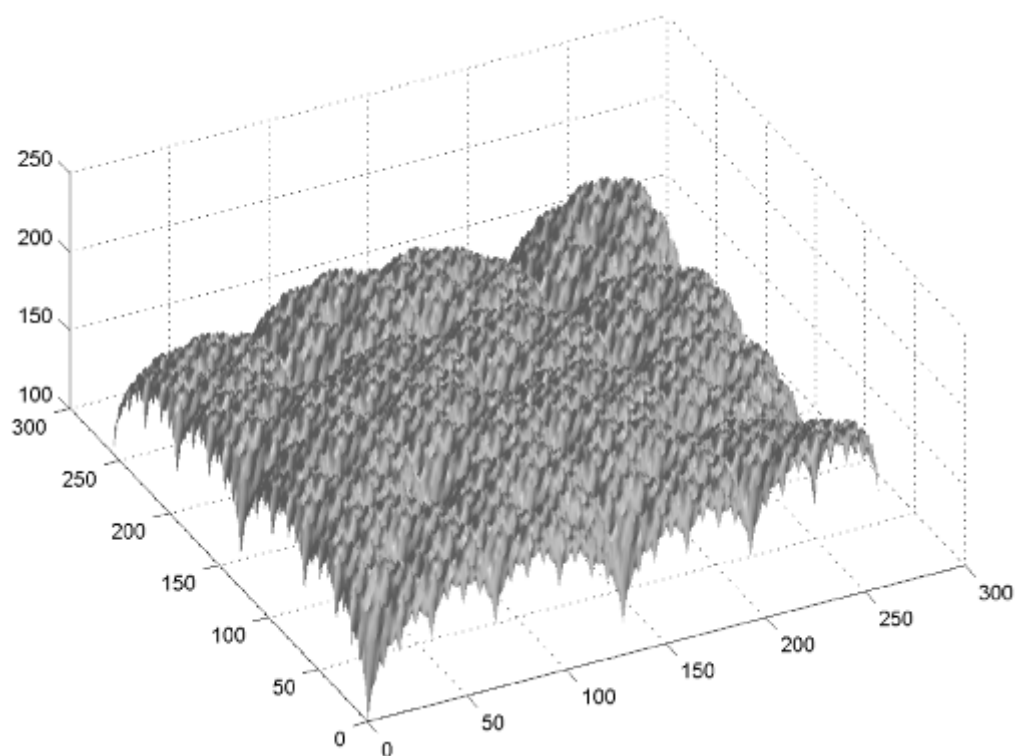
Δ						
		x				
		0	64	128	192	256
y	0	100	140	120	140	160
	64	140	140	160	140	110
	128	120	160	140	140	140
	192	130	120	140	130	140
	256	100	120	140	120	160

s_{ij}					
		j			
		1	2	3	4
i	1	0.75	0.75	0.75	0.75
	2	0.75	0.75	0.75	0.75
	3	0.75	0.75	0.75	0.75
	4	0.75	0.75	0.75	0.75

Πίνακας 6.3: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος ΙΙΙ.



Σχήμα 6.14: Ο ελκυστής του παραδείγματος III. Τα χρώματα εκφράζουν τις τιμές στον άξονα z . Η διάσταση του ελκυστή είναι 2.5850.



Σχήμα 6.15: Ο ελκυστής του παραδείγματος ΙΙΙ. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.

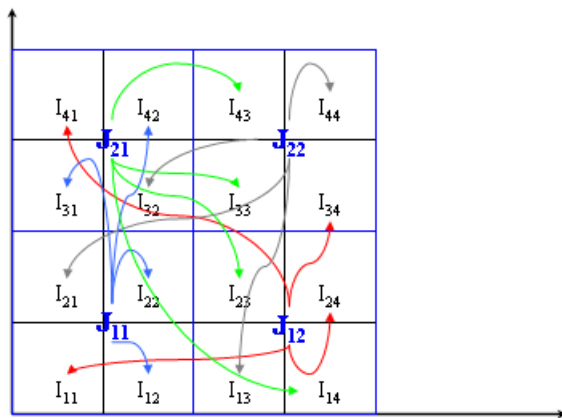


Παράδειγμα IV. Ομοίως, έχουμε $M = N = 4$ και $K = L = 2$ (οπότε $a = 2$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} του πίνακα 6.4, ενώ ο πίνακας σύνδεσης θα είναι

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

άρα $C^v = (2, 1, 4, 3, 4, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 3, 4)$.

Τα σημεία παρεμβολής ικανοποιούν την συνθήκη της πρότασης 6.3, άρα ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που ορίσαμε θα είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [0, 256] \times [0, 256] \rightarrow \mathbb{R}$. Ο C είναι μη αναγώγιμος (όπως και στο παράδειγμα II). Στα σχήματα 6.17 και 6.18 φαίνεται ο συγκεκριμένος ελκυστής που σύμφωνα με το θεώρημα 6.2 έχει διάσταση 2.3785.



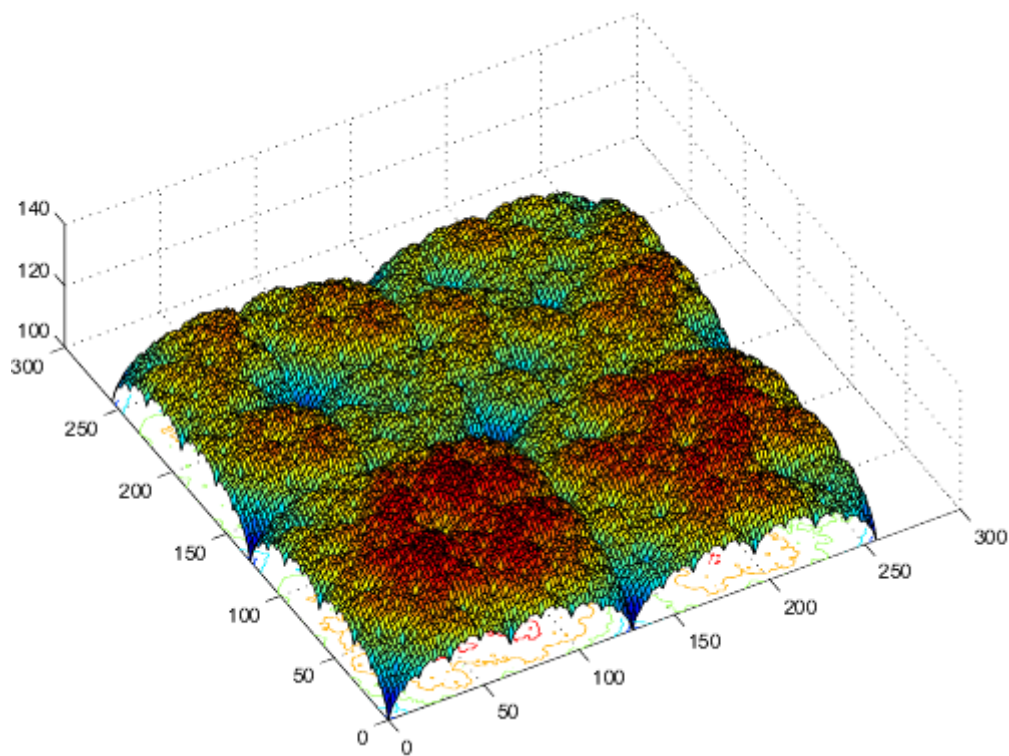
Σχήμα 6.16: Τα σημεία παρεμβολής ορίζουν 16 τομείς και 4 περιοχές.



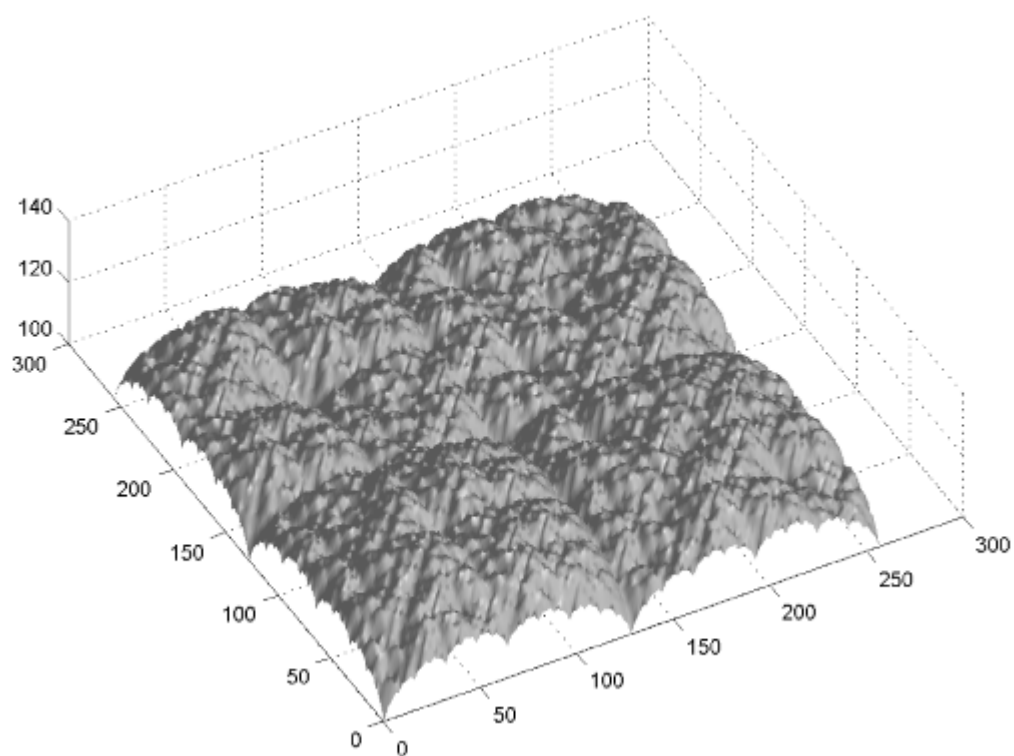
Δ						
		x				
		0	64	128	192	256
y	0	100	110	100	110	100
	64	110	115	110	115	110
	128	100	110	100	110	100
	192	110	100	110	105	110
	256	100	110	100	110	100

s_{ij}					
		j			
		1	2	3	4
i	1	0.65	0.65	0.65	0.65
	2	0.65	0.65	0.65	0.65
	3	0.65	0.65	0.65	0.65
	4	0.65	0.65	0.65	0.65

Πίνακας 6.4: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος IV.



Σχήμα 6.17: Ο ελκυστής του παραδείγματος IV. Τα χρώματα εκφράζουν τις τιμές στον άξονα z . Η διάσταση του ελκυστή είναι 2.3785.



Σχήμα 6.18: Ο ελκυστής του παραδείγματος IV. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.

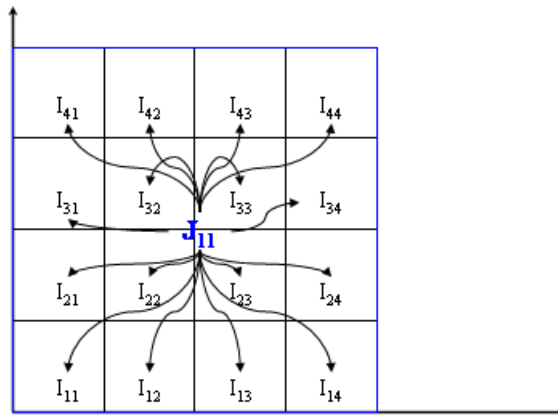


Παράδειγμα V. Κατασκευάζουμε ακόμη μία Αυτοόμοια Bivariate Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής, αλλά αυτή τη φορά θα χρησιμοποιήσουμε μη συνευθειακά σημεία παρεμβολής. Έχουμε $M = N = 4$ και $K = L = 1$ (οπότε $a = 4$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} του πίνακα 6.5, ενώ ο πίνακας σύνδεσης θα είναι (όπως και στο παράδειγμα I)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

άρα $C^v = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Τα σημεία παρεμβολής ικανοποιούν την συνθήκη της πρότασης 6.3, άρα ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που ορίσαμε θα είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [0, 256] \times [0, 256] \rightarrow \mathbb{R}$. Στα σχήματα 6.20 και 6.21 φαίνεται ο συγκεκριμένος ελκυστής που σύμφωνα με το θεώρημα 6.2 έχει διάσταση 2.1315.



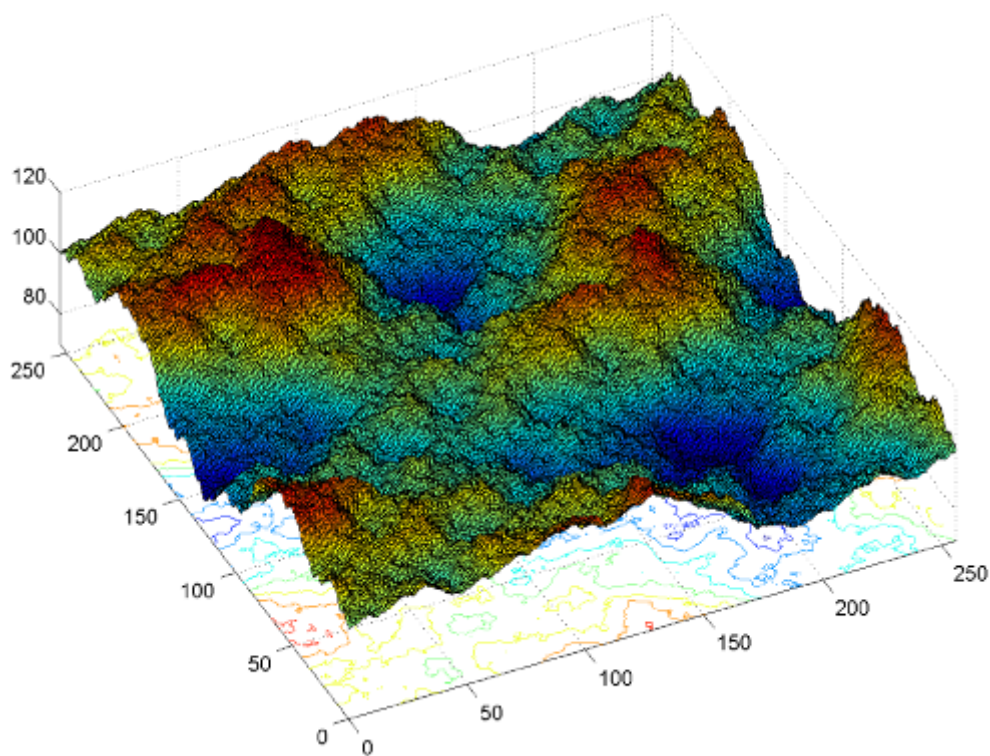
Σχήμα 6.19: Τα σημεία παρεμβολής ορίζουν 16 τομείς και 1 περιοχή.



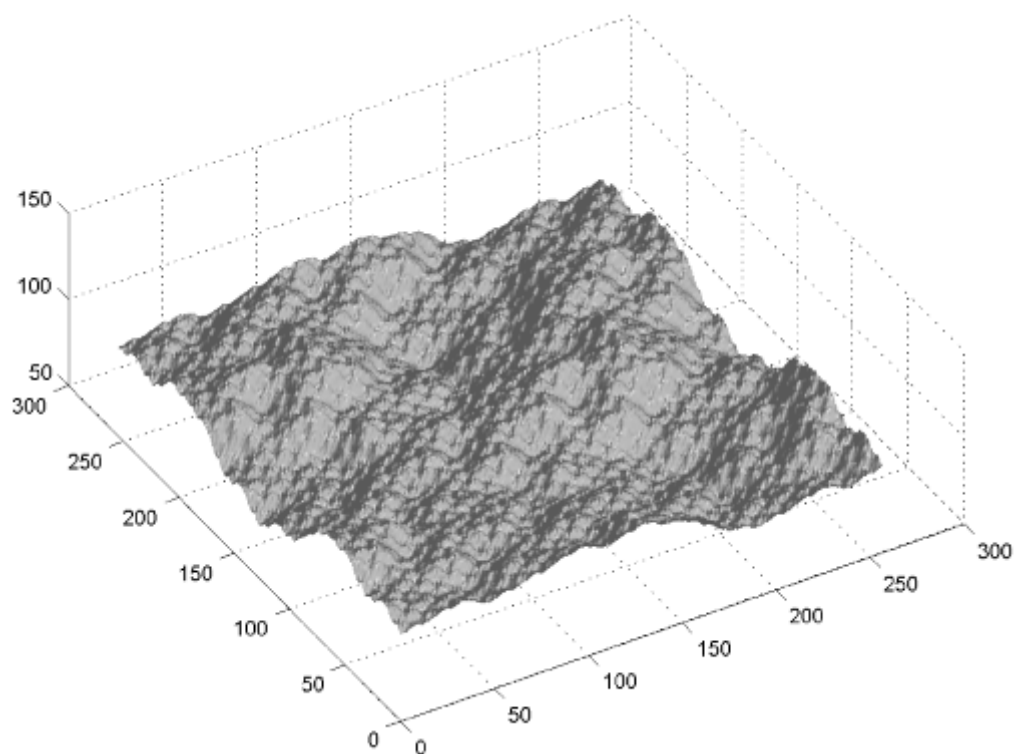
Δ						
		x				
		0	64	128	192	256
y	0	100	105	115	090	100
	64	115	100	090	080	115
	128	080	095	105	115	080
	192	110	120	080	110	110
	256	100	105	115	090	100

s_{ij}					
		j			
		1	2	3	4
i	1	0.30	0.30	0.30	0.30
	2	0.30	0.30	0.30	0.30
	3	0.30	0.30	0.30	0.30
	4	0.30	0.30	0.30	0.30

Πίνακας 6.5: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος V.



Σχήμα 6.20: Ο ελκυστής του παραδείγματος V. Τα χρώματα εκφράζουν τις τιμές στον άξονα z . Η διάσταση του ελκυστή είναι 2.1315.



Σχήμα 6.21: Ο ελκυστής του παραδείγματος V. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.



Παράδειγμα VI. Και σε αυτό το παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε μη συνενθειακά (στα σύνορα των περιοχών) σημεία παρεμβολής. Έχουμε $M = N = 6$ και $K = L = 2$ (οπότε $a = 3$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} του πίνακα 6.6, ενώ ο πίνακας συνδέσεων θα έχει διάσταση 36×36 , επομένως είναι δύσκολο να τον σχεδιάσουμε. Αντί για τον C δίνουμε μόνο το διάνυσμα C^v .

$$C^v = (1, 3, 4, 1, 2, 2, 1, 3, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 1, 4, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 4, 2, 2, 4, 3, 1, 2, 1, 3, 4, 2, 4, 1, 2)$$

Τα σημεία παρεμβολής ικανοποιούν την συνθήκη της πρότασης 6.3, άρα ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που ορίσαμε θα είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [0, 256] \times [0, 256] \rightarrow \mathbb{R}$. Στα σχήματα 6.23 και 6.24 φαίνεται ο συγκεκριμένος ελκυστής που σύμφωνα με το θεώρημα 6.2 έχει διάσταση 2.3319. Στο σχήμα 6.25 φαίνεται ο ελκυστής του ίδιου ΠΣΕΣ αλλά με όλους τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας ίσους με το μηδέν.

I_{61}	I_{62}	I_{63}	I_{64}	I_{65}	I_{66}
I_{51}	J_{21} I_{52}	I_{53}	I_{54}	J_{22} I_{55}	I_{56}
I_{41}	I_{42}	I_{43}	I_{44}	I_{45}	I_{46}
I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}
I_{21}	J_{11} I_{22}	I_{23}	I_{24}	J_{12} I_{25}	I_{26}
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}

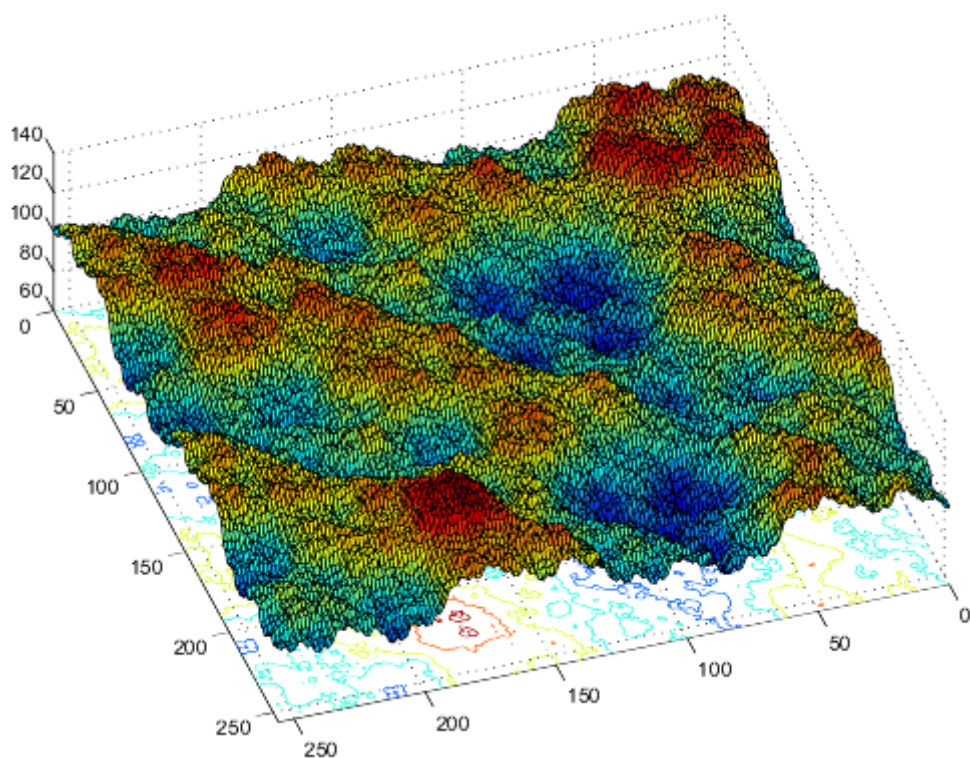
Σχήμα 6.22: Τα σημεία παρεμβολής ορίζουν 36 τομείς και 4 περιοχές.



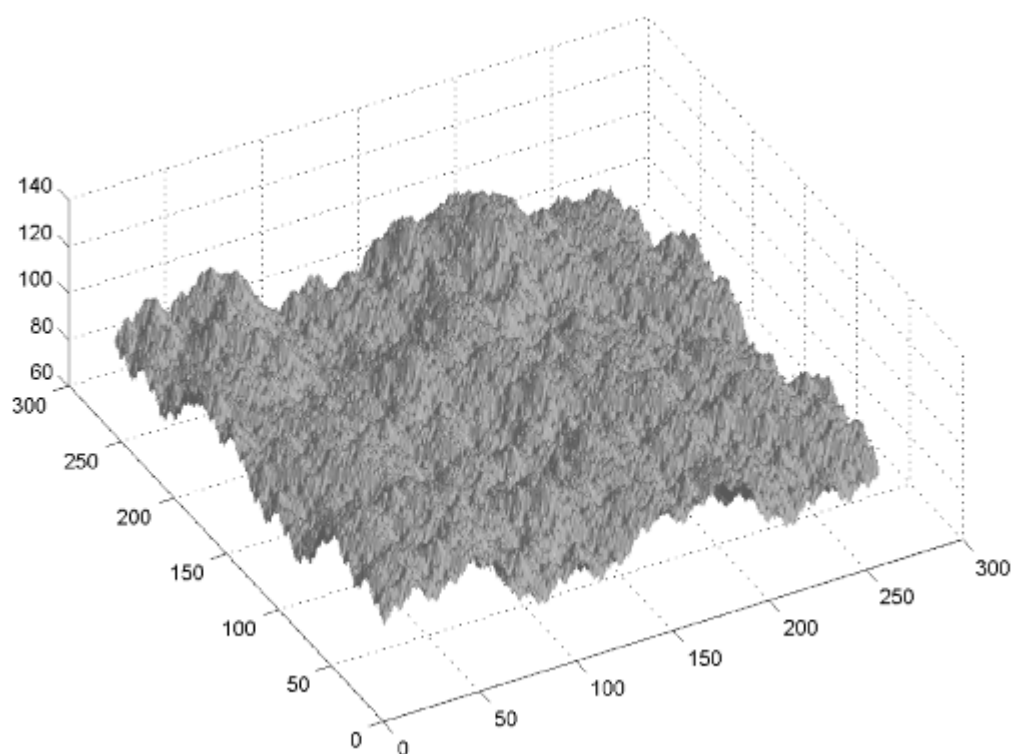
Δ								
		x						
		0	$\frac{256}{6}$	$2\frac{256}{6}$	128	$4\frac{256}{6}$	$5\frac{256}{6}$	256
y	0	100	115	090	100	115	090	100
	$\frac{256}{6}$	115	122	110	115	090	110	115
	$2\frac{256}{6}$	090	110	080	090	110	120	090
	128	100	115	090	100	115	090	100
	$4\frac{256}{6}$	115	090	100	115	090	100	115
	$5\frac{256}{6}$	090	110	080	090	125	110	090
	256	100	115	090	100	115	090	100

s_{ij}							
		j					
		1	2	3	4	5	6
i	1	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38
	2	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38
	3	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38
	4	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38
	5	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38
	6	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38

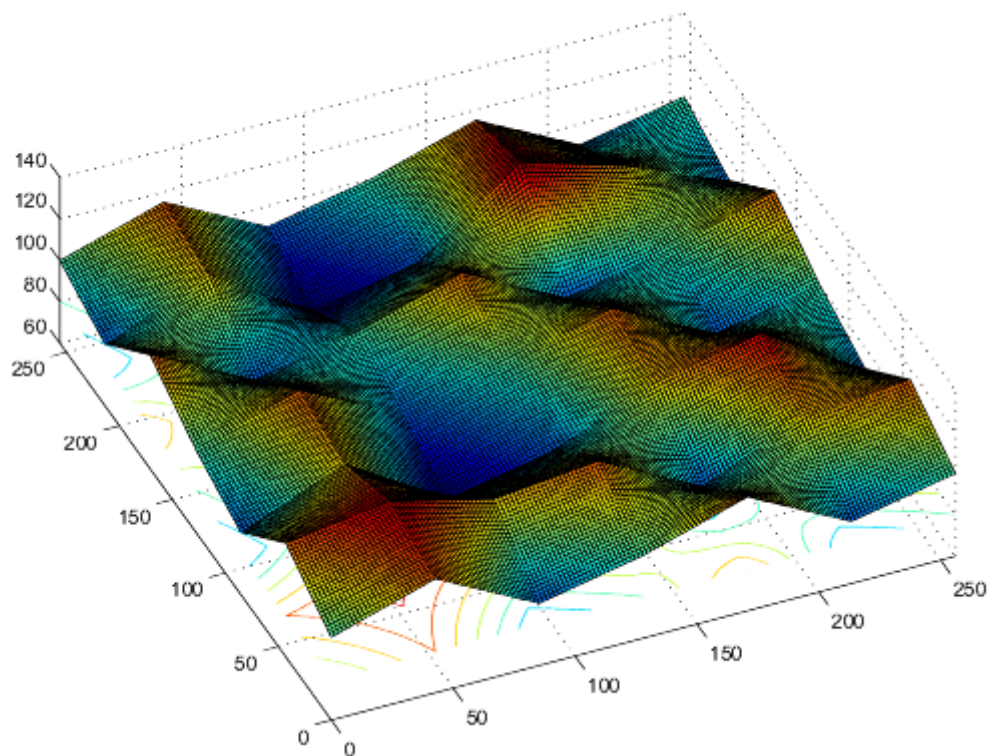
Πίνακας 6.6: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος VI.



Σχήμα 6.23: Ο ελκυστής του παραδείγματος VI. Τα χρώματα εκφράζουν τις τιμές στον άξονα z . Η διάσταση του ελκυστή είναι 2.3319.



Σχήμα 6.24: Ο ελκυστής του παραδείγματος VI. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.



Σχήμα 6.25: Ο ελκυστής του παραδείγματος VI για $s_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$, $j = 1, 2, \dots, 6$. Τα χρώματα εκφράζουν τις τιμές στον άξονα z . Η διάσταση του ελκυστή είναι 2.



Κεφάλαιο 7

Κλειστές Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής

Nitens lux,
horrenda procella
tenebris aeternis involuta.
Εκτυφλωτικό φως,
τρομερή καταιγίδα
τυλιγμένη από την αιώνια νύχτα.

Σχόλιο του Evarist Galois στα χαρτιά με τις αποδείξεις της θεωρίας του που άφησε την τελευταία νύχτα πριν πεθάνει σε μονομαχία.

Στο κεφάλαιο 6 περιγράψαμε την μεθοδολογία κατασκευής bivariate fractal επιφανειών παρεμβολής σε ορθογώνιο πλέγμα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μεθοδολογία για να κατασκευάσουμε κλειστές fractal επιφάνειες. Πιο συγκεκριμένα, κατασκευάζουμε μια απλή BFEP και στη συνέχεια με μετατροπή σε σφαιρικές συντεταγμένες παίρνουμε μια κλειστή επιφάνεια. Παρακάτω θα δώσουμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να είναι σωστή μια τέτοια κατασκευή και θα δώσουμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με τις Hausdorff και box διαστάσεις των κλειστών επιφανειών.

7.1 Καθορισμός των Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας

Σε πολλές περιπτώσεις είναι αναγκαίο ο ελκυστής ενός bivariate ΠΣΕΣ, συνδεδεμένου με τα σημεία παρεμβολής του συνόλου $\Delta = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$ (όπως το περιγράψαμε στο κεφάλαιο 6), να περιέχεται σε ένα ορισμένο ορθογώνιο $R = [0, 1] \times [0, p] \times [a, b]$. Το παρακάτω θεώρημα δίνει τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} ώστε ώστε να συμβαίνει αυτό. Υποθέτουμε, βέβαια, ότι για τα σημεία παρεμβολής ισχύει $a \leq z_{ij} \leq b$, $i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1

Έστω ένα bivariate ΠΣΕΣ, που συνδέεται με τα σημεία παρεμβολής του Δ , ορισμένο όπως στο



κεφάλαιο 6. Το γράφημα του ελκυστή αυτού του ΠΣΕΣ παραμένει μέσα σε ένα δοσμένο ορθογώνιο $R = [0, 1] \times [0, p] \times [a, b]$ ($\Delta \subset R$), αν για τους συντελεστές s_{ij} ισχύει

$$s_{ij}^{\min} \leq s_{ij} \leq s_{ij}^{\max},$$

όπου

$$s_{ij}^{\max} = \min \left\{ \frac{b - z_{i-1,j-1}}{b - \hat{z}_{k-1,l-1}}, \frac{b - z_{i-1,j}}{b - \hat{z}_{k-1,l}}, \frac{b - z_{i,j-1}}{b - \hat{z}_{k,l-1}}, \frac{b - z_{i,j}}{b - \hat{z}_{k,l}}, \right. \\ \left. \frac{a - z_{i-1,j-1}}{a - \hat{z}_{k-1,l-1}}, \frac{a - z_{i-1,j}}{a - \hat{z}_{k-1,l}}, \frac{a - z_{i,j-1}}{a - \hat{z}_{k,l-1}}, \frac{a - z_{i,j}}{a - \hat{z}_{k,l}} \right\}$$

$$s_{ij}^{\min} = \max \left\{ \frac{b - z_{i-1,j-1}}{a - \hat{z}_{k-1,l-1}}, \frac{b - z_{i-1,j}}{a - \hat{z}_{k-1,l}}, \frac{b - z_{i,j-1}}{a - \hat{z}_{k,l-1}}, \frac{b - z_{i,j}}{a - \hat{z}_{k,l}}, \right. \\ \left. \frac{a - z_{i-1,j-1}}{b - \hat{z}_{k-1,l-1}}, \frac{a - z_{i-1,j}}{b - \hat{z}_{k-1,l}}, \frac{a - z_{i,j-1}}{b - \hat{z}_{k,l-1}}, \frac{a - z_{i,j}}{b - \hat{z}_{k,l}} \right\}$$

και $(k, l) = \mathbb{J}(i, j)$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$, για μη μηδενικούς παρονομαστές.

Απόδειξη.

Η συνάρτηση

$$F_{ij}(x, y, z) = e_{ij}x + f_{ij}y + g_{ij}xy + s_{ij}z + k_{ij}$$

είναι ορισμένη στο ορθογώνιο $R_{kl} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l] \times [a, b]$, όπου $(k, l) = \mathbb{J}(i, j)$.

Αν “σταθεροποιήσουμε” δύο από τις μεταβλητές αυτής της συνάρτησης και θεωρήσουμε τη συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το γράφημά της θα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Οπότε, η F_{ij} θα έχει μέγιστη (αντίστοιχα ελάχιστη) τιμή σε μια από τις οχτώ κορυφές του R_{kl} . Οι οχτώ κορυφές του R_{kl} είναι τα σημεία $(x_{k+\mu}, y_{l+\nu}, a)$ και $(x_{k+\mu}, y_{l+\nu}, b)$, $\mu, \nu = -1, 0$. Επιλέγουμε τους συντελεστές s_{ij} έτσι ώστε

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} a &\leq F_{ij}(x_{k+\mu}, y_{l+\nu}, a) \leq b \\ a &\leq F_{ij}(x_{k+\mu}, y_{l+\nu}, b) \leq b \end{aligned} \right\} & \Rightarrow \\ & \left. \begin{aligned} a &\leq e_{ij}x_{k+\mu} + f_{ij}y_{l+\nu} + g_{ij}x_{k+\mu}y_{l+\nu} + s_{ij}a + k_{ij} \leq b \\ a &\leq e_{ij}x_{k+\mu} + f_{ij}y_{l+\nu} + g_{ij}x_{k+\mu}y_{l+\nu} + s_{ij}b + k_{ij} \leq b \end{aligned} \right\} & \Rightarrow \\ & \begin{aligned} a &\leq e_{ij}x_{k+\mu} + f_{ij}y_{l+\nu} + g_{ij}x_{k+\mu}y_{l+\nu} + s_{ij}a + k_{ij} + s_{ij}\hat{z}_{k+\mu,l+\nu} - s_{ij}\hat{z}_{k+\mu,l+\nu} \leq b \\ a &\leq e_{ij}x_{k+\mu} + f_{ij}y_{l+\nu} + g_{ij}x_{k+\mu}y_{l+\nu} + s_{ij}b + k_{ij} + s_{ij}\hat{z}_{k+\mu,l+\nu} - s_{ij}\hat{z}_{k+\mu,l+\nu} \leq b \end{aligned} \end{aligned}$$

Από (6.1)-(6.4) θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} a &\leq z_{i+\mu,j+\nu} + s_{ij}a - s_{ij}\hat{z}_{k+\mu,l+\nu} \leq b \\ a &\leq z_{i+\mu,j+\nu} + s_{ij}b - s_{ij}\hat{z}_{k+\mu,l+\nu} \leq b \end{aligned} \right\} & \Rightarrow \\ & \left. \begin{aligned} a - z_{i+\mu,j+\nu} &\leq s_{ij}(a - \hat{z}_{k+\mu,l+\nu}) \leq b - z_{i+\mu,j+\nu} \\ a - z_{i+\mu,j+\nu} &\leq s_{ij}(b - \hat{z}_{k+\mu,l+\nu}) \leq b - z_{i+\mu,j+\nu} \end{aligned} \right\} & \Rightarrow \\ & \left. \begin{aligned} \frac{a - z_{i+\mu,j+\nu}}{a - \hat{z}_{k+\mu,l+\nu}} &\geq s_{ij} \geq \frac{b - z_{i+\mu,j+\nu}}{a - \hat{z}_{k+\mu,l+\nu}} \\ \frac{a - z_{i+\mu,j+\nu}}{b - \hat{z}_{k+\mu,l+\nu}} &\leq s_{ij} \leq \frac{b - z_{i+\mu,j+\nu}}{b - \hat{z}_{k+\mu,l+\nu}} \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

για $\mu, \nu = -1, 0$ και μη μηδενικούς παρονομαστές, οπότε έχουμε το αποτέλεσμα. $\square$



7.2 Κατασκευή Κλειστών ΦΕΠ

Ένα πολύ γνωστό και πολύ χρήσιμο σύστημα συντεταγμένων είναι οι Σφαιρικές Συντεταγμένες. Το σύστημα αυτό είναι ιδανικό για περιγραφή σημείων που βρίσκονται πάνω σε μια σφαίρα ή ένα σφαιροειδές. Έστω

$$0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad r > 0$$

τότε ο $\gamma = (g_1, g_2, g_3)$ είναι ο μετασχηματισμός από σφαιρικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές συντεταγμένες, όπου

$$x = g_1(\theta, \phi, r) = r \cos \phi \cos \theta$$

$$y = g_2(\theta, \phi, r) = r \cos \phi \sin \theta$$

$$z = g_3(\theta, \phi, r) = r \sin \phi.$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια κλειστή Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής χρησιμοποιώντας το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.2

Έστω ένα σύνολο από σημεία παρεμβολής $\Delta_S = \{(\theta_i, \phi_j, r_{ij}) : i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$ δοσμένο σε σφαιρικές συντεταγμένες, τέτοιον ώστε $\theta_0 = 0, \theta_N = 2\pi, \theta_i - \theta_{i-1} = \delta, \phi_0 = -\frac{\pi}{2}, \phi_M = \frac{\pi}{2}, \phi_i - \phi_{i-1} = \delta$. Επίσης, έστω το σύνολο $Q_S \subset \Delta = \{(\hat{\theta}_k, \hat{\phi}_l, \hat{r}_{kl}) : k = 0, 1, \dots, K; l = 0, 1, \dots, L\}$ όπου $\hat{\theta}_0 = 0, \hat{\theta}_N = 2\pi, \hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{i-1} = \psi, \hat{\phi}_0 = -\frac{\pi}{2}, \hat{\phi}_M = \frac{\pi}{2}, \hat{\phi}_i - \hat{\phi}_{i-1} = \psi$ και η απεικόνιση $\mathbb{J}$ όπως ορίσθηκε στο κεφάλαιο 6. Έστω ότι το σύνολο G είναι ο ελκυστής αυτού του ΠΣΕΣ, και ότι ισχύουν

1. $\exists r_S, r_N \in \mathbb{R} : r_{i,0} = r_S, r_{j,M} = r_N, i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M$.
2. $D_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu] = 0, \nu = 1, 2, \dots, \alpha - 1, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$.
3. $U_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu] = 0, \nu = 1, 2, \dots, \alpha - 1, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$.
4. $L_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu] = R_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu], \nu = 1, 2, \dots, \alpha - 1, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$.
5. Οι συντελεστές s_{ij} έχουν επιλεγεί έτσι ώστε $G \subset [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [\epsilon, +\infty)$, για κάποιο $\epsilon > 0$.

Τότε το G είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $r(\theta, \phi)$ και το $\mathbf{g}(G)$ είναι μια συνεχής κλειστή ΦΕΠ.

Απόδειξη.

Το ότι το G είναι μια συνεχής επιφάνεια έχει αποδειχθεί στο κεφάλαιο 6 (βλέπε πρόταση 6.3). Οι τρεις πρώτες συνθήκες βεβαιώνουν ότι τα σύνορα της επιφάνειας (για $\phi = -\frac{\pi}{2}$ και $\phi = \frac{\pi}{2}$) είναι ευθύγραμμα τμήματα, παράλληλα στο $\theta\phi$ επίπεδο. Αυτό είναι αναγκαίο, επειδή η $\mathbf{g}$ πρέπει να απεικονίζει αυτά τα σύνορα σε δύο μόνο σημεία. Κάθε σημείο με $\phi = -\frac{\pi}{2}$ απεικονίζεται στο νότιο πόλο, ενώ κάθε σημείο με $\phi = \frac{\pi}{2}$ απεικονίζεται στο βόρειο πόλο. Η συνθήκη 4 εξασφαλίζει ότι τα άλλα δύο σύνορα θα είναι συμμετρικά, ως προς το επίπεδο $\theta = \pi$, οπότε θα “κολλάνε” μετά την εφαρμογή της $\mathbf{g}$. Η τελευταία συνθήκη εξασφαλίζει ότι $r > 0$. Αφού η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής, εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\mathbf{g}(G)$ είναι μια συνεχής κλειστή ΦΕΠ. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.1

Έστω το ΠΣΕΣ που ορίσθηκε στο θεώρημα 7.2, το οποίο ικανοποιεί όλες τις δοσμένες συνθήκες. Η εφαρμογή του μετασχηματισμού $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$, όπου

$$x = h_1(\theta, \phi, r) = \hat{a} \cdot r \cos \phi \cos \theta$$

$$y = h_2(\theta, \phi, r) = \hat{b} \cdot r \cos \phi \sin \theta$$

$$z = h_3(\theta, \phi, r) = \hat{c} \cdot r \sin \phi,$$



με $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} > 0$, θα δώσει μια συνεχής κλειστή FEΠ.

7.3 Η Διάσταση μιας Κλειστής FEΠ

Θα αποδείξουμε ότι η νέα κλειστή fractal επιφάνεια $\hat{G} = \mathbf{g}(G)$ έχει την ίδια Hausdorff διάσταση με την G . Θα αποδείξουμε επίσης και κάποιες χρήσιμες ανισότητες για την box διάσταση. Καταρχήν, ως θυμηθούμε κάποιες από τις ιδιότητες των διαστάσεων όπως τις είδαμε στο θεώρημα 3.2.

ΛΗΜΜΑ 7.1

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ η οποία πληροί συνθήκη Lipschitz και $G \subset \mathbb{R}^n$, τότε

$$\dim_H f(G) \leq \dim_H G, \quad \dim_B f(G) \leq \dim_B G.$$

Ιδιαίτέρως, αν η f είναι αμφιLipschitz τότε

$$\dim_H f(G) = \dim_H G, \quad \dim_B f(G) = \dim_B G.$$

ΛΗΜΜΑ 7.2

Η διάσταση του Hausdorff είναι αριθμησίμως σταθερή, δηλαδή

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H E_i,$$

όπου $E_i \subset \mathbb{R}^n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.3

Έστω ότι G και $\hat{G} = \mathbf{g}(G)$ είναι τα γραφήματα της BFEΠ και της κλειστής BFEΠ αντίστοιχα, όπως περιγράφονται στο θεώρημα 7.2. Τότε

$$\dim_H G = \dim_H \hat{G}.$$

Απόδειξη.

Ας υποθέσουμε ότι η $r(\theta, \phi)$, $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι η συνεχής συνάρτηση με γράφημα G και ότι a, b είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της. Ορίζουμε $B_n = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}] \times [a, b]$ και ως

$$\mathbf{g}_n : B_n \rightarrow \mathbb{R}^3$$

τον περιορισμό της $\mathbf{g}$ στο B_n , που πληροί συνθήκη Lipschitz. Στη συνέχεια, θέτουμε $\hat{G}_n = \mathbf{g}_n(G)$ και $\hat{G}_n^{(\nu)}$ την τομή του $\mathbf{g}_n(G)$ με το ν -οστό οχταμόριο, $\nu = 1, 2, \dots, 8$. Από την κατασκευή του G (συνθήκη 5 του θεωρήματος 7.2), έχουμε ότι $x + y + z \geq a$, για $(x, y, z) \in \hat{G}_n^{(1)}$, οπότε η κυρτή θήκη $S_n = \text{conv}(\hat{G}_n^{(1)})$ είναι ένα κυρτό και συμπαγές σύνολο που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων. Η συνάρτηση $\mathbf{g}_n^{-1}$ είναι καλά ορισμένη στο S_n και έχει όλες τις μερικές παραγώγους της συνεχείς (άρα φραγμένες) στο S_n . Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής αποδεικνύεται εύκολα ότι η $\mathbf{g}_n^{-1}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση που πληροί συνθήκη Lipschitz. Έτσι, χρησιμοποιώντας το λήμμα 7.1, θα έχουμε

$$\dim_H \hat{G}_n^{(1)} = \dim_H \left(G \cap \left([0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}] \times [a, b] \right) \right).$$

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία παίρνουμε ανάλογες σχέσεις για τα υπόλοιπα οχταμόρια. Οπότε,

$$\dim_H \hat{G}_n = \dim_H (\mathbf{g}_n(G)) = \dim_H (G \cap B_n). \quad (7.1)$$



Άρα,

$$\begin{aligned}
 \dim_H G &= \dim_H \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G \cap B_n) \bigcup \left\{ r(\theta, \pm \frac{\pi}{2}), \theta \in [0, 2\pi] \right\} \right) \\
 &= \dim_H \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G \cap B_n) \right) \\
 &= \sup \{ \dim_H (G \cap B_n), n \in \mathbb{N} \} \quad (\text{από το λήμμα 7.2}) \\
 &= \sup \{ \dim_H \mathbf{g}_n(G), n \in \mathbb{N} \} \quad (\text{από την 7.1}) \\
 &= \dim_H \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{g}_n(G) \right) \quad (\text{από το λήμμα 7.2}) \\
 &= \dim_H \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{G}_n \bigcup \left\{ \left(0, 0, r(0, \frac{\pi}{2}) \right), \left(0, 0, r(0, -\frac{\pi}{2}) \right) \right\} \right) \\
 &= \dim_H \hat{G}.
 \end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7.1

Κάθε άλλη “αριθμησίμως σταθερή” fractal διάσταση (όπως η packing διάσταση, βλέπε [Mat95] σελ. 81) ικανοποιεί, επίσης, το θεώρημα 7.3.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7.2

Για την box διάσταση, η οποία δεν είναι αριθμησίμως σταθερή, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \dim_B (G \cap B_n) &= \dim_B \hat{G}_n, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \\
 \sup \{ \dim_B (G \cap B_n) : n \in \mathbb{N} \} &\leq \dim_B \hat{G} = \dim_B \mathbf{g}(G) \leq \dim_B G.
 \end{aligned}$$

7.4 Παραδείγματα

Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα κλειστών fractal επιφανειών παρεμβολής που κατασκευάστηκαν σύμφωνα με την μέθοδο που περιγράψαμε.

Παράδειγμα I. Θέτουμε $M = N = 4$ και $K = L = 2$ (οπότε $a = 2$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} του πίνακα 7.1. Το διάνυσμα C^v είναι $C^v = (2, 1, 4, 3, 4, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 3, 4)$.

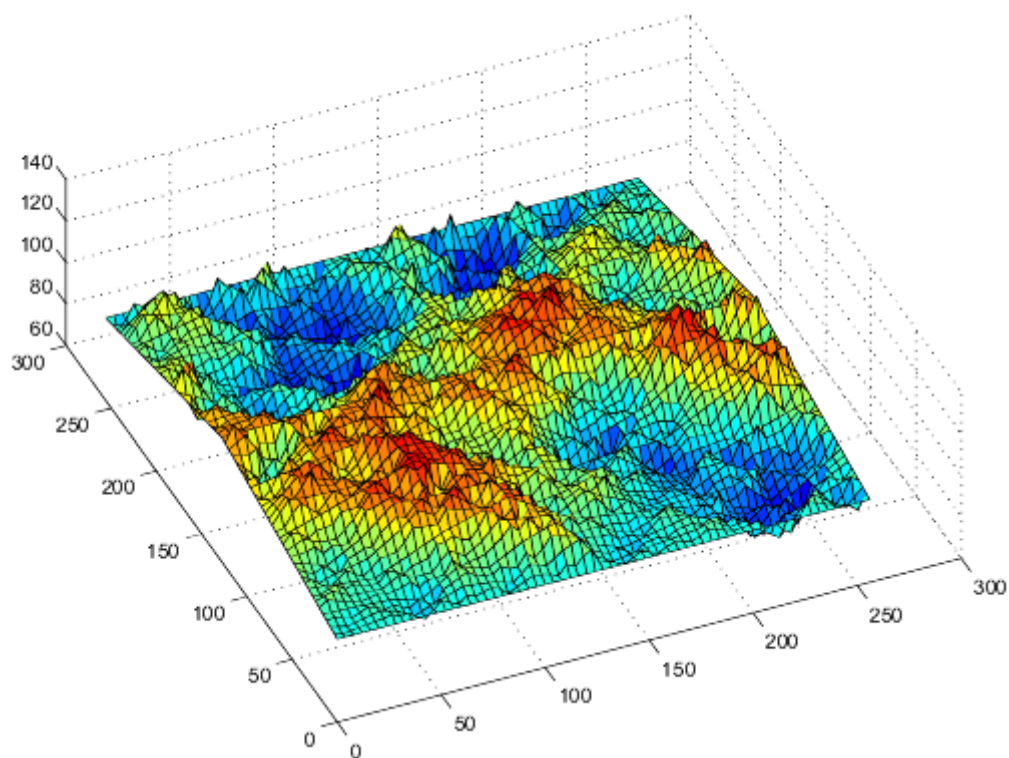
Σύμφωνα με το θεώρημα 6.3 ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που ορίσαμε θα είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [0, 256] \times [0, 256] \rightarrow \mathbb{R}$. Στο σχήμα 7.1 φαίνεται η BFEP που προκύπτει, ενώ στα 7.2 και 7.3 η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού $\mathbf{g}$.



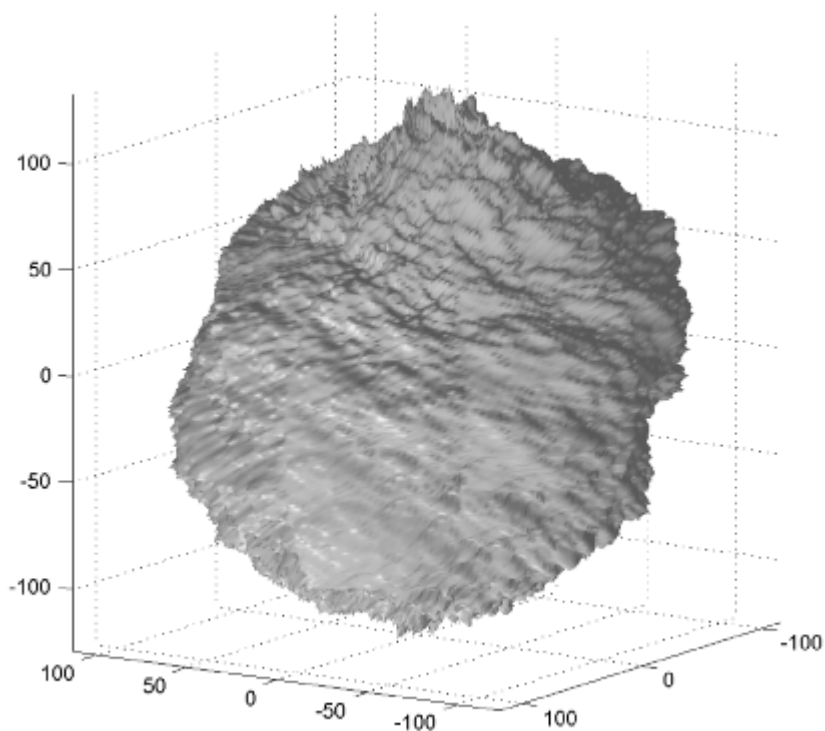
Δ						
		x				
		0	64	128	192	256
y	0	100	100	100	100	100
	64	110	130	110	090	110
	128	120	120	120	120	120
	192	110	85	110	110	110
	256	100	100	100	100	100

s_{ij}					
		j			
		1	2	3	4
i	1	0.42	0.7	-0.34	0.65
	2	0.7	-0.65	0.65	-0.85
	3	-0.75	0.75	-0.55	0.65
	4	-0.65	-0.75	0.95	0.55

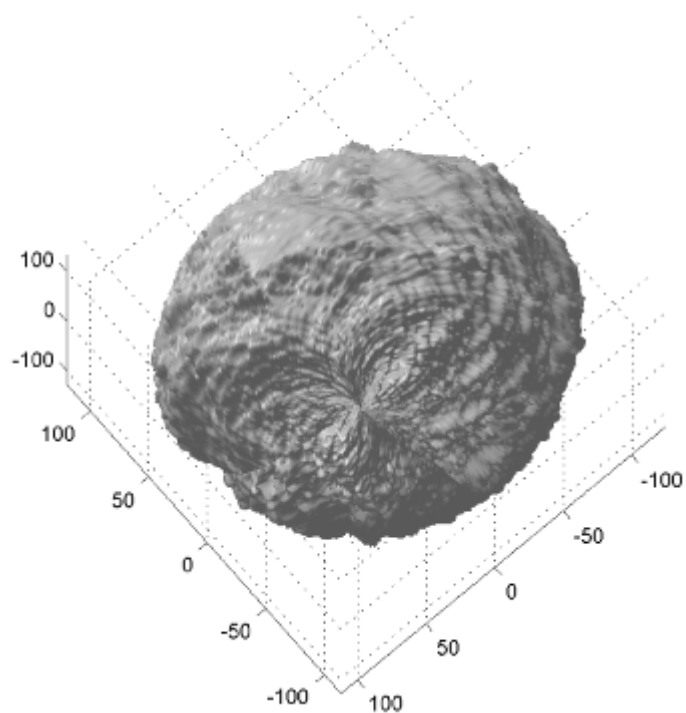
Πίνακας 7.1: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος I.



Σχήμα 7.1: Ο ελκυστής του παραδείγματος I. Τα χρώματα εκφράζουν τις τιμές στον άξονα z .



Σχήμα 7.2: Η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού g στην επιφάνεια του σχήματος 7.1. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.



Σχήμα 7.3: Η κλειστή επιφάνεια του σχήματος 7.2, κοιτώντας την από το νότιο πόλο.



Παράδειγμα II. Θέτουμε $M = N = 8$ και $K = L = 4$ (οπότε $a = 2$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} του πίνακα 7.2. Το διάγραμμα C^v είναι

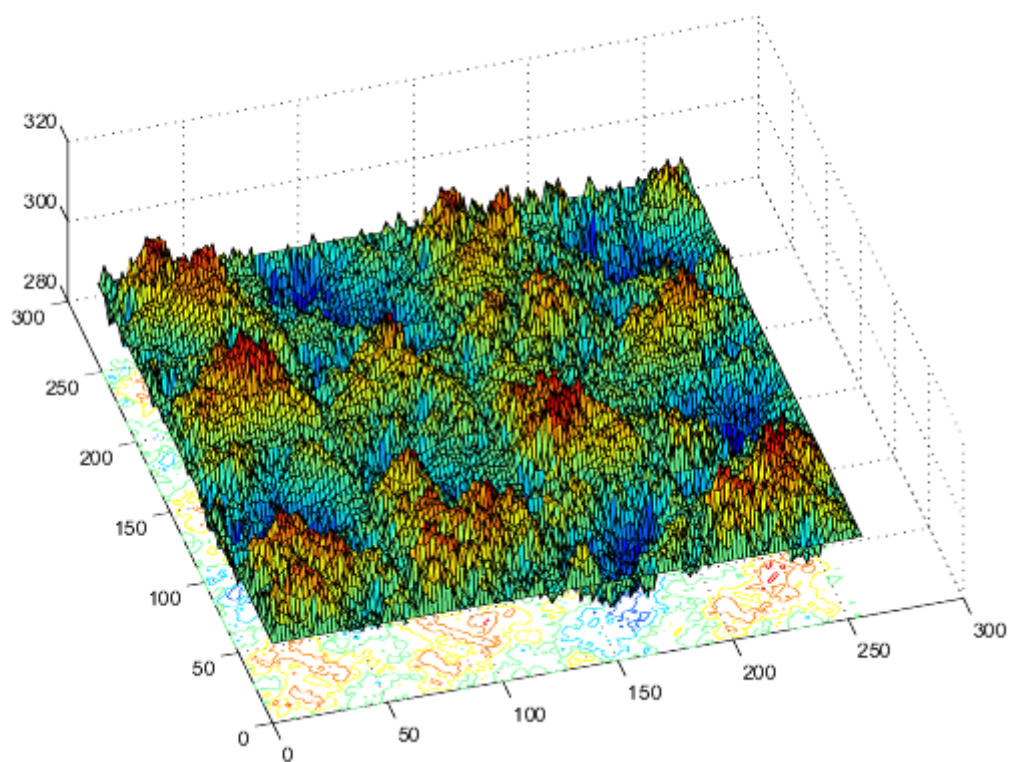
$$C^v = (\begin{array}{l} 5, 12, 1, 10, 6, 3, 1, 6, 4, 2, 13, 16, 4, 12, 14, 5, 15, 7, 9, 7, 8, 12, 2, 5, \\ 8, 9, 10, 11, 16, 7, 3, 2, 7, 14, 12, 6, 10, 11, 15, 4, 15, 16, 2, 8, 3, 1, 7, 16, 5, 6, \\ 10, 9, 4, 11, 8, 13, 3, 6, 2, 12, 3, 6, 12, 9, 11, 5, 2, 4, 9, 10, 16, 3, 10, 2, 7, 4, 9, \\ 15, 5, 12, 10, 16, 4, 8, 1, 6, 5, 10, 12, 3, 7, 9, 1, 4, 2, 7, 12, 16, 13, 5, 1, 2, 6, 1, \\ 9, 11, 16, 3, 4, 8, 12, 11, 3, 1, 6, 8, 14, 13, 1, 13, 12, 16, 4, 8). \end{array}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 6.3 ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που ορίσαμε θα είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [0, 256] \times [0, 256] \rightarrow \mathbb{R}$. Στο σχήμα 7.4 φαίνεται η BFEΠ που προκύπτει για $P_0 = 300$, ενώ στα 7.5, 7.6 και 7.7 οι κλειστές επιφάνειες που προκύπτουν μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού g για διάφορες τιμές του P_0 .

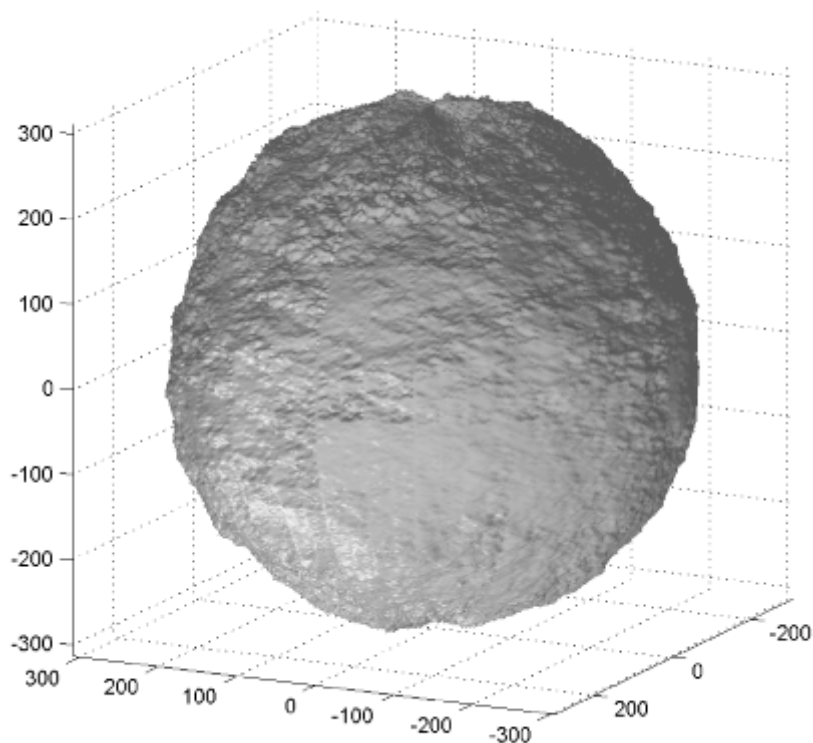
Δ										
		x								
		0	32	64	96	128	160	192	224	256
y	0	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00
	32	P_0+00	P_0+12	P_0+00	P_0-11	P_0+00	P_0+15	P_0+00	P_0+13	P_0+00
	64	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00
	96	P_0+00	P_0+11	P_0+00	P_0-05	P_0+00	P_0+08	P_0+00	P_0-11	P_0+00
	128	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00
	160	P_0+00	P_0-12	P_0+00	P_0+13	P_0+00	P_0+04	P_0+00	P_0+08	P_0+00
	192	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00
	224	P_0+00	P_0+14	P_0+00	P_0-15	P_0+00	P_0+11	P_0+00	P_0-09	P_0+00
	256	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00	P_0+00

s_{ij}									
		j							
		1	2	3	4	5	6	7	8
i	1	-0.85	+0.70	-0.85	-0.65	+0.50	-0.73	+0.41	-0.88
	2	-0.65	-0.73	-0.55	+0.55	-0.65	+0.83	-0.61	+0.58
	3	+0.85	+0.70	+0.85	-0.65	+0.50	-0.73	+0.41	-0.88
	4	-0.65	-0.73	-0.45	+0.55	-0.65	+0.83	-0.61	+0.48
	5	+0.85	+0.70	-0.85	-0.75	+0.50	-0.73	+0.41	-0.88
	6	-0.65	-0.73	+0.50	-0.55	-0.65	+0.83	-0.61	+0.90
	7	+0.85	+0.70	+0.85	+0.50	+0.50	-0.73	+0.71	-0.88
	8	-0.65	-0.73	-0.45	-0.55	-0.65	+0.83	-0.61	+0.78

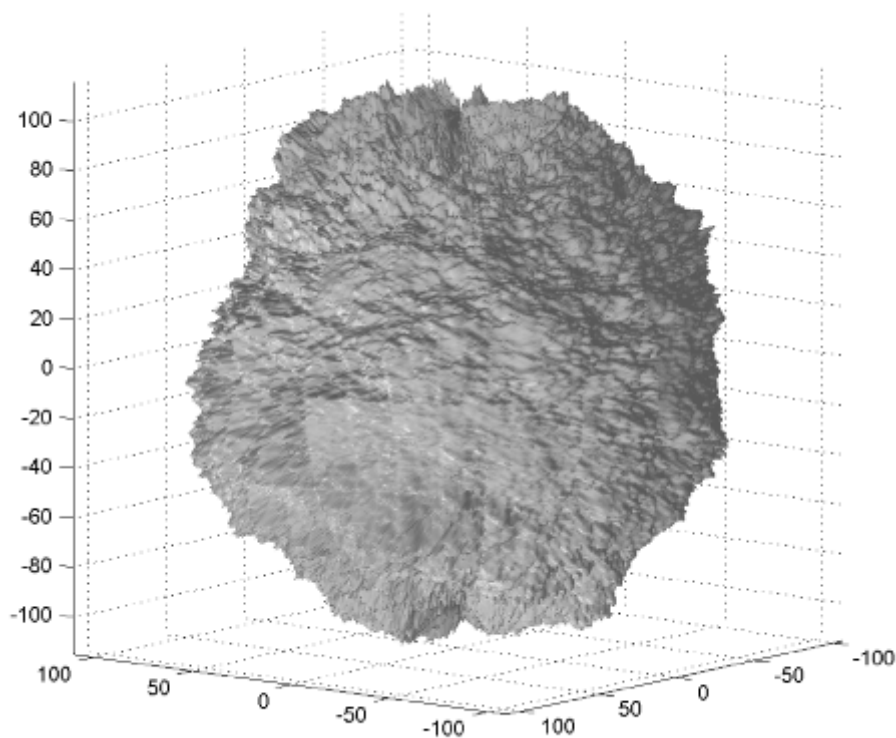
Πίνακας 7.2: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος II.



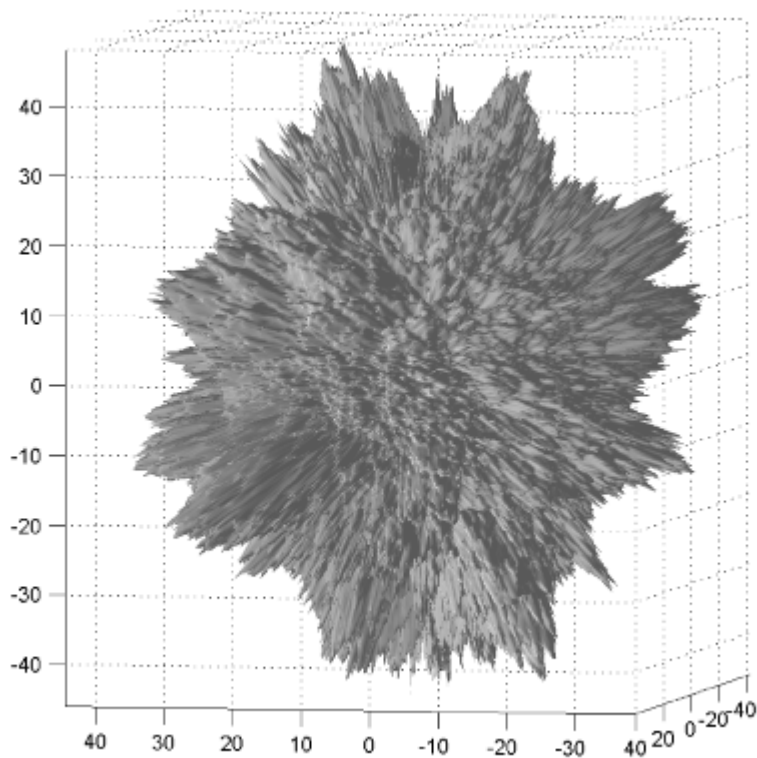
Σχήμα 7.4: Ο ελκυστής του παραδείγματος II για $P_0 = 300$. Τα χρώματα εκφράζουν τις τιμές στον άξονα z .



Σχήμα 7.5: Η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού g στην επιφάνεια του σχήματος 7.4. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.



Σχήμα 7.6: Η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει για $P_0 = 100$. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.



Σχήμα 7.7: Η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει για $P_0 = 30$. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.



Παράδειγμα III. Θέτουμε $M = N = 8$ και $K = L = 2$ (οπότε $a = 4$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας s_{ij} του πίνακα 7.3. Το διάνυσμα C^v είναι

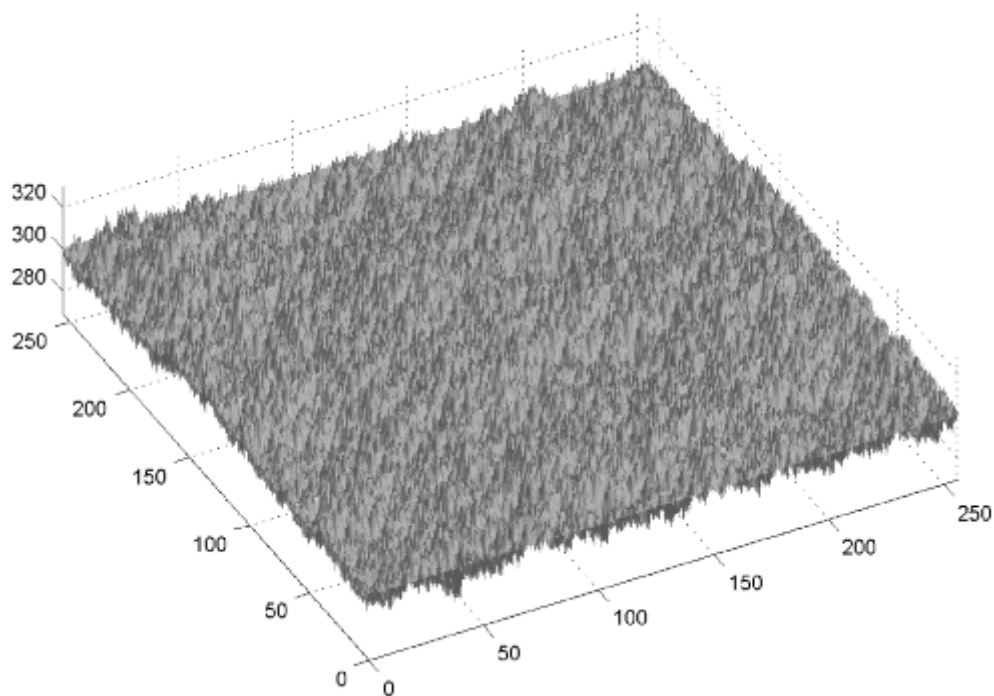
$$C^v = \begin{pmatrix} 1, 4, 2, 4, 3, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 3, 4, 2, 3, 2, 2, 3, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \\ 4, 2, 2, 3, 3, 1, 3, 4, 2, 1, 4, 2, 3, 1, 4, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 4, 2, 1, 3, 1, 3, 4, 1, 2, 2, \\ 4, 1, 3, 2, 1, 2, 3 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 6.3 ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που ορίσαμε θα είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [0, 256] \times [0, 256] \rightarrow \mathbb{R}$. Στο σχήμα 7.8 φαίνεται η ΒΦΕΠ που προκύπτει για $P = 300, D1 = 8, H1 = 4, H2 = 1, H3 = 4, H4 = 8, H5 = 1, H6 = 0$, στο 7.9 η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού $\mathbf{g}$ στην προηγούμενη επιφάνεια, στο 7.10 φαίνεται η επιφάνεια που προκύπτει μετά την εφαρμογή της $\mathbf{h}$ (για $a = 1, b = 1, c = 1.5$) στην επιφάνεια του 7.8, ενώ στο 7.11 η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει για $P = 100$ αντίστοιχα.

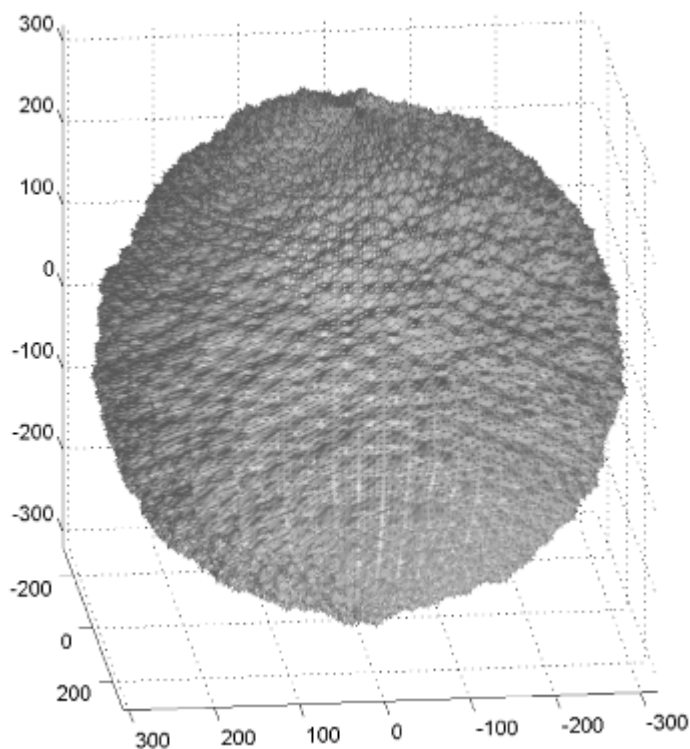
		Δ								
		x								
		0	32	64	96	128	160	192	224	256
y	0	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00
	32	P+H1	P-12	P+00	P+19	P+H1	P+15	P+01	P-16	P+H1
	64	P+H2	P+04	P+00	P+00	P+H2	P+01	P+02	P+05	P+H2
	96	P+H3	P-15	P+04	P+15	P+H3	P-14	P+03	P+15	P+H3
	128	P+D1	P+D1	P+D1	P+D1	P+D1	P+D1	P+D1	P+D1	P+D1
	160	P+H4	P-13	P+06	P+20	P+H4	P-17	P+06	P-10	P+H0
	192	P+H5	P+02	P+04	P+08	P+H5	P+10	P+08	P+04	P+H5
	224	P+H6	P+24	P+02	P-21	P+H6	P-13	P+04	P+13	P+H6
	256	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00	P+00

		s_{ij}							
		j							
		1	2	3	4	5	6	7	8
i	1	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
	2	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
	3	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
	4	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
	5	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
	6	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
	7	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
	8	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65

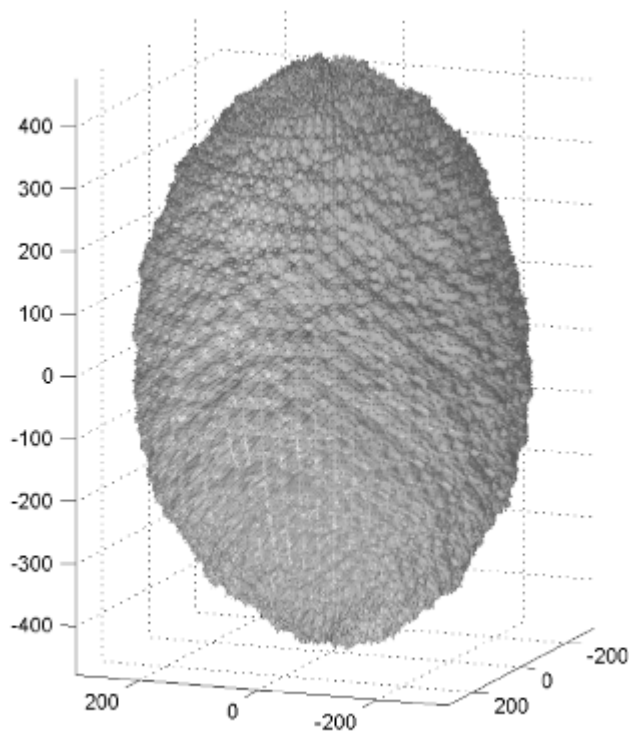
Πίνακας 7.3: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος III.



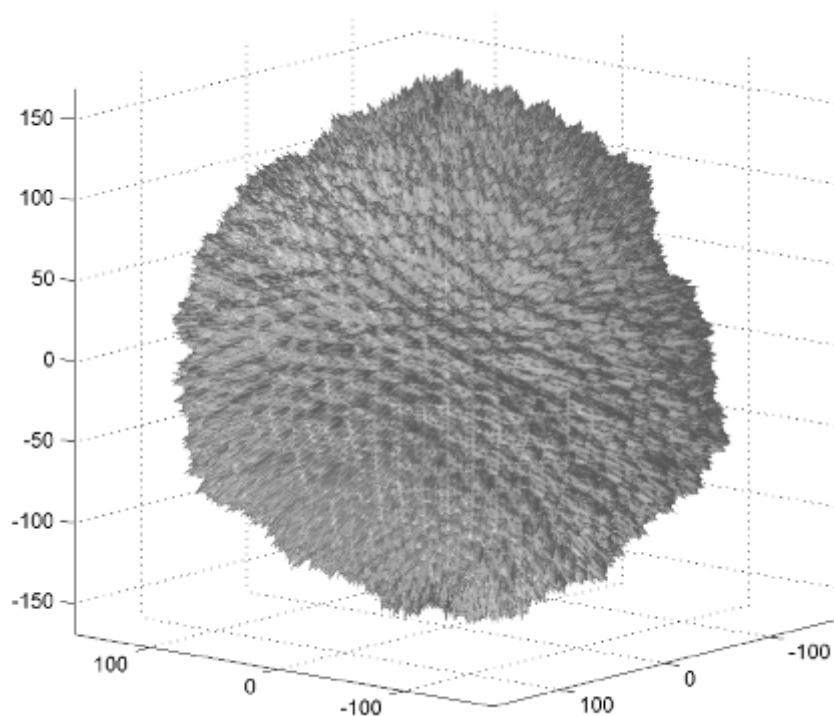
Σχήμα 7.8: Ο ελκυστής του παραδείγματος ΙΙΙ για $P = 300$.



Σχήμα 7.9: Η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού g στην επιφάνεια του σχήματος 7.8. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.



Σχήμα 7.10: Η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού $\mathbf{h}$ (για $a = 1, b = 1, c = 1.5$) στην επιφάνεια του σχήματος 7.8. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.



Σχήμα 7.11: Η κλειστή επιφάνεια που προκύπτει για $P_0 = 100$. Χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές φωτισμού για να τονισθεί η “τραχύτητα” της επιφάνειας.



Κεφάλαιο 8

Διανυσματικές Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής

Τα μαθηματικά είναι μεγάλο πράγμα κυρά μου!
Δε θέλω εσύ να μοιάζεις με αυτά τα κουτορνίθια,
τις κοσμικές κυρίες μας.
Με λίγη υπομονή, θα καταφέρεις να τ' αγαπήσεις.
Τα μαθηματικά θα σου βγάλουν κάθε ανοησία απ' το κεφάλι.

Πρίγκιπας Μπαλκόνσκι,
από το βιβλίο “Πόλεμος και Ειρήνη” του Λέοντος Τολστόι.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια μέθοδο για την κατασκευή διανυσματικών fractal επιφανειών παρεμβολής (ΔΦΕΠ). Δηλαδή, παρουσιάζουμε ένα ΠΣΕΣ που θα έχει ως ελκυστή το γράφημα μιας συνεχούς συναρτήσης $\vec{f} = (f_1, f_2) : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Με κατάλληλη προβολή δημιουργούνται νέες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο πλέγμα $\{(x_i, y_j) = \vec{x}_{i,j} : i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M\} \subseteq [a, b] \times [c, d] = B$, όπου $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_M = d$ και το σύνολο σημείων παρεμβολής $\Delta = \{(x_i, y_j, z_{i,j}, t_{i,j}) = (\vec{x}_{i,j}, \vec{z}_{i,j})\} \subseteq B \times \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^4$. Επίσης, θεωρούμε το σύνολο $Q = \{(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_{i,j}, \hat{t}_{i,j}) = (\hat{\vec{x}}_{i,j}, \hat{\vec{z}}_{i,j})\} \subseteq \Delta$ με $a = \hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_N = b$, $c = \hat{y}_0 < \hat{y}_1 < \dots < \hat{y}_M = d$. Και πάλι ορίζουμε τους τομείς $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, για $i = 1, 2, \dots, N$ και $j = 1, 2, \dots, M$ και τις περιοχές $J_{kl} = [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k] \times [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l]$ για $k = 1, 2, \dots, K$ και $l = 1, 2, \dots, L$. Όπως αναφέραμε, σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε μια fractal συνάρτηση $\vec{f} = (f_1, f_2) : B \rightarrow \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε $\vec{f}(\vec{x}_{i,j}) = \vec{z}_{i,j}$, $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$ (δηλαδή, η $\vec{f}$ παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ) και το γράφημά της να είναι ο ελκυστής ενός ΠΣΕΣ. Ορίζουμε απεικονίσεις $\vec{w}_{i,j} : [a, b] \times [c, d] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$:



$$\begin{aligned} \vec{w}_{i,j} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_n x + b_i \\ c_m y + d_j \\ e_{i,j} x + f_{i,j} y + g_{i,j} xy + s_{i,j} z + s'_{i,j} t + k_{i,j} \\ \tilde{e}_{i,j} x + \tilde{f}_{i,j} y + \tilde{g}_{i,j} xy + \tilde{s}_{i,j} z + \tilde{s}'_{i,j} t + \tilde{k}_{i,j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_i(x) \\ \psi_j(y) \\ \Phi_{i,j}(x, y) + s_{i,j} z + s'_{i,j} t \\ \tilde{\Phi}_{i,j}(x, y) + \tilde{s}_{i,j} z + \tilde{s}'_{i,j} t \end{pmatrix} + \vec{c}_{i,j}. \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό

$$\vec{w}_{i,j} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = A_{i,j} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + \vec{c}_{i,j} + \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{\Phi}(\vec{x}) \end{pmatrix} + S_{i,j} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{z} \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

όπου

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_{i,j} = \begin{pmatrix} b_i \\ d_j \\ k_{i,j} \\ \tilde{k}_{i,j} \end{pmatrix},$$

$$\vec{\Phi}_{i,j}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_{i,j}(x, y) \\ \tilde{\Phi}_{i,j}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{i,j} x + f_{i,j} y + g_{i,j} xy \\ \tilde{e}_{i,j} x + \tilde{f}_{i,j} y + \tilde{g}_{i,j} xy \end{pmatrix}$$

$$\text{και} \quad S_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{i,j} & s'_{i,j} \\ 0 & 0 & \tilde{s}_{i,j} & \tilde{s}'_{i,j} \end{pmatrix}.$$

και $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$. Οι παράμετροι του πίνακα $S_{i,j}$ επιλέγονται αυθαίρετα. Οι υπόλοιπες παράμετροι που εμφανίζονται στους πίνακες $A_{i,j}, \vec{c}_{i,j}, \vec{\Phi}_{i,j}$ υπολογίζονται από τις εξισώσεις

$$\vec{w}_{i,j} \begin{pmatrix} \vec{x}_{0,0} \\ \vec{z}_{0,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_{-1,j-1} \\ \vec{z}_{-1,j-1} \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

$$\vec{w}_{i,j} \begin{pmatrix} \vec{x}_{N,0} \\ \vec{z}_{N,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_{i,j-1} \\ \vec{z}_{i,j-1} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

$$\vec{w}_{i,j} \begin{pmatrix} \vec{x}_{0,M} \\ \vec{z}_{0,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_{-1,j} \\ \vec{z}_{-1,j} \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

$$\vec{w}_{i,j} \begin{pmatrix} \vec{x}_{N,M} \\ \vec{z}_{N,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_{i,j} \\ \vec{z}_{i,j} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

για $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ και εξαρτώνται από τα σημεία του Δ και τις παραμέτρους $S_{i,j}$. Πιο



συγκεκριμένα, οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν ένα σύστημα, η λύση του οποίου είναι

$$a_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}} \quad (8.6)$$

$$b_{ij} = \frac{\hat{x}_k x_{i-1} - \hat{x}_{k-1} x_i}{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}} \quad (8.7)$$

$$c_{ij} = \frac{y_j - y_{j-1}}{\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}} \quad (8.8)$$

$$d_{ij} = \frac{\hat{y}_l y_{j-1} - \hat{y}_{l-1} y_j}{\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}} \quad (8.9)$$

$$g_{ij} = \frac{z_{ij} + z_{i-1,j-1} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1}}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} - s_{ij} \frac{(\hat{z}_{kl} + \hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k-1,l} - \hat{z}_{k,l-1})}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} - s'_{ij} \frac{(\hat{t}_{kl} + \hat{t}_{k-1,l-1} - \hat{t}_{k-1,l} - \hat{t}_{k,l-1})}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} \quad (8.10)$$

$$e_{ij} = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - g_{ij} \hat{y}_{l-1} (\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k)}{\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k} - \frac{s_{ij} (\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-1}) - s'_{ij} (\hat{t}_{k-1,l-1} - \hat{t}_{k,l-1})}{\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k} \quad (8.11)$$

$$f_{ij} = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - g_{ij} \hat{x}_{l-1} (\hat{y}_{k-1} - \hat{y}_k)}{\hat{y}_{k-1} - \hat{y}_k} - \frac{s_{ij} (\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-1}) - s'_{ij} (\hat{t}_{k-1,l-1} - \hat{t}_{k,l-1})}{\hat{y}_{k-1} - \hat{y}_k} \quad (8.12)$$

$$k_{ij} = z_{ij} - e_{ij} \hat{x}_k - f_{ij} \hat{y}_l - s_{ij} \hat{z}_{kl} - s'_{ij} \hat{t}_{kl} - g_{ij} \hat{x}_k \hat{y}_l \quad (8.13)$$

$$\bar{g}_{ij} = \frac{t_{ij} + t_{i-1,j-1} - t_{i-1,j} - t_{i,j-1}}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} - \bar{s}_{ij} \frac{(\hat{z}_{kl} + \hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k-1,l} - \hat{z}_{k,l-1})}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} - \bar{s}'_{ij} \frac{(\hat{t}_{kl} + \hat{t}_{k-1,l-1} - \hat{t}_{k-1,l} - \hat{t}_{k,l-1})}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} \quad (8.14)$$

$$\bar{e}_{ij} = \frac{t_{i-1,j-1} - t_{i,j-1} - \bar{g}_{ij} \hat{y}_{l-1} (\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k)}{\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k} - \frac{\bar{s}_{ij} (\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-1}) - \bar{s}'_{ij} (\hat{t}_{k-1,l-1} - \hat{t}_{k,l-1})}{\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k} \quad (8.15)$$

$$\bar{f}_{ij} = \frac{t_{i-1,j-1} - t_{i,j-1} - \bar{g}_{ij} \hat{x}_{l-1} (\hat{y}_{k-1} - \hat{y}_k)}{\hat{y}_{k-1} - \hat{y}_k} - \frac{\bar{s}_{ij} (\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-1}) - \bar{s}'_{ij} (\hat{t}_{k-1,l-1} - \hat{t}_{k,l-1})}{\hat{y}_{k-1} - \hat{y}_k} \quad (8.16)$$

$$\bar{k}_{ij} = t_{ij} - \bar{e}_{ij} \hat{x}_k - \bar{f}_{ij} \hat{y}_l - \bar{s}_{ij} \hat{z}_{kl} - \bar{s}'_{ij} \hat{t}_{kl} - \bar{g}_{ij} \hat{x}_k \hat{y}_l. \quad (8.17)$$

Οι απεικονίσεις $\vec{w}_{i,j}$ είναι συνεχείς στο $B \times \mathbb{R}^2$. Το παρακάτω λήμμα δίνει κατάλληλες συνθήκες ώστε οι $\vec{w}_{i,j}$ να είναι συστολές

ΛΗΜΜΑ 8.1

Έστω $\vec{w} : B \times \mathbb{R}^2 \rightarrow B \times \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση της μορφής

$$\vec{w} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{\Phi}(\vec{x}) \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$



$$\text{όπου } A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & s' \\ 0 & 0 & \bar{s} & \bar{s}' \end{pmatrix}$$

με $\|A\|_1 = \max(|a|, |c|) < 1$, $\rho(S) < 1$ (η $\rho(S)$ είναι η φασματική ακτίνα του S) και η συνάρτηση $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο B . Τότε υπάρχει μια μετρική τ ορισμένη στο $B \times \mathbb{R}^2$, η οποία είναι ισοδύναμη με την ευκλείδεια μετρική ρ_2 , τέτοια ώστε η $\bar{w}$ να είναι συστολή (η μετρική τ εξαρτάται από τον A , τη Φ και τον S).

Απόδειξη.

Ορίζουμε τον πίνακα $S_0 = \begin{pmatrix} s & s' \\ \bar{s} & \bar{s}' \end{pmatrix}$, με $\rho(S_0) = \rho(S) < 1$. Επιλέγουμε $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε $\rho(S_0) + \epsilon < 1$. Υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|_\epsilon$ στο $\mathbb{R}^2$ ώστε

$$\|S_0\|_\epsilon \leq \rho(S_0) + \epsilon \quad (8.18)$$

(βλέπε θεώρημα 1.7 στη σελίδα 23). Από το θεώρημα Μέσης Τιμής, την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το γεγονός ότι η Φ_i έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο συμπαγές σύνολο B , καταλήγουμε στην

$$|\Phi_i(\bar{x}) - \Phi_i(\bar{x}')| = |\nabla \Phi_i(\bar{\xi}_i)(\bar{x} - \bar{x}')| \leq \|\nabla \Phi_i(\bar{\xi}_i)\|_2 \|\bar{x} - \bar{x}'\|_2 = M'_i \|\bar{x} - \bar{x}'\|_2, \quad i = 1, 2,$$

για κάποιο $\bar{\xi}_i \in [\bar{x}, \bar{x}']$. Αφού όλες οι νόρμες στο $\mathbb{R}^2$ είναι ισοδύναμες θα έχουμε

$$\|\bar{\Phi}(\bar{x}) - \bar{\Phi}(\bar{x}')\|_\epsilon \leq M \|\bar{x} - \bar{x}'\|_1 \quad (8.19)$$

για κάποιο $M = M(\bar{\Phi}, S)$. Επειδή $\|A\|_1 < 1$, μπορούμε να επιλέξουμε $\theta = \theta(A, \bar{\Phi}, S) > 0$ με

$$\|A\|_1 + M\theta < 1. \quad (8.20)$$

Ορίζουμε τη μετρική τ στο $B \times \mathbb{R}^2$ ως εξής

$$\tau((\bar{x}, \bar{z})^t, (\bar{x}', \bar{z}')^t) = \|\bar{x} - \bar{x}'\|_1 + \theta \|\bar{z} - \bar{z}'\|_\epsilon.$$

Τότε για $(\bar{x}, \bar{z})^t, (\bar{x}', \bar{z}')^t \in B \times \mathbb{R}^2$, από την (8.19) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \tau(\bar{w}(\bar{x}, \bar{z})^t, \bar{w}(\bar{x}', \bar{z}')^t) &\leq \|A\|_1 \|\bar{x} - \bar{x}'\|_1 + \theta \|(\bar{\Phi}(\bar{x}) + S_0 \bar{z}) - (\bar{\Phi}(\bar{x}') + S_0 \bar{z}')\|_\epsilon \\ &\leq \|A\|_1 \|\bar{x} - \bar{x}'\|_1 + \theta (\|\bar{\Phi}(\bar{x}) - \bar{\Phi}(\bar{x}')\|_\epsilon + \|S_0\|_\epsilon \|\bar{z} - \bar{z}'\|_\epsilon) \\ &\leq (\|A\|_1 + \theta M) \|\bar{x} - \bar{x}'\|_1 + \|S_0\|_\epsilon \theta \|\bar{z} - \bar{z}'\|_\epsilon \\ &\leq \max\{\|A\|_1 + \theta M, \|S_0\|_\epsilon\} \cdot \tau((\bar{x}, \bar{z})^t, (\bar{x}', \bar{z}')^t). \end{aligned}$$

Από τις (8.18) και (8.20), παίρνουμε ότι $s = \max\{\|A\|_1 + \theta M, \|S_0\|_\epsilon\} < 1$, δηλαδή ότι η $\bar{w}$ είναι συστολή στον $\langle B \times \mathbb{R}^2, \tau \rangle$ ¹ $\square$

Και πάλι περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση όπου οι τομείς είναι τετράγωνα πλευράς $\delta = 1/N$ και οι περιοχές τετράγωνα πλευράς $\psi = 1/K$ (οπότε $M = pN$ και $L = pK$) και ο αριθμός

$$a = \frac{\psi}{\delta} = \frac{N}{K}$$

¹Είναι φανερό ότι η μέθοδος απόδειξης του ανωτέρω θεωρήματος μπορεί να εφαρμοστεί και στο θεώρημα 6.1. Όμως, οι υπολογισμοί στο εν λόγω θεώρημα ήταν στοιχειώδεις και γι αυτό προτιμήθηκαν.



είναι ακέραιος. Θεωρούμε μια απεικόνιση

$$\mathbb{J} : \{1, 2, \dots, N\} \times \{1, 2, \dots, M\} \rightarrow \{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, L\}$$

με $\mathbb{J}(i, j) = (\mathbb{K}(i, j), \mathbb{L}(i, j)) = (k, l)$ και συστολές $\vec{w}_{ij}$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούν τις συνθήκες (8.2)-(8.5) για $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, 1, \dots, M$. Οι συστολές w_{ij} απεικονίζουν τις κορυφές της περιοχής J_{kl} στις κορυφές του τομέα I_{ij} . Τέλος, ορίζουμε μια 1-1 απεικόνιση

$$\Phi : \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} \rightarrow \{1, \dots, N \cdot M\} : \Phi(i, j) = (i - 1)M + j$$

(δηλαδή μια αρίθμηση των στοιχείων του συνόλου $\{(i, j) : i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$) και μια επίσης 1-1 απεικόνιση

$$\hat{\Phi} : \{1, \dots, K\} \times \{1, \dots, L\} \rightarrow \{1, \dots, K \cdot L\} : \hat{\Phi}(k, l) = (k - 1)K + L$$

(δηλαδή μια αρίθμηση των στοιχείων του συνόλου $\{(k, l) : k = 1, \dots, K; l = 1, \dots, L\}$). Ένα ΠΣΕΣ, που συνδέεται με τα δεδομένα του συνόλου Δ , αποτελείται από το ΣΕΣ $\{X; \vec{w}_{i,j}, i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$ (ή πιο σύντομα $\{X; \vec{w}_{1-N,1-M}\}$) μαζί με ένα πίνακα πιθανοτήτων $(p_{nm})^{N \cdot M}$ τέτοιοι ώστε

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & \text{Αν } I_{\Phi^{-1}(i)} \subset J_{\mathbb{J}(\Phi^{-1}(j))} \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

για $i, j = 1, 2, \dots, NM$. Ο αντίστοιχος πίνακας σύνδεσης $C = (c_{nm})^{N \cdot M}$ θα είναι

$$c_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{if } p_{mn} > 0 \\ 0, & \text{if } p_{mn} = 0, \end{cases}$$

όπου $i, j = 1, 2, \dots, N \cdot M$, ενώ το διάνυσμα συνδέσεων C^v θα είναι

$$c_i^v = \hat{\Phi}(\mathbb{J}(\Phi^{-1}(i))), i = 1, 2, \dots, N \cdot M$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.1

Για το ΠΣΕΣ

$$\{B \times \mathbb{R}^2; \vec{w}_{i,j} : i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M\}$$

με τον πίνακα πιθανοτήτων

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & \text{Αν } I_{\Phi^{-1}(i)} \subset J_{\mathbb{J}(\Phi^{-1}(j))} \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου οι $\vec{w}_{i,j}$ είναι της μορφής (8.1), ικανοποιούν τις συνθήκες (8.2)-(8.5) και

$$\max \{\rho(S_{i,j}) : i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M\} < 1,$$

υπάρχει ένα μοναδικό, μη κενό συμπαγές σύνολο $G \subseteq B \times \mathbb{R}^2$, τέτοιο ώστε

$$G = \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j=1}^M \vec{w}_{i,j}(G)$$

και $\Delta \subseteq G$. Το G καλείται ο ελκυστής του ΠΣΕΣ.



Απόδειξη.

Από τις συνθήκες (8.2)-(8.5) έχουμε ότι $\|A_{i,j}\|_1 < 1$. Οπότε, από το λήμμα 8.1 η $\vec{w}_{i,j}$ είναι συστολή στον $\langle B \times \mathbb{R}^2, \tau \rangle$. Άρα από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach και γνωστά αποτελέσματα εξασφαλίζουμε την ύπαρξη του G . $\square$

Το παρακάτω θεώρημα δίνει αναγκαίες συνθήκες ώστε ο ελκυστής G να είναι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2

Έστω $\Delta = \{(\vec{x}_{i,j}, \vec{z}_{i,j}) : i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M\}$ ένα δοσμένο σύνολο σημείων παρεμβολής τέτοιων ώστε, αν $x = \hat{x}_k$ και υπάρχει $\lambda \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $(1 - \lambda)\hat{y}_{l-1} + \lambda\hat{y}_l = y_j$, τότε $(1 - \lambda)\hat{z}_{k,l-1} + \lambda\hat{z}_{k,l} = \vec{z}_{ak,j}$ για $k = 0, 1, \dots, K, l = 1, 2, \dots, L$ και $j : y_j \in [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l]$ (ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για $x = x_{k-1}, y = y_l$ και $y = y_{l-1}$). Αν G είναι ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που περιγράφεται στο θεώρημα 8.1, τότε υπάρχει μια συνεχής διανυσματική συνάρτηση $\vec{f} = (f_1, f_2) : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ που παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ και το γράφημά της είναι ο ελκυστής G ($G_{\vec{f}} = \{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) : \vec{x} \in B\} = G$). Ο G καλείται **Διανυσματική Bivariate Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής (ΔBFEP)**.

Απόδειξη.

Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $\vec{f} = (f_1, f_2)$ ορισμένων στο B για τις οποίες

$$\begin{aligned} \vec{f}(\hat{x}_{k-1}, (1 - \lambda)\hat{y}_{l-1} + \lambda\hat{y}_l) &= ((1 - \lambda)\hat{z}_{k-1,l-1} + \lambda\hat{z}_{k-1,l}, (1 - \lambda)\hat{t}_{k-1,l-1} + \lambda\hat{t}_{k-1,l}) \\ \vec{f}(\hat{x}_k, (1 - \lambda)\hat{y}_{l-1} + \lambda\hat{y}_l) &= ((1 - \lambda)\hat{z}_{k,l-1} + \lambda\hat{z}_{k,l}, (1 - \lambda)\hat{t}_{k,l-1} + \lambda\hat{t}_{k,l}) \\ \vec{f}((1 - \lambda)\hat{x}_{k-1} + \lambda\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1}) &= ((1 - \lambda)\hat{z}_{k-1,l-1} + \lambda\hat{z}_{k,l-1}, (1 - \lambda)\hat{t}_{k-1,l-1} + \lambda\hat{t}_{k,l-1}) \\ \vec{f}((1 - \lambda)\hat{x}_{k-1} + \lambda\hat{x}_k, \hat{y}_l) &= ((1 - \lambda)\hat{z}_{k-1,l} + \lambda\hat{z}_{k,l}, (1 - \lambda)\hat{t}_{k-1,l} + \lambda\hat{t}_{k,l}) \end{aligned}$$

για $k = 1, 2, \dots, K, l = 1, 2, \dots, L, \lambda \in [0, 1]$, δηλαδή οι $f_1, f_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γραμμικές στις ακμές κάθε περιοχής $J_{kl} = [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k] \times [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l]$. Το $\mathcal{F}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του χώρου $\langle C_{\mathbb{R}^2}(B), \|\cdot\|_{\infty} \rangle$ (όπου $\|\cdot\|_{\infty}$ η supremum νόρμα). Άρα ο $\mathcal{F}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Ορίζουμε τον τελεστή Read-Bajraktarevic $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ με

$$T\vec{f}(x, y) = \vec{\Phi}_{i,j}(\phi_i^{-1}(x), \psi_j^{-1}(y)) + S_{i,j}\vec{f}(\phi_i^{-1}(x), \psi_j^{-1}(y)) + \vec{K}_{i,j}$$

για $(x, y) \in I_{ij}, i = 1, 2, \dots, N$ και $j = 1, 2, \dots, M$. Για απλούστευση των συμβολισμών θέτουμε

$$S_{i,j} = \begin{pmatrix} s_{i,j} & s'_{i,j} \\ \tilde{s}_{i,j} & \tilde{s}'_{i,j} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{K}_{i,j} = \begin{pmatrix} k_{i,j} \\ \tilde{k}_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Ως συνήθως, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η $T\vec{f}(x, y)$ είναι καλά ορισμένη. Αν το σημείο (x, y) βρίσκεται σε κάποια από τις ακμές του I_{ij} , τότε βρίσκεται και σε μια από τις ακμές των $I_{i+1,j}, I_{i,j+1}, I_{i-1,j}$ ή $I_{i,j-1}$. Σε αυτή την περίπτωση, πρέπει να αποδείξουμε ότι η τιμή $T\vec{f}(x, y)$ είναι ίδια ανεξάρτητα από το σύνολο $(I_{i,j}, I_{i+1,j}, I_{i,j+1}, I_{i-1,j} \text{ ή } I_{i,j-1})$ στο οποίο θεωρούμε ότι ανήκει. Πράγματι, έστω $(x, y) = (x_i, (1 - \lambda)y_{j-1} + \lambda y_j), \lambda \in [0, 1]$ ένα σημείο της κοινής ακμής $[(x_i, y_{j-1}), (x_i, y_j)]$ των $I_{i,j}$



και $I_{i+1,j}$. Τότε, αν θεωρήσουμε ότι $(x, y) \in I_{i,j}$ και $(k, l) = \mathbb{J}(i, j)$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 T\vec{f}(x_i, (1-\lambda)y_{j-1} + \lambda y_j) &= \vec{\Phi}_{i,j}(\hat{x}_k, (1-\lambda)\hat{y}_{l-1} + \lambda\hat{y}_l) \\
 &\quad + S_{i,j}\vec{f}(\hat{x}_k, (1-\lambda)\hat{y}_{l-1} + \lambda\hat{y}_l) + \vec{K}_{i,j} \\
 &= (1-\lambda)\vec{\Phi}_{i,j}(\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1}) + \lambda\vec{\Phi}_{i,j}(\hat{x}_k, \hat{y}_l) + (1-\lambda)S_{i,j}\vec{f}(\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1}) \\
 &\quad + \lambda S_{i,j}\vec{f}(\hat{x}_k, \hat{y}_l) + \vec{K}_{i,j} \\
 &\quad (\alpha\phi\omicron\upsilon\ \eta\ \vec{f} \in \mathcal{F}\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \vec{\Phi}_{i,j}\ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\epsilon}\varsigma\ \sigma\epsilon\ \kappa\acute{\alpha}\theta\eta\ \mu\epsilon\tau\alpha\beta\lambda\eta\tau\acute{\eta}) \\
 &= (1-\lambda)\left(\vec{\Phi}_{i,j}(\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1}) + S_{i,j}\vec{f}(\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1}) + \vec{K}_{i,j}\right) \\
 &\quad + \lambda\left(\vec{\Phi}_{i,j}(\hat{x}_k, \hat{y}_l) + S_{i,j}\vec{f}(\hat{x}_k, \hat{y}_l) + \vec{K}_{i,j}\right) \\
 &= (1-\lambda)\vec{z}_{i,j-1} + \lambda\vec{z}_{i,j}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε, } T\vec{f}(x_i, (1-\lambda)y_{j-1} + \lambda y_j) = (1-\lambda)\vec{z}_{i,j-1} + \lambda\vec{z}_{i,j} \quad (8.21)$$

Στη συνέχεια, αν θεωρήσουμε ότι $(x, y) \in I_{i+1,j}$ και ακολουθήσουμε παρόμοια διαδικασία, θα καταλήξουμε στη σχέση

$$T\vec{f}(x, y) = T\vec{f}(x_{i+1}, (1-\lambda)y_{j-1} + \lambda y_j) = (1-\lambda)\vec{z}_{i,j-1} + \lambda\vec{z}_{i,j}.$$

Άρα η $T\vec{f}$ είναι καλά ορισμένη στο B και από τον ορισμό της θα είναι και συνεχής στο B και θα παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ (για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$ στην (8.21)). Τελικά, μένει να αποδειχθεί ότι $T\vec{f} \in \mathcal{F}$ (δηλαδή ότι η $T\vec{f}$ είναι γραμμική για $x = x_k$ και $y = y_l$, $k = 0, 1, \dots, K$, $l = 0, 1, \dots, L$). Θεωρούμε το σημείο $(\hat{x}_k, (1-\lambda)\hat{y}_{l-1} + \lambda\hat{y}_l)$ ($\lambda \in [0, 1]$) τότε θα υπάρχει $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ και $\lambda' \in [0, 1]$ τέτοια ώστε $(\hat{x}_k, (1-\lambda)\hat{y}_{l-1} + \lambda\hat{y}_l) = (\hat{x}_k, (1-\lambda')y_{j-1} + \lambda'y_j) \in I_{ak,j}$. Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με αυτή που μας έδωσε τη σχέση (8.21), καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}
 T\vec{f}(\hat{x}_k, (1-\lambda)\hat{y}_{l-1} + \lambda\hat{y}_l) &= T\vec{f}(\hat{x}_k, (1-\lambda')y_{j-1} + \lambda'y_j) \\
 &= (1-\lambda')\vec{z}_{ak,j-1} + \lambda'\vec{z}_{ak,j} \\
 &= (1-\lambda)\hat{z}_{k,l-1} + \lambda\hat{z}_{k,l}.
 \end{aligned}$$

Άρα $Tf \in \mathcal{F}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $G_{\vec{f}} = \tilde{G}$. □

Παραδείγματα

Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα διανυσματικών επιφανειών παρεμβολής που κατασκευάστηκαν σύμφωνα με την μεθοδολογία που περιγράψαμε. Οι επιφάνειες βρίσκονται στον $\mathbb{R}^4$ και δεν υπάρχει τρόπος να τις απεικονίσουμε, τα σχήματα δείχνουν τις προβολές τους στο χώρο $x - y - z$ και στο χώρο $x - y - t$. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των ελκυστών δίνεται στο παράρτημα Α (πρόγραμμα Α.10).

Παράδειγμα Ι. Ως πρώτο παράδειγμα θα δώσουμε την κατασκευή μιας Αυτόομοιας Διανυσματικής Bivariate Fractal Επιφάνειας Παρεμβολής με συνευθειακά σημεία παρεμβολής στο σύνορο του $[0, 256] \times [0, 256]$. Πιο συγκεκριμένα θέτουμε $M = N = 4$ και $K = L = 1$ (οπότε $a = 4$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές s_{ij} , s'_{ij} , $\bar{s}_{ij}$, $\bar{s}'_{ij}$ του πίνακα 8.1. Το διάνυσμα C^v θα είναι

$$C^v = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

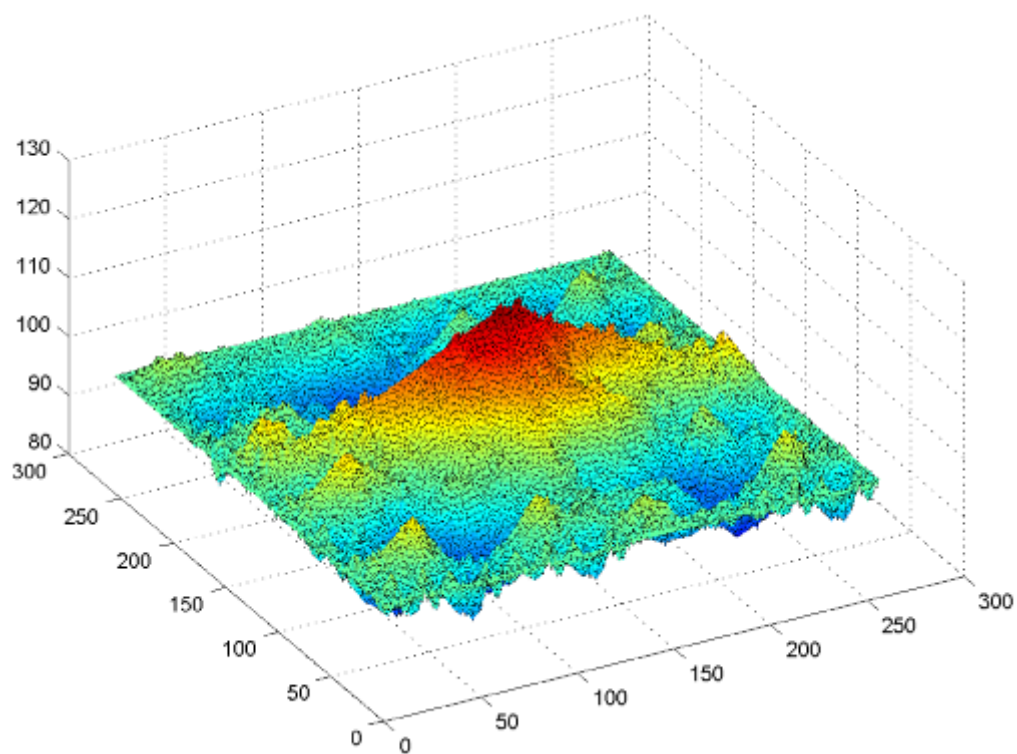


$\Delta - z$							$\Delta - t$						
		x							x				
		0	64	128	192	256			0	64	128	192	256
y	0	100	100	100	100	100	y	0	100	100	100	100	100
	64	100	90	100	90	100		64	100	110	100	90	100
	128	100	110	120	110	100		128	100	98	105	95	100
	192	100	90	85	90	100		192	100	90	95	107	100
	256	100	100	100	100	100		256	100	100	100	100	100

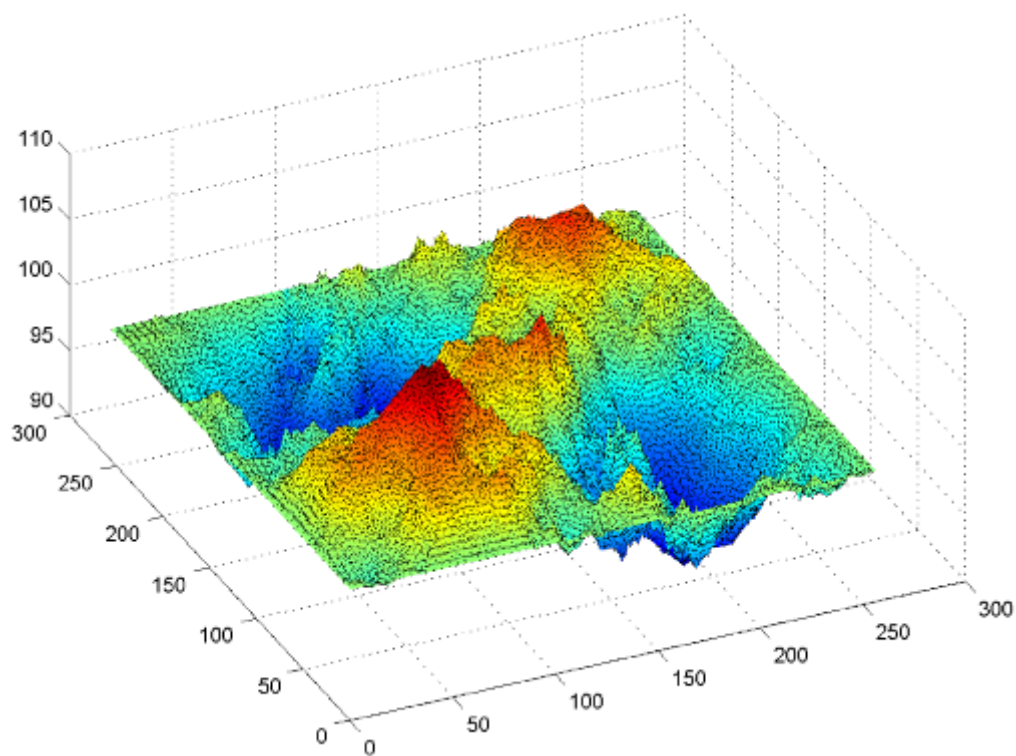
s_{ij}						s'_{ij}					
		j						j			
		1	2	3	4			1	2	3	4
i	1	0.45	0.35	-0.3	0.35	i	1	0.2	0.3	0.2	0.4
	2	0.4	-0.15	0.25	-0.35		2	0.1	0.3	-0.3	0.5
	3	-0.45	0.15	-0.45	0.2		3	0.3	-0.4	0.2	0.3
	4	-0.15	-0.25	0.45	0.25		4	-0.3	0.2	-0.1	0.4

$\bar{s}_{ij}$						$\bar{s}'_{ij}$					
		j						j			
		1	2	3	4			1	2	3	4
i	1	0	0	0	0	i	1	-0.2	0.3	0.4	0.2
	2	0	0	0	0		2	0.2	0.3	-0.6	0.1
	3	0	0	0	0		3	-0.3	-0.3	-0.4	0.3
	4	0	0	0	0		4	-0.1	0.5	-0.3	0.2

Πίνακας 8.1: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος I.



Σχήμα 8.1: Η προβολή του ελκυστή του παραδείγματος I στο χώρο xyz .



Σχήμα 8.2: Η προβολή του ελκυστή του παραδείγματος I στο χώρο xyt .



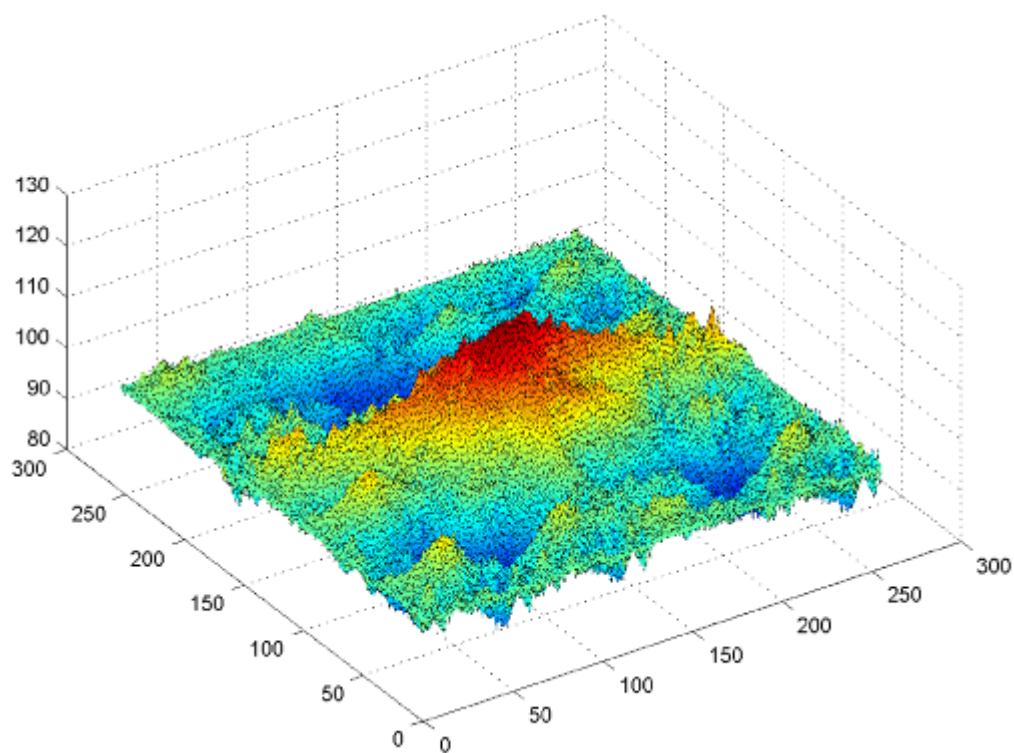
Παράδειγμα II. Στο προηγούμενο παράδειγμα όλοι οι συντελεστές $\bar{s}_{ij}$ είχαν τεθεί ίσοι με το μηδέν για $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4$. Αυτός είναι ο βασικός λόγος που το γράφημα του ελκυστή στον χώρο xyt παρουσιάζεται τόσο ομαλό. Αλλάζοντας τους συντελεστές αυτούς παίρνουμε ένα πιο “τραχύ” γράφημα. Πιο συγκεκριμένα θέτουμε και πάλι $M = N = 4$, $K = L = 1$ (οπότε $a = 4$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές s_{ij} , s'_{ij} , $\bar{s}_{ij}$, $\bar{s}'_{ij}$ του πίνακα 8.2.

$\Delta - z$							$\Delta - t$						
		x							x				
		0	64	128	192	256			0	64	128	192	256
y	0	100	100	100	100	100	y	0	100	100	100	100	100
	64	100	90	100	90	100		64	100	110	100	90	100
	128	100	110	120	110	100		128	100	98	105	95	100
	192	100	90	85	90	100		192	100	90	95	107	100
	256	100	100	100	100	100		256	100	100	100	100	100

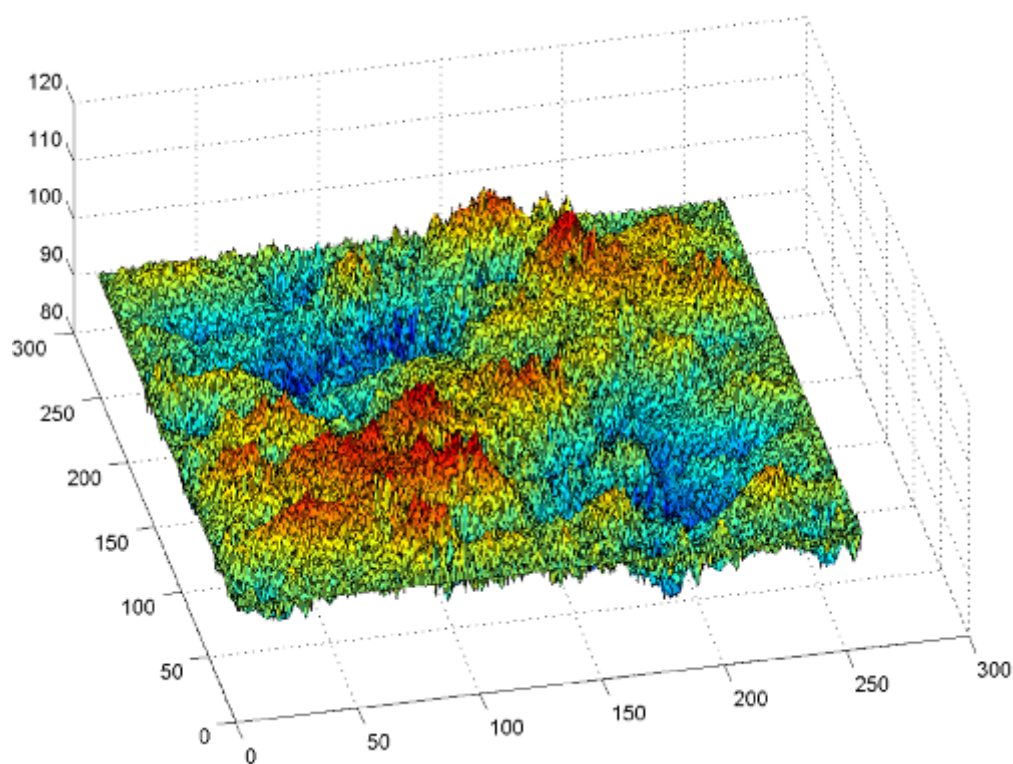
s_{ij}						s'_{ij}					
		j						j			
		1	2	3	4			1	2	3	4
i	1	0.45	0.35	-0.3	0.35	i	1	0.2	0.3	0.2	0.4
	2	0.4	-0.15	0.25	-0.35		2	0.1	0.3	-0.3	0.5
	3	-0.45	0.15	-0.45	0.2		3	0.3	-0.4	0.2	0.3
	4	-0.15	-0.25	0.45	0.25		4	-0.3	0.2	-0.1	0.4

$\bar{s}_{ij}$						$\bar{s}'_{ij}$					
		j						j			
		1	2	3	4			1	2	3	4
i	1	0.4	-0.6	0.3	0.4	i	1	-0.2	0.3	0.4	0.2
	2	-0.5	0.4	-0.2	-0.3		2	0.2	0.3	-0.6	0.1
	3	0.4	0.2	-0.1	-0.3		3	-0.3	-0.3	-0.4	0.3
	4	-0.3	0.4	-0.5	0.2		4	-0.1	0.5	-0.3	0.2

Πίνακας 8.2: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας του παραδείγματος II.



Σχήμα 8.3: Η προβολή του ελκυστή του παραδείγματος II στο χώρο xyz .



Σχήμα 8.4: Η προβολή του ελκυστή του παραδείγματος II στο χώρο xyt .



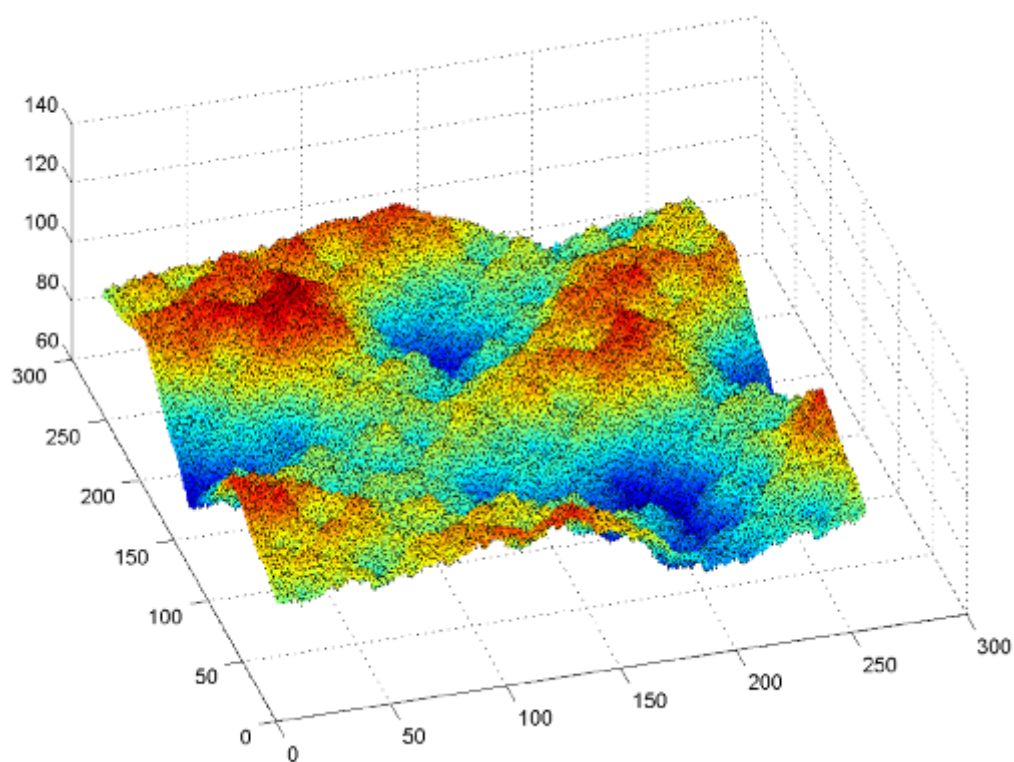
Παράδειγμα III. Σε αυτό το παράδειγμα επιλέγουμε και πάλι $M = N = 4$, $K = L = 1$ (οπότε $a = 4$) και παίρνουμε τα σημεία παρεμβολής του πίνακα 8.3 και τους συντελεστές $s_{ij} = s'_{ij} = \bar{s}_{ij} = \bar{s}'_{ij} = 0.25$, για $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$. Ο ελκυστής που προκύπτει φαίνεται στα σχήματα 8.5 και 8.6. Στη συνέχεια αλλάζουμε τα σημεία παρεμβολής (μόνο ως προς την συντεταγμένη t), όπως φαίνεται στον πίνακα 8.4. Ο νέος ελκυστής φαίνεται στα σχήματα 8.7 και 8.8.

$\Delta - z$							$\Delta - t$						
		x							x				
		0	64	128	192	256			0	64	128	192	256
y	0	100	105	115	090	100	y	0	100	090	095	105	100
	64	115	100	090	080	115		64	091	115	110	085	091
	128	080	095	105	115	080		128	115	085	115	095	115
	192	110	120	080	110	110		192	089	110	090	115	089
	256	100	105	115	090	100		256	100	090	095	105	100

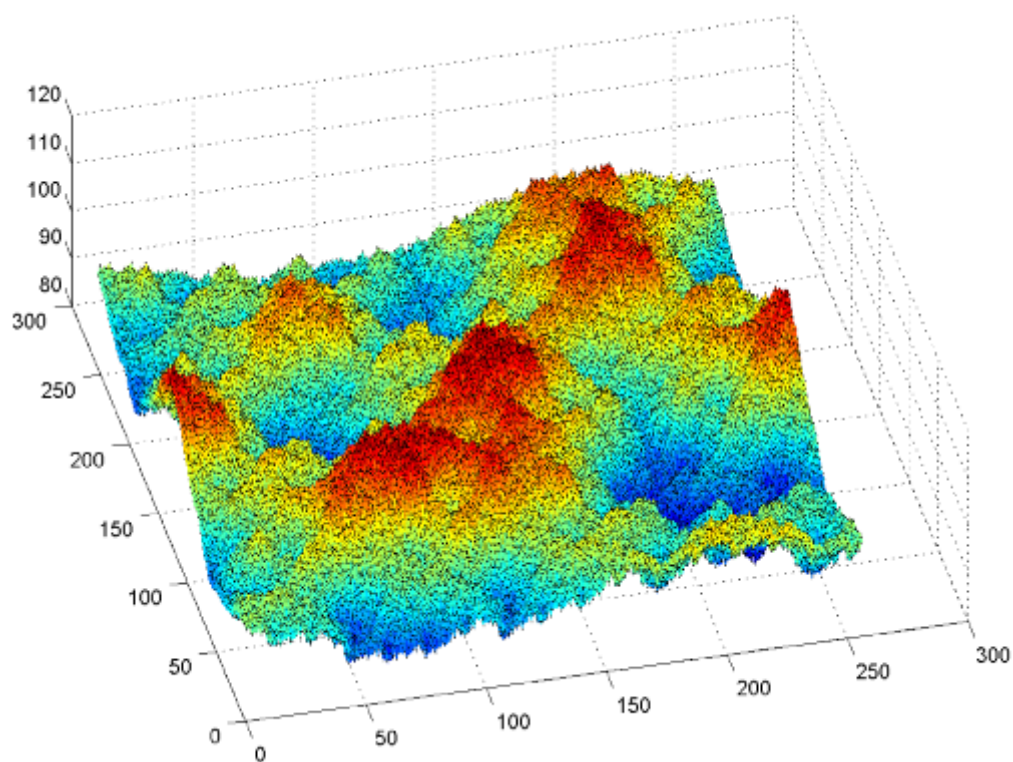
Πίνακας 8.3: Τα σημεία παρεμβολής του πρώτου ελκυστή του παραδείγματος III.

$\Delta - z$							$\Delta - t$						
		x							x				
		0	64	128	192	256			0	64	128	192	256
y	0	100	105	115	090	100	y	0	100	080	115	090	100
	64	115	100	090	080	115		64	120	095	120	070	120
	128	080	095	105	115	080		128	100	120	090	115	100
	192	110	120	080	110	110		192	070	090	115	085	070
	256	100	105	115	090	100		256	100	080	115	090	100

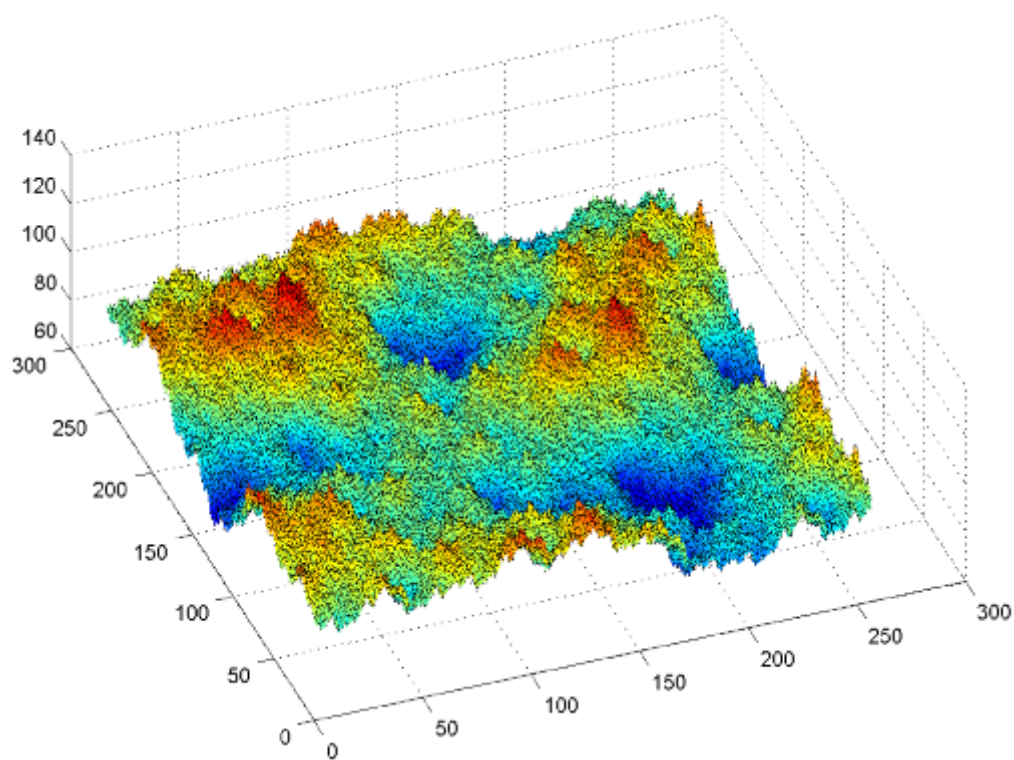
Πίνακας 8.4: Τα σημεία παρεμβολής του δεύτερου ελκυστή του παραδείγματος III.



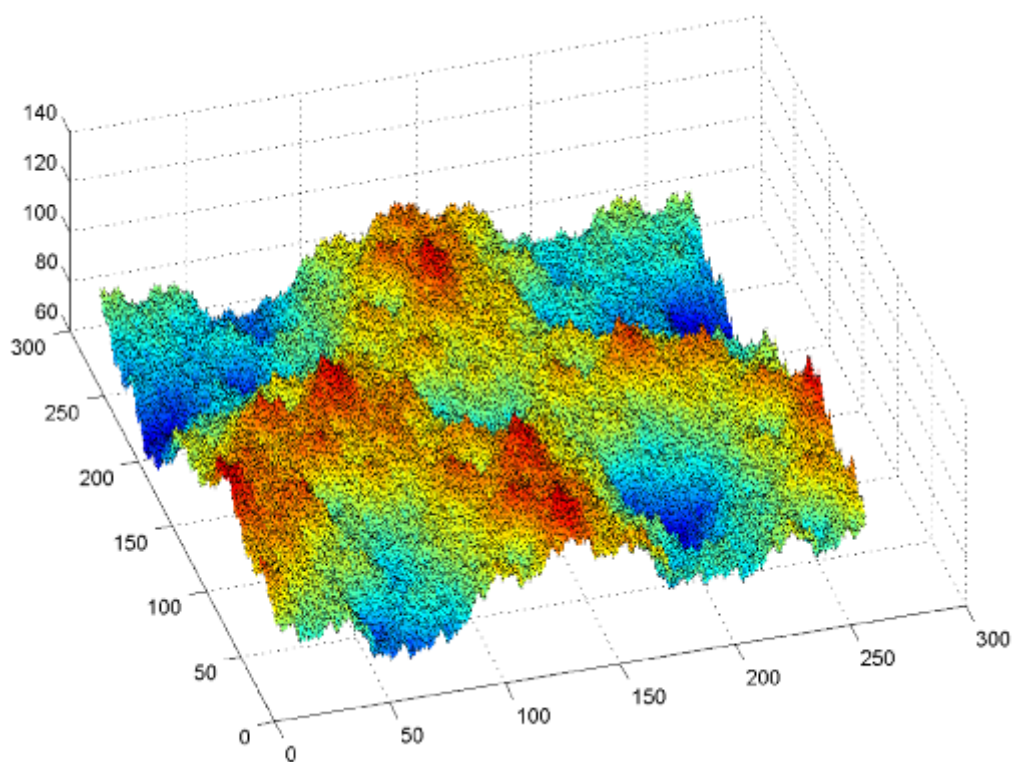
Σχήμα 8.5: Η προβολή του πρώτου ελκυστή του παραδείγματος ΙΙΙ στο χώρο xyz .



Σχήμα 8.6: Η προβολή του πρώτου ελκυστή του παραδείγματος ΙΙΙ στο χώρο xyt .



Σχήμα 8.7: Η προβολή του δεύτερου ελκυστή του παραδείγματος ΙΙΙ στο χώρο xyz .



Σχήμα 8.8: Η προβολή του δεύτερου ελκυστή του παραδείγματος ΙΙΙ στο χώρο xyt .

Κεφάλαιο 9

Συμπίεση Εικόνας με Χρήση Fractal Επιφανειών Παρεμβολής

Programming is understanding.

Kristen Nygaard

9.1 Εισαγωγή

Η αλματώδης ανάπτυξη της τεχνολογίας των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και ειδικότερα των οπτικών συσκευών (οθόνες, τηλεοράσεις κλπ), τα τελευταία χρόνια, είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση του χώρου που απαιτείται για την αποθήκευση οπτικοακουστικού υλικού (εικόνες, ταινίες κλπ). Για παράδειγμα, μια έγχρωμη εικόνα με ανάλυση 1024×768 (όση δηλαδή είναι η ανάλυση μιας κοινής οθόνης) χρειάζεται περίπου 2.25 Mbytes. Παρ' ότι το κόστος αποθήκευσης ανά byte είναι μικρότερο από το 1 εκατομμυριοστό ενός ευρώ, ένα οικογενειακό άλμπουμ φωτογραφιών θα κόστιζε αρκετές εκατοντάδες (ή και χιλιάδες) ευρώ. Επίσης, η μετάδοση φωτογραφιών μέσω ενός δικτύου θα χρειαζόταν αρκετή ώρα μέχρι να ολοκληρωθεί. Για αυτούς τους λόγους, από πολύ νωρίς κρίθηκε απαραίτητο να αναπτυχθούν μέθοδοι για την “συμπίεση” των δεδομένων αυτών.

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι συμπίεσης εικόνας άλλες λιγότερο και άλλες περισσότερο γνωστές. Η πιο γνωστή βασίζεται στην αποθήκευση των συντελεστών Fourier χαμηλής συχνότητας (JPEG), αγνοώντας τους συντελεστές υψηλής συχνότητας. Μια άλλη μέθοδος που τα τελευταία χρόνια έχει κινήσει το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών είναι διεθνώς γνωστή ως Fractal Συμπίεση Εικόνας. Με τον όρο αυτό δεν αναφερόμαστε σε μια συγκεκριμένη μέθοδο, αλλά σε μια οικογένεια μεθόδων που βασίζονται σε χρήση ΠΣΕΣ. Υπάρχουν ακόμα αρκετές μεθοδολογίες βασισμένες σε wavelets.

Οι πρώτοι που σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν ΣΕΣ για να μοντελοποιήσουν εικόνες ήταν οι M. F. Barnsley και A. D. Sloan το 1987 (βλέπε [Bar86]), αφού παρατήρησαν ότι με την χρήση ΣΕΣ μπορούσαν να κατασκευαστούν αρκετά πολύπλοκα σχήματα. Οι πρώτες προσπάθειες για να συμπεστούν πραγματικές εικόνες με τη μέθοδο του Barnsley απαιτούσαν την παρουσία ενός ανθρώπου που, χρησιμοποιώντας διάσθηση, θα κατάφερνε να βρει ένα ΣΕΣ με ελκυστή αρκετά “κοντά” στην αρχική εικόνα. Αποθηκεύοντας μόνο τους συντελεστές του ΣΕΣ (και όχι όλα τα pixels της εικόνας) μπορούσε να επιτευχθεί μεγάλος συντελεστής συμπίεσης. Αρχικά, η διαδικασία αυτή χρειαζόταν συνήθως αρκετές μέρες μέχρι να ολοκληρωθεί επιτυχώς. Δύο χρόνια αργότερα (το 1989), ο Arnaud



Jacquin ([Jac92], [Jac93]), μεταπτυχιακός φοιτητής του Barnsley, κατασκεύασε τον πρώτο αλγόριθμο που εύρισκε αυτόματα (χωρίς μεσολάβηση ανθρώπου) τους συντελεστές ενός ΠΣΕΣ, του οποίου ο ελκυστής μοιάζει με την αρχική εικόνα. Η επιτυχία του Jacquin, εκτός από την δημιουργία του αλγορίθμου, ήταν η χρήση ΠΣΕΣ και όχι ΣΕΣ όπως αρχικά είχαν προτείνει οι Barnsley και Sloan. Έτσι έλυσε το σημαντικότερο πρόβλημα της προηγούμενης μεθόδου. Οι εικόνες που προκύπτουν ως ελκυστές ενός ΣΕΣ αποτελούνται από τμήματα τα οποία μοιάζουν στη συνολική εικόνα.

Η βασική ιδέα του Jacquin είναι αρκετά απλή. Αρχικά, η εικόνα κατακερματίζεται σε μικρότερα τμήματα (ίδιου μεγέθους) τα οποία ονομάζονται τομείς και σε τμήματα (ίδιου μεγέθους αλλά μεγαλύτερα από τα προηγούμενα) που ονομάζονται περιοχές (βλέπε σχήμα 9.1). Χρησιμοποιώντας affine απεικονίσεις της μορφής

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(x, y) \\ T(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

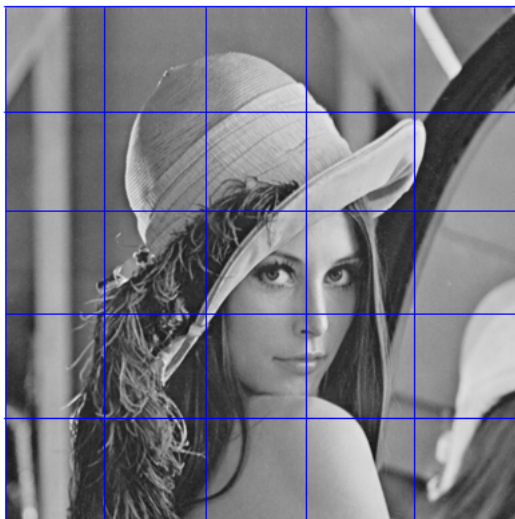
$$\text{με } \chi(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by + g \\ cx + dy + h \end{pmatrix} \quad \text{και } T(x, y, z) = sz + k,$$

ο αλγόριθμος του Jacquin έφταχνε να βρει για κάθε τομέα μια περιοχή που η εικόνα της, μέσω μιας τέτοιας απεικόνισης, να “ταιριάζει” με τον τομέα (βλέπε σχήμα 9.2). Οι παράμετροι a, b, c, d, s, g, h, k επιλέγονται έτσι ώστε η εικόνα της περιοχής να μοιάζει όσο το δυνατόν περισσότερο με τον τομέα. Η αναζήτηση της “καλύτερης” περιοχής ήταν εξαντλητική. Ο αλγόριθμος (για κάθε τομέα) έλεγχε όλες τις περιοχές, υπολογίζοντας κατάλληλους συντελεστές για την w και αποθήκευε την περιοχή που έμοιαζε περισσότερο στον τομέα. Παρακάτω δίνεται μια σύντομη περιγραφή του αλγορίθμου αυτού.

- Είσοδος της (grayscale) εικόνας προς συμπίεση.
- Διαίρεση της εικόνας σε περιοχές (Domains) και τομείς (Regions).
- Για κάθε τομέα R κάνε τα εξής:
 - Για κάθε περιοχή D βρες την απεικόνιση w ώστε $w(D) = R$. Οι συντελεστές κάθε απεικόνισης w υπολογίζονται ως εξής:
 1. Οι a, b, c, d, g, h από την προϋπόθεση ότι $\chi(D) = R$
 2. Οι s, t με άλλες τεχνικές (π.χ. Ελαχίστων τετραγώνων)
 - Αποθήκευσε τον αριθμό της περιοχής και τους αριθμούς s, t για τους οποίους η απόσταση του $w(D)$ από το R είναι η μικρότερη δυνατή.

Είναι φανερό ότι ο αλγόριθμος παίρνει σαν είσοδο μια εικόνα (αποχρώσεων του γκριζου) και δίνει στην έξοδο τις παραμέτρους ενός ΠΣΕΣ. Έτσι επιτυγχάνεται υψηλός δείκτης συμπίεσης αφού, αντί να αποθηκευθεί ολόκληρη η εικόνα, αποθηκεύονται μόνο οι παράμετροι του ΠΣΕΣ. Αν θέλουμε να δούμε την εικόνα, αρκεί να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο αιτιοκρατικών επαναλήψεων και να υπολογίσουμε τον ελκυστή του ΠΣΕΣ. Ο ελκυστής αυτός δεν θα ταυτίζεται με την αρχική εικόνα, αλλά σύμφωνα με το θεώρημα συγκόλλησης (βλέπε σελ. 42 και 48) θα είναι αρκετά κοντά στην εικόνα αυτή.

Παρ’ ότι το ποσοστό συμπίεσης που μπορεί να επιτευχθεί είναι πολύ μεγάλο, αλλά ο παραπάνω αλγόριθμος έχει δύο πολύ σοβαρά μειονεκτήματα. Καταρχήν, ο χρόνος που απαιτείται για την εξαντλητική αναζήτηση όλων των περιοχών είναι πολύ μεγάλος. Ακόμα και σε έναν σύγχρονο προσωπικό υπολογιστή εφοδιασμένο με ένα επεξεργαστή Pentium IV στα 2.8 MHz ο χρόνος που απαιτείται για μια εικόνα με ανάλυση 1024×768 μπορεί να ξεπεράσει τα 30 λεπτά. Παρ’ όλα αυτά, η αποσυμπίεση (δηλαδή η κατασκευή του ελκυστή από το ΠΣΕΣ που έχει αποθηκευθεί) είναι αρκετά γρήγορη διαδικασία. Επιπλέον, η ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας δεν ήταν πολύ υψηλή. Γι αυτό το λόγο, αρκετοί ερευνητές προσπάθησαν να βελτιώσουν την τεχνική του Jacquin και να βελτιώσουν



Σχήμα 9.1: Η γνωστή εικόνα lena χωρίζεται σε 16 περιοχές.

τόσο την ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας όσο και τον χρόνο συμπίεσης. Ο Yuval Fisher το 1994 ανέπτυξε μια μέθοδο που βελτίωνε σημαντικά την ποιότητα της εικόνας δίνοντας όλες τις πρακτικές λεπτομέρειες στο βιβλίο του [Fis95]. Ο αλγόριθμος του Fisher ακολούθησε τις βασικές αρχές του αλγορίθμου που εισήγαγε ο Jacquin, αλλά αν για κάποιον τομέα δεν έβρισκε μια περιοχή που να μοιάζει ικανοποιητικά, διχοτομούσε τον τομέα δημιουργώντας δύο νέους τομείς και επαναλάμβανε την διαδικασία.

- Είσοδος της (grayscale) εικόνας προς συμπίεση και του αριθμού E .
- Διαίρεση της εικόνας σε περιοχές και τομείς.
- Για κάθε τομέα R κάνε τα εξής:
 - Για κάθε περιοχή D βρες την απεικόνιση w ώστε $w(D) = R$. Οι συντελεστές κάθε απεικόνισης w υπολογίζονται ως εξής:
 1. Οι a, b, c, d, g, h από την προϋπόθεση ότι $\chi(D) = R$
 2. Οι s, t με άλλες τεχνικές (π.χ. Ελαχίστων τετραγώνων)
 - Βρες τον αριθμό της περιοχής και τους συντελεστές s, t για τους οποίους η απόσταση του $w(D)$ από το R είναι η μικρότερη δυνατή.



Σχήμα 9.2: Αυτοόμοια κομμάτια στην εικόνα lena.

- Αν η απόσταση αυτή είναι μεγαλύτερη από E , τότε κόψε τον τομέα στα δύο και επανάλαβε την διαδικασία για τους δύο νέους τομείς.

Η παραπάνω τεχνική ονομάζεται HV partitioning (σχήμα 9.3. Μια άλλη τεχνική που εφαρμόστηκε έκοβε τον τομέα σε τέσσερις νέους τομείς (quadtree partitioning, σχήμα 9.4). Η τεχνική αυτή, μαζί με αρκετές βελτιώσεις για τη μείωση του χρόνου συμπίεσης, υλοποιήθηκε από την εταιρία Iterated Systems Inc (που ίδρυσε ο Barnsley) δίνοντας αποτελέσματα καλύτερα από το γνωστό μοντέλο συμπίεσης JPEG. Λεπτομέρειες για την υλοποίηση αυτή δόθηκαν στο βιβλίο του Ning Lu [Lu97]. Σημειώνουμε ότι, τόσο ο Fisher όσο και η υλοποίηση της Iterated Systems Inc χρησιμοποίησαν affine απεικονίσεις της μορφής

$$w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi(x, y) \\ T(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

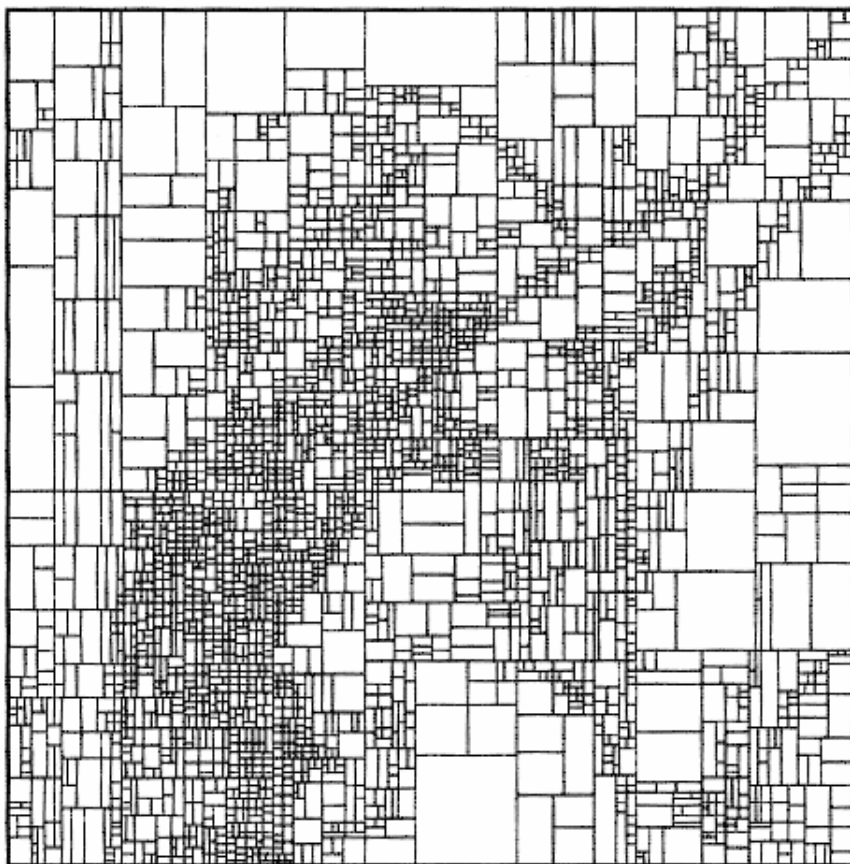
$$\text{όπου } \chi(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by + g \\ cx + dy + h \end{pmatrix} \quad \text{και } T(x, y, z) = ex + fy + sz + k.$$

Για την αύξηση της ταχύτητας του αλγορίθμου συμπίεσης εφαρμόστηκαν διάφορες μέθοδοι. Η πιο γνωστή βασίζεται σε ομαδοποίηση των περιοχών με βάση κοινά χαρακτηριστικά (clustering) (βλέπε

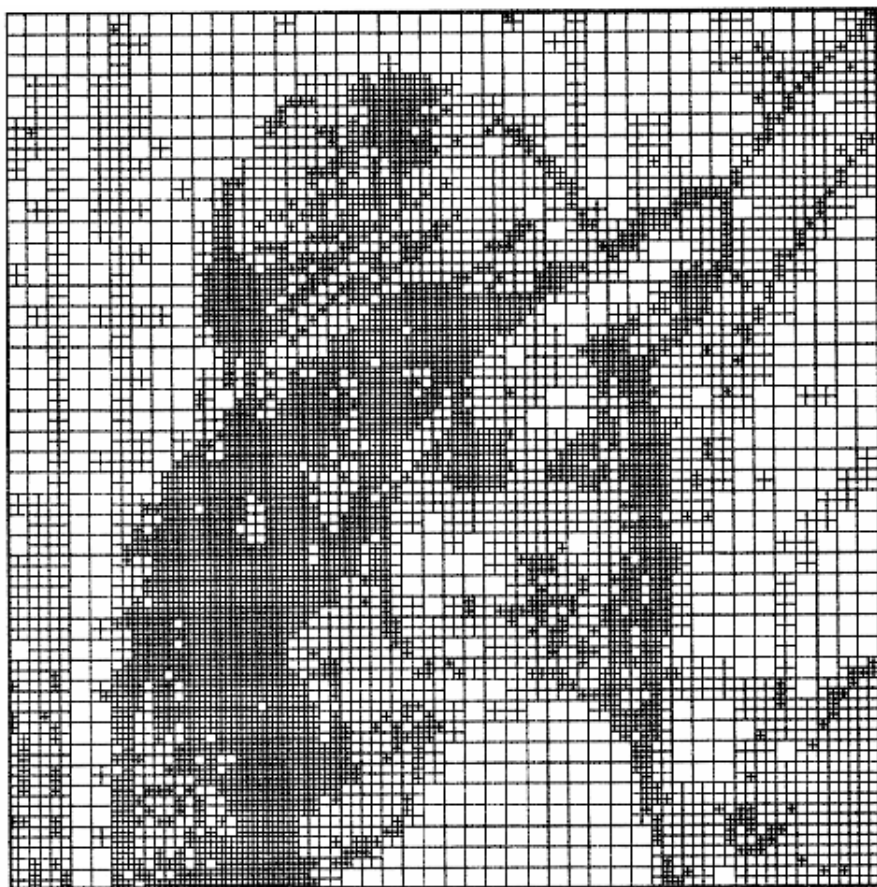


[Jac92], [Fis95]. Έτσι ο αλγόριθμος, αντί να εφαρμόσει εξαντλητική αναζήτηση σε όλες τις περιοχές, ψάχνει μόνο την ομάδα που παρουσιάζει κοινά χαρακτηριστικά με τον αντίστοιχο τομέα. Πιο πρόσφατες μέθοδοι χρησιμοποιούν γενετικούς αλγόριθμους (βλέπε [MMK98]) για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια νέα τεχνική συμπίεσης εικόνας που θα βασίζεται σε Fractal παρεμβολή. Θα θεωρήσουμε την (grayscale) εικόνα ως μια επιφάνεια $z = f(x, y)$ και θα αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα υπολογίζει σημεία παρεμβολής, συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας και πίνακα συνδέσεων, τέτοιους ώστε το Bivariate ΠΣΕΣ που θα συνδέεται με τα δεδομένα αυτά να έχει ελκυστή που θα προσεγγίζει την αρχική εικόνα.



Σχήμα 9.3: HV partitioning στην εικόνα lena.



Σχήμα 9.4: Quadtree partitioning στην εικόνα lena.



9.2 Κατασκευή Προσεγγιστικά Συνεχών Επιφανειών Παρεμβολής

Στο κεφάλαιο 6 περιγράψαμε αναλυτικά τη μεθοδολογία κατασκευής BFEΠ, με σημεία παρεμβολής σε ορθογώνιο πλέγμα. Είδαμε, ότι οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα σημεία παρεμβολής (βλέπε σελίδες 95 -100 στο κεφάλαιο 6) είναι αρκετά περιοριστικές. Πιο συγκεκριμένα ή θα πρέπει να είναι συνενυθιακά στα σύνορα των περιοχών J_{kl} , για $k = 1, 2, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L$ ή θα πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$s_{i,j} \cdot R_{\mathbb{J}(i,j)}^{\kappa}[\nu] = s_{i+1,j} \cdot L_{\mathbb{J}(i+1,j)}^{\kappa}[\nu], \quad (9.3)$$

$$s_{i,j} \cdot U_{\mathbb{J}(i,j)}^{\kappa}[\nu] = s_{i,j+1} \cdot D_{\mathbb{J}(i,j+1)}^{\kappa}[\nu], \quad (9.4)$$

για $i = 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, M-1$, $\nu = 1, \dots, a^{\kappa-1} - 1$, $\kappa \in \mathbb{N}$, ώστε σε κάθε βήμα οι περιοχές που απεικονίζονται σε γειτονικούς τομείς να “κολλάνε” μεταξύ τους.

Πρακτικά ο έλεγχος των σχέσεων 9.3-9.4 για κάθε κ είναι αδύνατος, αν όμως περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $\kappa = 1$, οι ελκυστές που θα προκύπτουν δεν θα είναι συνεχείς συναρτήσεις αλλά θα προσεγγίζουν αρκετά καλά μια συνεχή συνάρτηση (για μεγαλύτερες τιμές του κ η προσέγγιση θα είναι ακόμη καλύτερη). Στην πραγματικότητα, τα σύνολα που θα προκύψουν ως ελκυστές (G) δε μπορούν να θεωρηθούν ως γραφήματα συναρτήσεων, αφού θα υπάρχουν άπειρα σημεία $(x, y, z) \in G$ με $(x, y) \in \partial I_{ij}$ για $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$. Γι αυτό χρειάζεται μια μικρή τροποποίηση στον αλγόριθμο αιτιοκρατικών επαναλήψεων. Σε κάθε βήμα θα προκύπτουν δύο διαφορετικά σημεία (x, y, z) και (x, y, z') με $(x, y) \in \partial I_{ij}$ (π.χ. ένα μέσω της εφαρμογής της w_{ij} και ένα μέσω της εφαρμογής της $w_{i+1,j}$, αν $x = x_i$). Ο νέος αλγόριθμος θα κρατάει μόνο το ένα από αυτά τα σημεία ή θα παίρνει το σημείο $(x, y, \frac{z+z'}{2})^1$. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι αν τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας ικανοποιούν τις

$$s_{i,j} \cdot R_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu] = s_{i+1,j} \cdot L_{\mathbb{J}(i+1,j)}[\nu], \quad (9.5)$$

$$s_{i,j} \cdot U_{\mathbb{J}(i,j)}[\nu] = s_{i,j+1} \cdot D_{\mathbb{J}(i,j+1)}[\nu], \quad (9.6)$$

για $i = 1, \dots, N-1$, $j = 1, \dots, M-1$, $\nu = 1, \dots, a^{\kappa-1} - 1$, τότε ο ελκυστής του ΠΣΕΣ (που προκύπτει με βάση τον τροποποιημένο αλγόριθμο) θα προσεγγίζει μια συνεχή επιφάνεια. Στο σχήμα 9.5 δίνουμε το γράφημα του ελκυστή του ΠΣΕΣ που περιγράφεται στον πίνακα 9.1 και ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη.

¹Το πρόγραμμα Α'9 στο παράρτημα Α, σβήνει το σημείο που προκύπτει από την εφαρμογή της w_{ij} και μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς τροποποίηση.

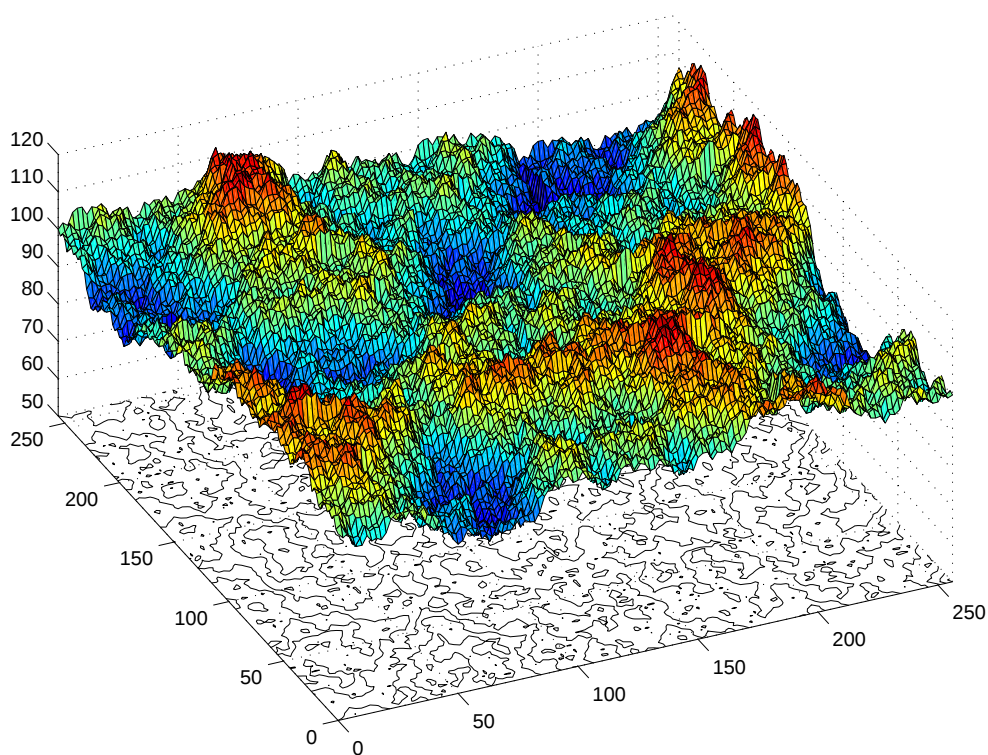


Δ						
		x				
		0	64	128	192	256
y	0	100	110	100	90	100
	64	90	100	90	105	110
	128	100	110	100	90	100
	192	110	105	110	95	90
	256	100	90	100	110	100

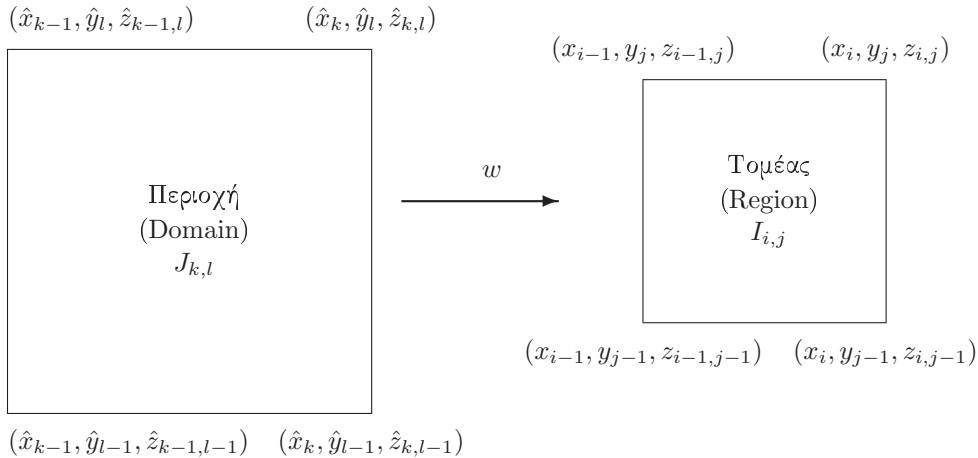
$$C = \begin{pmatrix} 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1 \\ 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1 \\ 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{pmatrix},$$

s_{ij}					
		j			
		1	2	3	4
i	1	+0.65	-0.65	+0.65	-0.65
	2	-0.65	+0.65	+0.65	-0.65
	3	+0.65	+0.65	+0.65	+0.65
	4	-0.65	-0.65	+0.65	-0.65

Πίνακας 9.1: Τα σημεία παρεμβολής και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας ενός ΠΣΕΣ. Έχουμε επιλέξει $N = M = 4$ και $K = L = 2$.



Σχήμα 9.5: Ο ελκυστής του ΠΣΕΣ που περιγράφεται στον πίνακα 9.1.

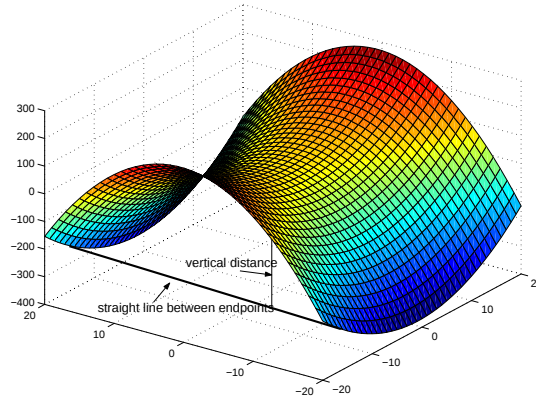
Σχήμα 9.6: Απεικόνιση της περιοχής D στον τομέα R μέσω της w .

9.3 Συμπίεση Εικόνας με χρήση ΒΦΕΠ

Έστω μια εικόνα αποχρώσεων του γκριζου (grayscale) διαστάσεων $N_0 \times M_0$. Έστω, επίσης, $z = f(x, y)$ μια συνεχής συνάρτηση που αναπαριστά την εικόνα, έτσι ώστε η τιμή της $f(x, y)$ για $x = 1, 2, \dots, N_0$ και $y = 1, 2, \dots, M_0$ να είναι ένας ακέραιος αριθμός από το 0 έως το 256 που να αναπαριστά την απόχρωση του γκριζου στο (x, y) pixel της εικόνας. Σκοπός μας είναι να βρούμε μια μέθοδο ώστε να επιλέξουμε κατάλληλα σημεία παρεμβολής (από τα pixels της εικόνας), συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας και πίνακα συνδέσεων ώστε το ΠΣΕΣ που θα συνδέεται με αυτά τα δεδομένα να έχει ως ελκυστή το γράφημα μιας συνάρτησης (κατά προσέγγιση συνεχούς) που να είναι “αρκετά κοντά” στη συνάρτηση f . Το πρόβλημα της αναγνώρισης των παραμέτρων αυτών θα το λύσουμε με μεθόδους παρόμοιες με αυτές που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 5, όπου μοντελοποιήθηκαν μονοδιάστατα σήματα χρησιμοποιώντας ΦΣΠ. Ας δούμε, καταρχάς, πως μπορεί να επιλεγεί ο κατάλληλος συντελεστής κατακόρυφης αναλογίας. Όπως και στην περίπτωση του μονοδιάστατου μοντέλου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους.

9.3.1 Γεωμετρικός Υπολογισμός των Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε χωρίσει την εικόνα σε τετράγωνες περιοχές J_{kl} , $k = 1, 2, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L$ πλάτους ψ και σε τετράγωνους τομείς I_{ij} , $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$ πλάτους δ . Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι θέλουμε να απεικονίσουμε την τετραγωνική περιοχή $D = J_{kl}$ (για κάποια k, l), που περιέχει ψ^2 pixels και έχει ακραία σημεία τα $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_l, \hat{z}_{k-1,l-1})$, $(\hat{x}_k, \hat{y}_l, \hat{z}_{k,l-1})$, $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_l, \hat{z}_{k-1,l})$ (όπου $\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1} = \hat{y}_l - \hat{y}_{l-1} = \psi$), στον τετραγωνικό τομέα $R = I_{ij}$



Σχήμα 9.7: Γεωμετρικός υπολογισμός του συντελεστή s .

που περιέχει δ^2 pixels ($\delta < \psi$) και έχει ακραία σημεία τα $(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{i,j-1})$, $(x_i, y_{j-1}, z_{i,j-1})$, $(x_i, y_j, z_{i,j})$, $(x_{i-1}, y_j, z_{i-1,j})$ (όπου $x_i - x_{i-1} = y_j - y_{j-1} = \delta$), μέσω μιας bivariate απεικόνισης w (σχήμα 9.6). Όπως έχουμε αναλύσει σε προηγούμενα κεφάλαια, πρέπει τα ακραία σημεία της περιοχής $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{l-1}, \hat{z}_{k-1,l-1})$, $(\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1}, \hat{z}_{k,l-1})$, $(\hat{x}_k, \hat{y}_l, \hat{z}_{k,l})$, $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_l, \hat{z}_{k-1,l})$ να απεικονισθούν στα ακραία σημεία του τομέα $(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{i,j-1})$, $(x_i, y_{j-1}, z_{i,j-1})$, $(x_i, y_j, z_{i,j})$, $(x_{i-1}, y_j, z_{i-1,j})$ αντίστοιχα και το μέρος της συνάρτησης της εικόνας που περιέχεται στην περιοχή J_{kl} να συσταλεί κατά τον παράγοντα κατακόρυφης αναλογίας s της απεικόνισης w .

Επιλέγουμε $y = \hat{y}_{l-1}$. Έστω μ_0^y η μέση κατακόρυφη απόσταση μεταξύ οποιουδήποτε σημείου της εικόνας (με $y = \hat{y}_{l-1}$ και $x = \hat{x}_{k-1}, \hat{x}_{k-1}+1, \dots, \hat{x}_{k-1}+\psi$) και του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{l-1}, \hat{z}_{k-1,l-1})$ και $(\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1}, \hat{z}_{k,l-1})$. Οι αποστάσεις αυτές λαμβάνονται ως θετικές αν το σημείο βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα, ή αρνητικές σε αντίθετη περίπτωση (σχήμα 9.7). Στη συνέχεια επιλέγουμε $y = \hat{y}_{l-1} + 1$ και υπολογίζουμε τη μέση απόσταση μ_1^y με ανάλογο τρόπο. Γενικά, αν $y = \hat{y}_{l-1} + r$ (για $r = 0, 1, \dots, \psi$) η μ_r^y θα είναι η μέση κατακόρυφη απόσταση μεταξύ οποιουδήποτε σημείου της εικόνας (με $y = \hat{y}_{l-1} + r$ και $x = \hat{x}_{k-1}, \hat{x}_{k-1} + 1, \dots, \hat{x}_{k-1} + \psi$) και του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{l-1}+r, f(\hat{x}_{k-1}, \hat{y}_{l-1}+r))$ και $(\hat{x}_k, \hat{y}_{l-1}+r, \hat{z}_{k,l-1})$. Με ανάλογο τρόπο επιλέγοντας $x = \hat{x}_{k-1} + r$ για $r = 0, 1, 2, \dots, \psi$ υπολογίζουμε τη μέση κατακόρυφη απόσταση μ_r^x μεταξύ οποιουδήποτε σημείου της εικόνας (με $x = \hat{x}_{k-1} + r$ και $y = \hat{y}_{l-1}, \hat{y}_{l-1} + 1, \dots, \hat{y}_{l-1} + \psi$) και του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $(\hat{x}_{k-1} + r, \hat{y}_{l-1}, \hat{z}_{k-1,l-1})$ και $(\hat{x}_{k-1} + r, \hat{y}_l, f(\hat{x}_{k-1} + r, \hat{y}_l))$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την τιμή μ από τον τύπο

$$\mu = \text{mean}\{\mu_r^x, \mu_r^y, r = 0, 1, \dots, \psi\}.$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε την τιμή ν χρησιμοποιώντας τις τιμές της εικόνας που βρίσκονται μέσα στον τομέα I_{ij} . Έτσι ο συντελεστής s θα είναι

$$s = \frac{\nu}{\mu}.$$

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε δεν είναι αυθαίρετη. Βασίζεται στις ιδιότητες των bivariate απεικονίσεων που παρουσιάζονται στη σελ 90 (και συγκεκριμένα στην 1η ιδιότητα).



9.4 Αναλυτικός Υπολογισμός των Συντελεστών Κατακόρυφης Αναλογίας

Και πάλι υποθέτουμε ότι θέλουμε να απεικονίσουμε την τετραγωνική περιοχή $D = J_{kl}$ στον τετραγωνικό τομέα $R = I_{ij}$ χρησιμοποιώντας μια bivariate απεικόνιση w (σχήμα 9.6) της μορφής

$$w_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0x + b_0 \\ c_0y + d_0 \\ e_0x + f_0y + g_0xy + s_0z + k_0 \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 6 (επειδή τα ακραία σημεία της περιοχής απεικονίζονται στα ακραία σημεία του τομέα) οι παράμετροι της απεικόνισης θα δίνονται από τους τύπους

$$a_0 = \frac{x_i - x_{i-1}}{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}} \quad (9.8)$$

$$b_0 = \frac{\hat{x}_k x_{i-1} - \hat{x}_{k-1} x_i}{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}} \quad (9.9)$$

$$c_0 = \frac{y_j - y_{j-1}}{\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}} \quad (9.10)$$

$$d_0 = \frac{\hat{y}_l y_{j-1} - \hat{y}_{l-1} y_j}{\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}} \quad (9.11)$$

$$g_0 = \frac{z_{ij} + z_{i-1,j-1} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1} - s_{ij}(\hat{z}_{kl} + \hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k-1,l} - \hat{z}_{k,l-1})}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} \quad (9.12)$$

$$e_0 = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - s_{ij}(\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-1}) - g_{ij}\hat{y}_{l-1}(\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k)}{\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k} \quad (9.13)$$

$$f_0 = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - s_{ij}(\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-1}) - g_{ij}\hat{x}_{k-1}(\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l)}{\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l} \quad (9.14)$$

$$k_0 = z_{ij} - e_{ij}\hat{x}_k - f_{ij}\hat{y}_l - s_{ij}\hat{z}_{kl} - g_{ij}\hat{x}_k\hat{y}_l. \quad (9.15)$$

Θέτοντας

$$G_1 = \frac{z_{ij} + z_{i-1,j-1} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1}}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})},$$

$$G_2 = \frac{\hat{z}_{kl} + \hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k-1,l} - \hat{z}_{k,l-1}}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})},$$

$$E_1 = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-2} - G_1\hat{y}_{l-1}(\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k)}{\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k},$$

$$E_2 = \frac{\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-2} - G_2\hat{y}_{l-1}(\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k)}{\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k},$$

$$F_1 = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - G_1\hat{x}_{k-1}(\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l)}{\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l},$$

$$F_2 = \frac{\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-1} - G_2\hat{x}_{k-1}(\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l)}{\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l},$$

$$K_1 = z_{ij} - E_1\hat{x}_k - F_1\hat{y}_l - G_1\hat{x}_k\hat{y}_l,$$

$$K_2 = \hat{z}_{kl} - E_2\hat{x}_k - F_2\hat{y}_l - G_2\hat{x}_k\hat{y}_l,$$



θα έχουμε

$$\begin{aligned} g_0 &= G_1 - s_0 G_2, \\ e_0 &= E_1 - s_0 E_2, \\ f_0 &= F_1 - s_0 F_2, \\ \text{και } k_0 &= K_1 - s_0 K_2. \end{aligned}$$

Περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση όπου $\psi = \alpha^{\kappa+1}$, $\delta = \alpha^\kappa$, $\alpha, \kappa \in \mathbb{N}$. Σε αυτή την περίπτωση το σημείο της εικόνας με συντεταγμένες (m, n) που βρίσκεται στον τομέα R μπορεί να παραχθεί μέσω της απεικόνισης w από το σημείο με συντεταγμένες (μ, ν) της περιοχής D , όπου

$$\begin{aligned} m &= a\mu + b \\ n &= c\nu + d. \end{aligned}$$

Αν με $w_{m,n}$ συμβολίσουμε αυτή την παραγόμενη τιμή τότε

$$w_{m,n} = e_0\mu + f_0\nu + g_0\mu\nu + s_0f(\mu, \nu) + k_0.$$

Ο συντελεστής s_0 πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα

$$\Omega = \sum_{(m,n) \in \mathbb{R}} (w_{m,n} - f(m, n))^2.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές g_0, e_0, f_0, k_0 από τις παραπάνω εξισώσεις και εκτελώντας τις πράξεις θα έχουμε

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{R}} (e_0\mu + f_0\nu + g_0\mu\nu + s_0f(\mu, n\mu) + k_0 - f(m, n))^2 \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{R}} (E_1\mu + F_1\nu + G_1\mu\nu + K_1 - f(\mu, \nu) - s(E_2\mu + F_2\nu + G_2\mu\nu - f(\mu, \nu) + K_2))^2. \end{aligned}$$

Οπότε θέτοντας

$$\begin{aligned} A_{\mu,\nu} &= E_1\mu + F_1\nu + G_1\mu\nu + K_1 - f(m, n) \\ \text{και } B_{\mu,\nu} &= E_2\mu + F_2\nu + G_2\mu\nu + K_2 - f(\mu, \nu), \end{aligned}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{R}} (A_{\mu,\nu} - s_0 B_{\mu,\nu})^2 \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{R}} (A_{\mu,\nu}^2 - 2s_0 A_{\mu,\nu} + B_{\mu,\nu}^2 s_0^2). \end{aligned}$$

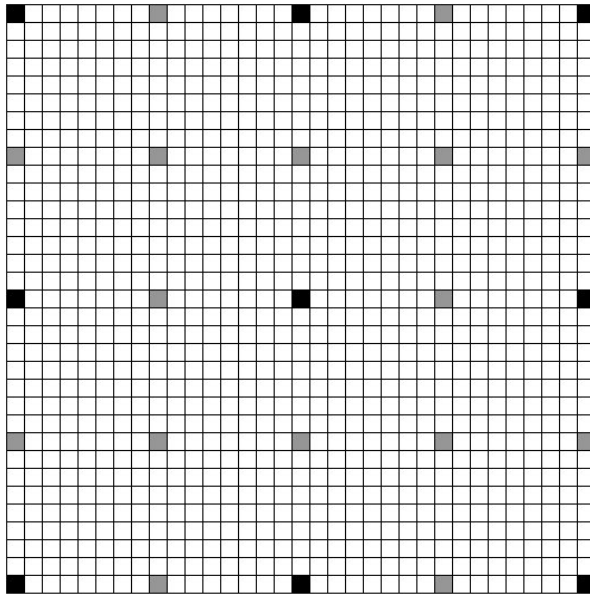
Για να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα Ω αρκεί

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s_0} = 0,$$

οπότε

$$s_0 = \frac{\sum_{(m,n) \in \mathbb{R}} A_{\mu,\nu} B_{\mu,\nu}}{\sum_{(m,n) \in \mathbb{R}} B_{\mu,\nu}^2},$$

$$\text{με } \mu = \frac{m-b}{a} \text{ και } \nu = \frac{n-d}{c} \left(a = c = \frac{1}{\alpha} \right).$$



Σχήμα 9.8: Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται το πλέγμα των αρχικών σημείων παρεμβολής που έχουμε επιλέξει για μια εικόνα διαστάσεων 33×33 με $\delta = 8$, $\psi = 16$ ($\alpha = 2$, $\kappa = 3$). Με σκούρο μαύρο φαίνονται τα σημεία του Q .

9.5 Αλγόριθμος Εύρεσης Παραμέτρων

Αφού αναλύσαμε τρόπους υπολογισμού των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας, μπορούμε να περιγράψουμε αναλυτικά τον αλγόριθμο εύρεσης παραμέτρων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια εικόνα διαστάσεων $N_0 \times M_0$ όπου κάθε pixel (n, m) έχει μια ακέραια τιμή από το 0 μέχρι το 255 που δίνεται από τη συνάρτηση f . Υποθέτουμε ακόμη ότι οι διαστάσεις της εικόνας ικανοποιούν τις σχέσεις $N_0 = \alpha^{r_1} + 1$, $M_0 = \alpha^{r_2} + 1$, $\alpha, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε τους αριθμούς δ και ψ a priori έτσι ώστε $\delta = \alpha^\kappa$ και $\psi = \alpha^{\kappa+1}$ για $\kappa \in \mathbb{N}$, $r_1, r_2 > \kappa$ και κατασκευάζουμε ένα σύνολο σημείων παρεμβολής $\Delta = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$ επιλέγοντας σημεία της εικόνας, τέτοια ώστε $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = N_0$ και $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = M_0$. Από αυτά τα σημεία επιλέγουμε ένα γνήσιο υποσύνολο του Δ το οποίο ονομάζουμε $Q = \{(\hat{x}_k, \hat{y}_l, \hat{z}_{kl}) : k = 0, 1, \dots, K; l = 0, 1, \dots, L\}$ με σημεία για τα οποία ισχύει $0 = \hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_K = N_0$ και $0 = \hat{y}_0 < \hat{y}_1 < \dots < \hat{y}_L = M_0$ (βλέπε σχήμα 9.8).

Τα σημεία παρεμβολής που επιλέξαμε χωρίζουν την εικόνα σε $N \times M = \alpha^{r_1 - \kappa} \times \alpha^{r_2 - \kappa}$ τετραγωνικούς τομείς I_{ij} πλευράς δ και σε $K \times L = \alpha^{r_1 - \kappa - 1} \times \alpha^{r_2 - \kappa - 1}$ τετραγωνικές περιοχές J_{kl} πλευράς ψ . Αριθμούμε τις περιοχές J_{kl} χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $\Phi(k, l) = (k - 1)K + l$ και τους τομείς χρησιμοποιώντας την $\Phi(i, j) = (i - 1)N + j$. Για κάθε έναν τομέα ψάχνουμε την “καλύτερα απεικονιζόμενη” περιοχή (ως προς μια μετρική) μέσω μιας bivariate απεικόνισης. Αν βρεθεί μια τέτοια περιοχή, τότε αποθηκεύουμε τον συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας που υπολογίσαμε (ως προς την περιοχή και τον τομέα) καθώς επίσης και το νούμερο της περιοχής (το νούμερο αυτό θα το καλούμε



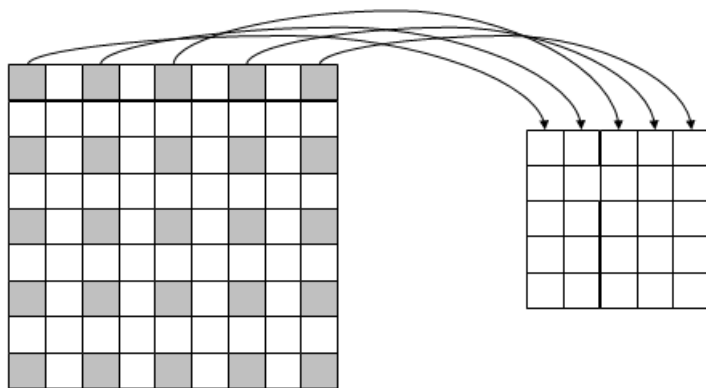
διεύθυνση του τομέα). Αν κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό, τότε “σπάμε” τον τομέα σε α^2 νέους τομείς πλευράς δ/α , αποθηκεύουμε τα νέα σημεία παρεμβολής (δηλαδή τα άκρα των νέων τομέων) και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για κάθε έναν από τους μικρότερους τομείς. Ο παρακάτω αλγόριθμος περιγράφει τη διαδικασία αυτή με κάθε λεπτομέρεια.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 9.1 (Συμπίεση Εικόνας)

1. Στην είσοδο εισάγεται μια εικόνα διαστάσεων $N_0 \times M_0$ με $N_0 = \alpha^{r_1} + 1$, $M_0 = \alpha^{r_2} + 1$, $\alpha, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$.
2. Επιλέγουμε αυθαίρετους αριθμούς δ και ψ έτσι ώστε $\delta = \alpha^\kappa$ και $\psi = \alpha^{\kappa+1}$ για $\kappa \in \mathbb{N}$, $r_1, r_2 > \kappa$. Επιλέγουμε, επίσης, το μέγιστο ανεκτό σφάλμα ϵ και το μέγιστο βάθος κατάτμησης $d_{\max}$.
3. Κατασκευάζουμε δύο ουρές με ονόματα Rqueue και IPqueue. Στην πρώτη τοποθετούμε όλους τους αριθμούς των τομέων και στη δεύτερη όλα τα σημεία παρεμβολής. Επιπλέον, δημιουργούμε δύο κενές ουρές με ονόματα Squeue και ADqueue στις οποίες αργότερα θα αποθηκεύσουμε τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας και τις διευθύνσεις των τομέων. Θέτουμε το βάθος $d = 1$ και κατασκευάζουμε μια άδεια ουρά Rqueue2.
4. Όσο η Rqueue δεν είναι άδεια **κάνουμε** τα εξής:
 - (α') Εξάγουμε ένα τομέα R από την Rqueue.
 - (β') Για κάθε περιοχή D **κάνουμε** τα εξής:
 - i. Υπολογίζουμε τον συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας s που αντιστοιχεί στην απεικόνιση της περιοχής D στον τομέα R , χρησιμοποιώντας τον γεωμετρικό ή τον αναλυτικό τρόπο υπολογισμού.
 - ii. Αν $s > 1$ **τότε** πηγαίνει στο βήμα (v). Σε αντίθετη περίπτωση έλεγξε τις συνθήκες 9.5-9.6. Αν δεν ισχύει **τότε** πηγαίνει στο βήμα (v).
 - iii. Υπολογίζουμε τις υπόλοιπες παραμέτρους της bivariate απεικόνισης w που απεικονίζει την περιοχή D στον τομέα R . Στη συνέχεια υπολογίζουμε το σύνολο $w(D)$ σύμφωνα με τον αλγόριθμο w map που δίνεται παρακάτω.
 - iv. Υπολογίζουμε (χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη μετρική) την απόσταση h μεταξύ του συνόλου $w(D)$ και του τομέα R .
 - v. Προχωράμε στην επόμενη περιοχή D .
 - (γ') Βρίσκουμε την περιοχή για την οποία η απόσταση h είναι ελάχιστη ($h_{\min}$).
 - (δ') Αν $h_{\min} > \epsilon$ και $d < d_{\max}$, **τότε** σπάμε την περιοχή σε τέσσερις νέους τομείς, τους οποίους προσθέτουμε στην ουρά Rqueue2. Στη συνέχεια προσθέτουμε τα άκρα των τομέων αυτών στην ουρά IPqueue (ως επιπλέον σημεία παρεμβολής) και προσθέτουμε ένα 0 στην ουρά ADqueue. **Αλλιώς** αποθηκεύουμε τον αριθμό της περιοχής με την ελάχιστη απόσταση στην ουρά ADqueue και τον συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας s στην ουρά Squeue.
5. Αν η ουρά Rqueue2 είναι άδεια, **τότε** θέτουμε Rqueue=Rqueue2, $d = d + 1$.
6. Αν $d \leq d_{\max}$, **τότε** πηγαίνουμε στο βήμα (4).
7. Αποθηκεύουμε τις παραμέτρους $d_{\max}$, δ , ψ και τα δεδομένα των ουρών Squeue, IPqueue, ADqueue.
8. Τέλος.

**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 9.2 (wmap - Απεικονίζουμε την περιοχή D στον τομέα R)**

1. Τοποθετούμε τα ακραία σημεία της περιοχής D στον νέο σύνολο $w(D)$.
2. Υπολογίζουμε τις υπόλοιπες παραμέτρους της απεικόνισης. Θυμίζουμε ότι $\alpha = \delta/\psi$, όπου δ και ψ το μήκος της πλευράς της περιοχής και του τομέα αντίστοιχα.
3. Απεικονίζουμε τα σημεία της πρώτης και της τελευταίας γραμμής της περιοχής ως εξής. Το πρώτο και το τελευταίο σημείο των γραμμών αυτών είναι σημεία παρεμβολής και έχουν ήδη απεικονισθεί. Απεικονίζουμε το $(\alpha + 1)$ σημείο της γραμμής της περιοχής στο 2ο σημείο της γραμμής του τομέα D . Συνεχίζουμε απεικονίζοντας τα σημεία $(2\alpha + 1)$, $(3\alpha + 1)$ κ.λ.π. της περιοχής στο 3ο, 4ο, ... σημείο του τομέα.
4. Για τις γραμμές $(\alpha + 1)$, $(2\alpha + 2)$, ..., $\psi + 1$ η απεικόνιση των σημείων γίνεται ως εξής. Απεικονίζουμε σημεία 1, $(\alpha + 1)$, $(2\alpha + 2)$, ..., $\psi + 1$ της περιοχής στο 1ο, 2ο, 3ο ... $\delta + 1$ σημείο του τομέα (σχήμα 9.9).



Σχήμα 9.9: Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ο τρόπος απεικόνισης των σημείων της περιοχής D στον τομέα R , σύμφωνα με τον αλγόριθμο 9.2 ($\delta = 4$, $\psi = 8$, $\alpha = 2$). Όπως φαίνεται δεν απεικονίζονται όλα τα σημεία της περιοχής, αλλά μόνο όσα είναι χρωματισμένα με γκριζο χρώμα, επειδή αυτά μόνο απεικονίζονται ακριβώς σε σημεία του τομέα.



9.6 Αλγόριθμος Αποσυμπίεσης

Ο αλγόριθμος συμπίεσης αποθηκεύει τις τιμές δ , ψ , τα σημεία παρεμβολής, τις διευθύνσεις κάθε τομέα και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας. Επειδή ο αριθμός των τομέων ποικίλει από εικόνα σε εικόνα δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τον συντελεστή συμπίεσης πριν την εφαρμογή του αλγορίθμου. Για να ανακατασκευάσουμε την αρχική εικόνα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο αιτιοκρατικών επαναλήψεων (AAE). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε αρχικό σύνολο (που να περιέχει σημεία σε όλες τις περιοχές). Σε όλες τις γνωστές μεθόδους Fractal συμπίεσης ως αρχικό σύνολο λαμβάνεται μια εικόνα με όλες τις τιμές στα pixel της ίσες με 0 και με διαδοχικές επαναλήψεις του AAE να λαμβάνεται ο ελκυστής. Το πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση είναι ότι δεν μπορεί κανείς να προβλέψει πόσες επαναλήψεις θα χρειαστούν για να προκύψει ένας “καλός” ελκυστής. Συνήθως οι 5-6 επαναλήψεις δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ένα άλλο πρόβλημα είναι ένα συγκεκριμένο pixel μιας περιοχής δεν απεικονίζεται σε ένα συγκεκριμένο pixel του αντίστοιχου τομέα. Για παράδειγμα, το pixel (100,150) μπορεί να απεικονισθεί στο σημείο (34,33,12.46), το οποίο δεν αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο pixel. Είναι βέβαιο ότι πολλά pixels θα απεικονισθούν με αυτό τον τρόπο. Έτσι για να ανακατασκευάσουμε τις τιμές των αρχικών pixels πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όλα τα σημεία (τα οποία προκύπτουν μέσω του AAE) που είναι γειτονικά σε αυτά. Στο προηγούμενο παράδειγμα, το σημείο (34,33,12.46) θα χρησιμοποιηθεί (μαζί με αρκετά άλλα) για την ανακατασκευή των τιμών των pixels (34,12), (35,12), (34,13), (35,13). Αυτό, βέβαια, θα αυξήσει το πλήθος των υπολογισμών, ενώ είναι πιθανό (αν ο αριθμός των επαναλήψεων δεν είναι αρκετά μεγάλος) να μην δημιουργηθούν σημεία κοντά σε κάποιο συγκεκριμένο pixel οπότε να χρειαστεί να αυξηθούν οι επαναλήψεις του AAE.

Για να αντιμετωπίσουμε όλα τα παραπάνω προβλήματα θα παρουσιάσουμε μια παραλλαγή του AAE κατάλληλου για την μέθοδό μας (όπου $\delta = \alpha^r$, $\psi = \alpha^{r+1}$). Ο νέος αλγόριθμος χρειάζεται ακριβώς r επαναλήψεις για να ανακατασκευάσει την αρχική εικόνα χωρίς να υπολογίζει περιττά σημεία (με κλασματικές συντεταγμένες). Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί ως αρχικό σύνολο τα σημεία παρεμβολής που έχουν ήδη αποθηκευτεί (αντί για μια τυχαία εικόνα), οπότε η κατασκευή ενός “καλού” ελκυστή χρειάζεται λιγότερες επαναλήψεις. Έτσι ο συνολικός χρόνος ανακατασκευής είναι σημαντικά μικρότερος. Παρακάτω περιγράφεται ο αλγόριθμος αυτός αναλυτικά. Στο σχήμα 9.10 δίνεται ένα παράδειγμα λειτουργίας αυτού του αλγορίθμου.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 9.3 (Ανακατασκευή Εικόνας)

1. Δημιουργούμε τις ουρές $AD[i]$, $CON[i]$, $IP[i]$, για $i = 0, 1, \dots, d_{\max}-1$, οι οποίες περιέχουν τις διευθύνσεις, τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας και τα σημεία παρεμβολής των τομέων πλευράς δ/α^{i-1} . Όλες οι τιμές αυτές είχαν αποθηκευτεί (κατά τη διάρκεια του αλγορίθμου συμπίεσης) στις ουρές $ADqueue$, $Squeue$ και $IPqueue$ αντίστοιχα.
2. Τοποθετούμε τα σημεία παρεμβολής της ουράς IP μέσα στην εικόνα.
3. Υπολογίζουμε τα βήματα που θα χρειαστούν για την πλήρη ανακατασκευή της εικόνας από τον τύπο

$$r = \text{steps} = \text{round} \left(\frac{\log \delta}{\log \alpha} \right),$$

$$\text{όπου } \text{round}(x) = \begin{cases} [x], & \text{αν } |[x] - x| < 0.5 \\ [x] + 1, & \text{αν } |[x] - x| \geq 0.5 \end{cases}.$$

4. Για $t = 1$ έως r κάνουμε τα εξής:

(α') Για $i = 1$ έως $\min\{t, d_{\max}\}$ κάνουμε τα εξής:



- i. **Για** κάθε τομέα με μήκος πλευράς δ/α^{i-1} που έχει διεύθυνση μέσα στην $AD[i]$ κάνουμε τα εξής:
- A'. Βρίσκουμε τη διεύθυνση (j) της περιοχής που απεικονίζεται σε αυτό τον τομέα από την ουρά $AD[i]$.
- B'. **Αν** $j \neq 0$ **τότε**
- Γ'. Βρίσκουμε τον αντίστοιχο συντελεστή κατακόρυφης αναλογίας (από την ουρά $CON[i]$) και υπολογίζουμε τους υπόλοιπους συντελεστές της απεικόνισης w που απεικονίζει την περιοχή με διεύθυνση j στον τομέα.
- Δ'. Σε αυτό το σημείο θυμίζουμε ότι η περιοχή, αφού αρχικά ήταν άδεια (ως μέρος της εικόνας), γεμίζει όλο και περισσότερο σε κάθε βήμα. Σε αυτό το βήμα έχουμε τοποθετήσει pixels που απέχουν μεταξύ τους δ/α^{t-1} (όπου η απόσταση λαμβάνεται είτε κατακόρυφα ή οριζόντια). απεικονίζουμε αυτά τα σημεία ως εξής. Για την πρώτη γραμμή της περιοχής κάνουμε τα εξής. Αφήνουμε το πρώτο σημείο (αφού είναι σημείο παρεμβολής έχει απεικονισθεί ήδη στον τομέα) προχωράμε με οριζόντιο βήμα $\delta\alpha^{i-1}/\alpha^{t-1}$ και απεικονίζουμε το επόμενο pixel. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να απεικονίσουμε $\alpha - 1$ pixels. Αφήνουμε το επόμενο (επειδή έχει ήδη απεικονισθεί στον τομέα) και συνεχίζουμε με παρόμοιο τρόπο μέχρι να φτάσουμε στο τέλος της γραμμής (δεν απεικονίζουμε το τελευταίο σημείο αφού έχει ήδη απεικονισθεί).
- Στη συνέχεια, μετακινούμαστε κατά $\delta\alpha^{i-1}/\alpha^{t-1}$ γραμμές. Απεικονίζουμε το πρώτο pixel της γραμμής αυτής, μετακινούμαστε κατά $\delta\alpha^{i-1}/\alpha^{t-1}$ pixels (οριζόντια), απεικονίζουμε αυτό το pixel κ.ο.κ. Σταματάμε τη διαδικασία όταν φτάσουμε στο τελευταίο σημείο αυτής της γραμμής (αφού το απεικονίσουμε) και μετακινούμαστε πάλι κατά $\delta\alpha^{i-1}/\alpha^{t-1}$ γραμμές. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να φτάσουμε στη τελευταία γραμμή της περιοχής. Στην τελευταία γραμμή ακολουθούμε τη διαδικασία που εφαρμόσαμε και στην πρώτη.

Ο παραπάνω αλγόριθμος περιγράφει τη διαδικασία ανακατασκευής αρκετά αναλυτικά, χωρίς όμως να αναφέρεται σε ορισμένες λεπτομέρειες που θα έκαναν την περιγραφή εξαιρετικά δυσνόητη. Για παράδειγμα, δεν εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο τοποθετούνται τα σημεία παρεμβολής, ιδιαίτερα στην περίπτωση που αυτά προέκυψαν από τη κατάτμηση ενός τομέα. Στο παράρτημα Β (όπου υλοποιήθηκε ο αλγόριθμος σε C++) μπορεί να δει κανείς όλες τις λεπτομέρειες.



0				0				0
0				0				0
0				0				0

(α)

0		1		0		1		0
1		1		1		1		1
0		1		0		1		0
1		1		1		1		1
0		1		0		1		0

(β)

0	2	1	2	0	2	1	2	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	2	1	2	0	2	1	2	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	2	1	2	0	2	1	2	0

(γ)

Σχήμα 9.10: Ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου 9.3 σε μια εικόνα με διαστάσεις 9×9 . Έχουμε επιλέξει $\delta = 4 = 2^2$, $\psi = 8 = 2^3$, οπότε χρειάζονται 2 επαναλήψεις για την πλήρη ανακατασκευή της εικόνας. Ο αριθμός που φαίνεται μέσα σε κάθε pixel αναφέρεται στην επανάληψη στην οποία υπολογίσθηκε η τιμή του αντίστοιχου pixel. (α) Αρχικά τοποθετούμε τα σημεία παρεμβολής στην εικόνα (επανάληψη 0). (β) Στην επανάληψη 1 απεικονίζουμε τα σημεία παρεμβολής κάθε περιοχής στον αντίστοιχο τομέα. Έτσι κατασκευάζονται 5 νέα σημεία μέσα σε κάθε τομέα. (γ) Στην επανάληψη 2 απεικονίζουμε όλα τα υπάρχοντα σημεία κάθε περιοχής (δηλαδή τα σημεία παρεμβολής και τα σημεία που προέκυψαν από την επανάληψη 1) στον αντίστοιχο τομέα.



9.7 Πειραματικά Αποτελέσματα

Μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου συμπίεσης σε μια εικόνα προκύπτει ένα σύνολο από σημεία παρεμβολής (από τα οποία αποθηκεύουμε μόνο τις τιμές z , δηλαδή το “χρώμα” του pixel που είναι ακέραιες τιμές μεταξύ του 0 και του 255), τις διευθύνσεις (επίσης ακέραιοι) και τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας. Οι τελευταίοι είναι εν γένει πραγματικοί αριθμοί, οπότε για να αποθηκευθούν χρειάζεται πρώτα να κβαντιστούν. Στα παρακάτω αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκε ο ομοιόμορφος κβαντιστής με 6 bits ανά συντελεστή (η χρήση άλλων κβαντιστών δεν βελτιώνει τα αποτελέσματα). Μικρότερες τιμές bits ανά συντελεστή μπορούν να εφαρμοστούν αλλά αυτό μειώνει σημαντικά την ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας. Επιπλέον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια κλασσική μέθοδο συμπίεσης (χωρίς σφάλματα) στα σημεία παρεμβολής και στις διευθύνσεις για να αυξήσουμε το συνολικό ποσοστό συμπίεσης της εικόνας. Η πιο αποδοτική μέθοδος είναι αυτή της “entropy coding” συμπίεσης, η οποία και εφαρμόστηκε στην υλοποίηση. Για τον υπολογισμό της απόστασης, που αναφέρεται στους αλγορίθμους, μεταξύ του τομέα και της απεικονισμένης περιοχής, χρησιμοποιήσαμε την μετρική

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |A_{i,j} - B_{i,j}|$$

όπου $A = \{A_{i,j}, i, j = 1, 2, \dots, N\}$, $B = \{B_{i,j}, i, j = 1, 2, \dots, N\}$ σύνολα $N \times N$ στοιχείων. Τέλος για τον υπολογισμό των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας χρησιμοποιήσαμε τη γεωμετρική μέθοδο.

Όπως ήδη αναφέραμε παραπάνω, η μέθοδος που παρουσιάσαμε τεμαχίζει την εικόνα σε τετραγωνικές περιοχές και τομείς διαστάσεων $\psi \times \psi$ και $\delta \times \delta$ αντίστοιχα. Έτσι, γίνεται προφανές για να μοντελοποιήσουμε μια εικόνα με την παραπάνω μέθοδο πρέπει οι διαστάσεις της να είναι αριθμοί πολλαπλάσιοι του ψ . Τι μπορούμε να κάνουμε με όλες τις υπόλοιπες εικόνες; Η απάντηση είναι απλή. Αρκεί να προσθέσουμε μερικά “dummy” pixels (π.χ. όμοια με τα διπλανά τους) στην εικόνα ώστε οι διαστάσεις της να ικανοποιούν τα παραπάνω κριτήρια. Βέβαια, στην ανακατασκευή της εικόνας θα πρέπει αυτά τα pixels να αφαιρούνται.

Η μέθοδος υλοποιήθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού C++ και δημιουργήθηκε ένα εκτελέσιμο (μέσω Windows) πρόγραμμα που μπορεί να συμπίεσει οποιαδήποτε εικόνα. Στο σχήμα 9.11 συγκρίνεται η μέθοδος με άλλες γνωστές μεθόδους συμπίεσης εικόνας. Με το όνομα PSA2D αναφερόμαστε στο affine μοντέλο fractal συμπίεσης που περιγράφεται στο [BDT], με το όνομα Bivariate αναφερόμαστε στο μοντέλο που περιγράψαμε και με το όνομα Barnsley αναφερόμαστε στη μέθοδο που αναπτύχθηκε από την εταιρία Iterated Systems Inc και περιγράφεται στο [Lu97]. Για την μέτρηση του χρόνου χρησιμοποιήθηκε ένα υπολογιστής εφοδιασμένος με επεξεργαστή Pentium 4 @2.66GHz με λειτουργικό σύστημα Windows XP.

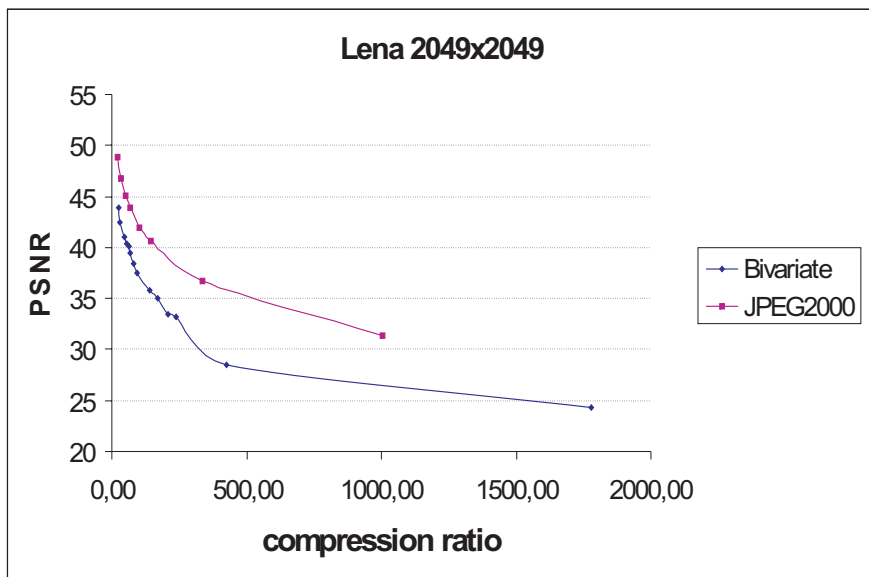
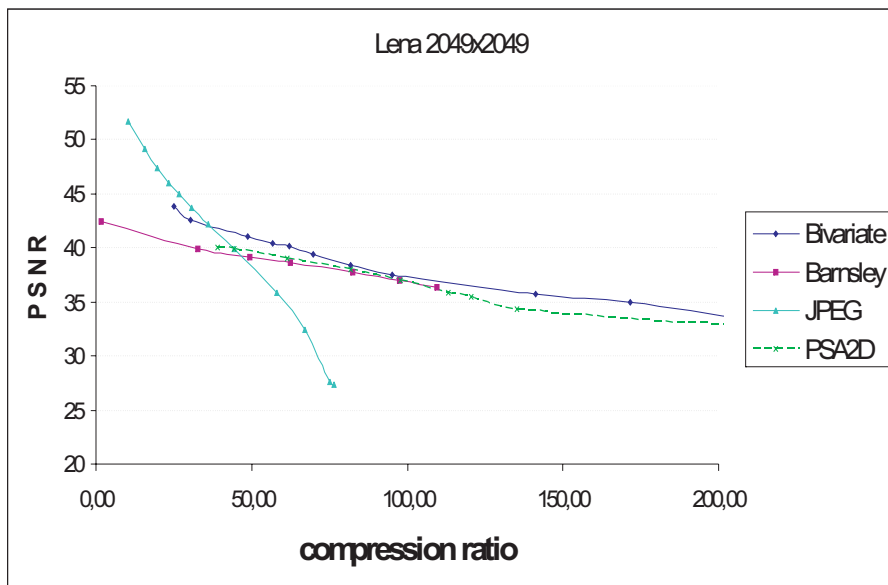
9.8 Συμπεράσματα

Η μέθοδος της fractal παρεμβολής που περιγράψαμε παραπάνω πετυχαίνει ποσοστά συμπίεσης συγκρίσιμα με αυτά της fractal μεθόδου της Iterated Systems Inc και της γνωστής και ευρέως διαδεδομένης JPEG. Σε γενικές γραμμές δίνει καλύτερα αποτελέσματα και από τις δύο μεθόδους. Υστερεί ως προς τη μέθοδο JPEG μόνο στην περίπτωση πολύ χαμηλών ποσοστών συμπίεσης, όπου η JPEG πετυχαίνει πολύ μεγάλη ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας. Παρ’ όλα αυτά η μέθοδος της fractal παρεμβολής δεν δίνει αποτελέσματα τόσο καλά όσο οι μέθοδοι που βασίζονται σε wavelets, όπως τα πρότυπα JPEG2000 και SPIHT. Είναι, όμως, ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η μέθοδος συμπίεσης με fractal παρεμβολή που παρουσιάσαμε ξεπερνάει σε απόδοση (όπως φαίνεται στο σχήμα 9.11) όλες τις άλλες fractal μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί μέχρι τώρα.

Οι βασικοί λόγοι είναι οι εξής: οι fractal μέθοδοι που έχουν παρουσιασθεί μέχρι τώρα χρησιμοποιούν affine απεικονίσεις και υπολογίζουν τις παραμέτρους των απεικονίσεων αυτών με διάφορες



τεχνικές, έτσι ώστε η περιοχή να απεικονίζεται στον αντίστοιχο τομέα, όσο το δυνατόν καλύτερα. Αναφέραμε, επίσης, ότι η αναζήτηση όλων των περιοχών ώστε να βρεθεί αυτή που απεικονίζεται όσο το δυνατόν καλύτερα σε έναν συγκεκριμένο τομέα είναι μια εξαιρετικά χρονοβόρα διαδικασία (στην εισαγωγή αναφέρθηκαν και μέθοδοι για την λύση αυτού του προβλήματος). Η fractal μέθοδος παρεμβολής που παρουσιάσαμε χρησιμοποιεί bivariate απεικονίσεις. Λαμβάνει σημεία παρεμβολής από την εικόνα και προσπαθεί να φτιάξει μια fractal επιφάνεια που να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα στην εικόνα. Οι συντελεστές των bivariate απεικονίσεων υπολογίζονται κατευθείαν από τις εξισώσεις που διέπουν τη fractal παρεμβολή. Επιπλέον ο έλεγχος των συνθηκών συνέχειας (εξισώσεις 9.5-9.6) επηρεάζει πολύ θετικά την ταχύτητα του αλγορίθμου συμπίεσης. Οι περισσότερες “καχές” περιοχές απορρίπτονται εξαιτίας της, χωρίς να χρειαστεί να εφαρμόσουμε την απεικόνιση και να βρούμε την απόστασή της εικόνας της περιοχής από τον τομέα (κάτι που απαιτεί αρκετό υπολογιστικό χρόνο και συμβαίνει στις υπόλοιπες μεθόδους). Έτσι ο χρόνος συμπίεσης είναι συγκρίσιμος (περίπου ίδιος) με αυτόν που επιτυγχάνουν οι κλασσικές μέθοδοι fractal συμπίεσης (μετά την εφαρμογή των ειδικών τεχνικών clustering κ.λ.π.). Αν εφαρμοστούν ανάλογες τεχνικές βελτίωσης της ταχύτητας είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα βελτιωθεί ακόμη περισσότερο ο χρόνος συμπίεσης.



Σχήμα 9.11: Σύγκριση της μεθόδου μας με άλλες γνωστές fractal και μη fractal μεθόδους. Οι μετρήσεις έγιναν με εικόνα αναφοράς την γνωστή Lena σε ανάλυση 2049×2049 . Ο άξονας y αναφέρεται στην ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας (χρησιμοποιώντας ως μέτρο το γνωστό PSNR) ενώ ο άξονας x δείχνει το κατά πόσες φορές συμπίεστηκε η εικόνα (δείκτης συμπίεσης).



Σχήμα 9.12: Η αρχική εικόνα Lena σε ανάλυση 2049×2049 .



Σχήμα 9.13: Η εικόνα Lena συμπιέστηκε με τη μέθοδο μας χρησιμοποιώντας $\delta = 64$, $\psi = 128$, $\epsilon = 4$, $d_{max} = 4$. Η ανακατασκευασμένη εικόνα είχε ποιότητα PSNR=37.46dB, ενώ ο δείκτης συμπίεσης ήταν 95.08.



Σχήμα 9.14: Η εικόνα Lena συμπίεστηκε με τη μέθοδο μας χρησιμοποιώντας $\delta = 64$, $\psi = 128$, $\epsilon = 2.4$, $d_{max} = 4$. Η ανακατασκευασμένη εικόνα είχε ποιότητα PSNR=40.37dB, ενώ ο δείκτης συμπίεσης ήταν 56.60.



Σχήμα 9.15: Η εικόνα Lena συμπίεστηκε με τη μέθοδο μας χρησιμοποιώντας $\delta = 64$, $\psi = 128$, $\epsilon = 2.4$, $d_{max} = 3$. Η ανακατασκευασμένη εικόνα είχε ποιότητα PSNR=35.74dB, ενώ ο δείκτης συμπίεσης ήταν 141.



Παράμετροι	Χρόνος Συμπίεσης	PSNR (dB)	Συντ. Συμπίεσης
$\delta = 32, \psi = 64, d = 3, \epsilon = 0.7$	$\approx 2 \text{ min}$	43.22	25:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 4, \epsilon = 0.6$	$\approx 2 \text{ min}$	42.52	30.23:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 4, \epsilon = 1.6$	$\approx 1 \text{ min}$	41.03	48.85:1
$\delta = 32, \psi = 64, d = 3, \epsilon = 2.4$	$\approx 1 \text{ min}$	40.37	56.6:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 4, \epsilon = 2.2$	$\approx 25 \text{ secs}$	40.01	62:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 4, \epsilon = 2.6$	$\approx 25 \text{ secs}$	39.44	69.72:1
$\delta = 32, \psi = 64, d = 3, \epsilon = 3.2$	$\approx 20 \text{ secs}$	38.38	81.91:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 4, \epsilon = 4$	$\approx 20 \text{ secs}$	37.46	95.08:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 3, \epsilon = 2.6$	$\approx 18 \text{ secs}$	35.74	141.1:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 3, \epsilon = 2.6$	$\approx 15 \text{ secs}$	35.01	171.76:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 2, \epsilon = 1.7$	$\approx 18 \text{ secs}$	33.39	210.31:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 2, \epsilon = 3.4$	$\approx 18 \text{ secs}$	33.18	238.61:1
$\delta = 32, \psi = 64, d = 1, \epsilon = 4$	$\approx 25 \text{ secs}$	28.53	426:1
$\delta = 64, \psi = 128, d = 1, \epsilon = 4$	$\approx 25 \text{ secs}$	24.37	1776:1

Πίνακας 9.2: Σύγκριση της εφαρμογής του μοντέλου μας στην εικόνα Lena (2049×2049) χρησιμοποιώντας διάφορες παραμέτρους.

Παράρτημα Α'

Προγράμματα σε Matlab

Α'.1 Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων

Το πρόγραμμα είναι υλοποιημένο σε μορφή υποπρογράμματος - συνάρτησης και χρησιμοποιεί affine απεικονίσεις στον χώρο $\mathbb{R}^2$. Η συνάρτηση δέχεται ως εισόδους το αρχικό σύνολο A_0 (ένας πίνακας με τις συντεταγμένες των M αρχικών σημείων), έναν αριθμό N που εκφράζει το πλήθος των απεικονίσεων w_i , έναν αριθμό K που εκφράζει το πλήθος των επιθυμητών επαναλήψεων και έναν πίνακα W που περιέχει τους συντελεστές των affine απεικονίσεων. Ως έξοδος επιστρέφεται ένα σύνολο σημείων που προσεγγίζει τον ελκυστή.

```
%A0 is the initial set representing a Mx2 matrix
%N is the number of the mappings
%K is the number of iterations
%W is the matrix Nx6 containing the parameters of the mappings
%Each row (i) contains the 6 coefficients of the map w_i. a,b,c,s,d,e
% /      \    /      \
% |a      b|  | d |
%w=|      | + |      |
% |c      s|  | e |
% \      /    \      /
%The function returns the matrix FP N^K x 2!!!

function B=MYDIA_R2(A0,W,N,K)
A=A0;
[M,l]=size(A0);
points=M;
for (i=1:K)
    for j=1:points %for every point
        x=A(j,1);
        y=A(j,2);
        for r=1:N %map the point through each map
            B(points*(r-1)+j,1)=W(r,1)*x+W(r,2)*y+W(r,5);
            B(points*(r-1)+j,2)=W(r,3)*x+W(r,4)*y+W(r,6);
        end;
    end;
end;
```



```

end;
points=M*N^i;
A=B;
end;
end;

```

Α'.2 Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων

Το πρόγραμμα αυτό δέχεται τις ίδιες εισόδους με το προηγούμενο πρόγραμμα, με την προσθήκη ενός πίνακα πιθανοτήτων. Δεν δίνει έξοδο, όπως το προηγούμενο πρόγραμμα, αλλά σχεδιάζει τον ελκυστή στην οθόνη.

```

%A0 is the initial point represented by a 1x2 matrix
%P is the matrix Nx1 containing the probabilities
%N is the number of the mappings
%K is the number of iterations
%W is the matrix Nx6 containing the parameters of the mappings
%Each row (i) contains the 6 coefficients of the map w_i. a,b,c,s,d,e
% /      \    /    \
% |a      b|  | d |
%w=|      | + |   |
% |c      s|  | e |
% \      /    \    /
%The function plots the attractor!!!

```

```

function MYRIA_R2(A0,W,P,N,K)
figure(1);
hold on;
SP(1)=P(1);
hist(1)=0;
for i=2:N
    SP(i)=SP(i-1)+P(i);
    hist(i)=0;
end;
X=A0(1,1);
Y=A0(1,2);
plot(X, Y , 'b.' , 'MarkerSize' , 2);
for (i=1:K)
    what=rand(1);
    for j=1:N
        if what<SP(j)
            r=j;
            hist(r)=hist(r)+1;
            break;
        end;
    end;
    nX=W(r,1)*X+W(r,2)*Y+W(r,5);
    nY=W(r,3)*X+W(r,4)*Y+W(r,6);

```



```
X=nX;
Y=nY;
plot(X, Y , 'b.' , 'MarkerSize' , 2);
end;
end;
```

Α'.3 Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων για ΠΣΕΣ

```
%A0 is the initial point represented by a 1x2 matrix
%P is the matrix NxN containing the probabilities
%N is the number of the mappings
%K is the number of iterations
%W is the matrix Nx6 containing the parameters of the mappings
%first_map is the number of the first map w_i, that it is applied to A0
%Each row (i) contains the 6 coefficients of the map w_i. a,b,c,s,d,e
% /      \   /   \
% |a      b|   | d |
%w=|      | + |   |
% |c      s|   | e |
% \      /   \   /
%The function plots the attractor!!!
```

```
function B=MYRRRIA_R2(A0,W,P,N,K,first_map)
figure(1);
hold on;
```

```
for i=1:N
    SP(i,1)=P(i,1);
    for j=2:N
        SP(i,j)=SP(i,j-1)+P(i,j);
    end;
end;
```

```
X=A0(1,1);
Y=A0(1,2);
plot(X, Y , 'b.' , 'MarkerSize' , 2);
r=first_map;
for (i=1:K)
    nX=W(r,1)*X+W(r,2)*Y+W(r,5);
    nY=W(r,3)*X+W(r,4)*Y+W(r,6);
    X=nX;
    Y=nY
    plot(X, Y , 'b.' , 'MarkerSize' , 2);
    what=rand(1);
    for j=1:N
        if what<SP(r,j)
            r=j;
```



```

        break;
    end;
end;
end;
hold off;
end;

```

Α'.4 Υπολογισμός Box Διάστασης Μονοδιάστατου Σήματος

```

%A: an array containing the data. We assume that the points are equally
%spaced in the x axes.
%The distance between the values in x axes is 1
%N: The number of points contained in A
%e1,e2: 1<e1<e2 (integers) the range of the radius used to calculate
%the box dimension
%of A.
function dimension=fdim(A,N,e1,e2)
e=e1;
cover=1;
while (e<=e2)
    start=1;
    Balls(cover)=0;
    Range(cover)=e;
    while start<N
        max=A(start);
        min=A(start);
        i=start;
        while (i<=start+e)&(i<=N)
            if A(i)>max
                max=A(i);
            else if A(i)<min
                min=A(i);
            end;
            i=i+1;
        end;
        start=start+e;
        Balls(cover)=Balls(cover)+floor((max-min)/e)+1;
    end;
    Balls(cover)=log(Balls(cover));
    Range(cover)=log(1/Range(cover));
    cover=cover+1;
    e=e+1;
end;
%plot(Range,Balls);
dimension=( (e2-e+1)*sum(mul(Range,Balls))- sum(Range)*sum(Balls) )/

```



```
( (e2-e1+1)*sqsum(Range)-sum(Range)^2);  
end;
```

```
function S=sqsum(A)  
B=A.^2;  
S=sum(B);
```

Α'.5 Υπολογισμός Βοχ Διάστασης Δισδιάστατου Σήματος - Εικόνας

%A: an array containing the image data. We assume that the points are equally
%spaced in the x and y axes (on a grid).
%e1,e2: 1<e1<e2 (integers) the range of the radius used to calculate
%the box dimension
%of image A.
function dimension=imagedim(A,e1,e2)

```
[N,M]=size(A);  
  
e=e1;  
cover=1;  
while (e<=e2)  
    Balls(cover)=0;  
    Range(cover)=e;  
    ystart=1;  
    while ystart<N  
        xstart=1;  
        while xstart<M  
            max=A(ystart,xstart);  
            min=A(ystart,xstart);  
            i=ystart;  
            while (i<=ystart+e)&(i<=N)  
                j=xstart;  
                while(j<=xstart+e)&(j<=M)  
                    if A(i,j)>max  
                        max=A(i,j);  
                    else if A(i,j)<min  
                        min=A(i,j);  
                    end;  
                    j=j+1;  
                end;  
                i=i+1;  
            end;  
            Balls(cover)=Balls(cover)+floor((max-min)/e)+1;  
            xstart=xstart+e;  
        end;  
        ystart=ystart+e;  
    end;  
    cover=cover+1;  
    e=e+1;  
end;
```



```

        xstart=xstart+e;
    end;
    ystart=ystart+e;
end;
Balls(cover)=log(Balls(cover));
Range(cover)=log(1/Range(cover));
cover=cover+1;
e=e+1;
end;

plot(Range,Balls);
dimension=( (e2-e1+1)*sum(mul(Range,Balls))- sum(Range)*sum(Balls) )
           / ( (e2-e1+1)*sqsum(Range)-sum(Range)^2);
end;

```

Α'.6 Κατασκευή αυτοσυσχετισμένης FΣΠ

Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στον αλγόριθμο αιτιοκρατικών επαναλήψεων που δώσαμε στο κεφάλαιο 2 και δέχεται ως εισόδους τα σημεία παρεμβολής, τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας, τον αριθμό των σημείων παρεμβολής και των αριθμό των επαναληπτικών βημάτων. Τα σημεία παρεμβολής δίνονται μέσω ενός πίνακα $(N + 1) \times 2$ με το όνομα IP και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας μέσω ενός μονοδιάστατου πίνακα N στοιχείων με το όνομα S.

```

%IP is a N+1x2 matrix representing the interpolation points
%N is the number of mappings and N+1 the number of points
%S is a Nx1 matrix representing the contraction factors
%steps: is the number of iterations
%The algorithm computes and returns N^(steps+1)+1 points
%representing the attractor of the FIF.

```

```

function P=myFIF(IP,S,N,steps)
%Here are the map parameters.
for i=1:N
    a(i)=(IP(i+1,1)-IP(i,1))/(IP(N+1,1)-IP(1,1));
    e(i)=(IP(N+1,1)*IP(i,1)-IP(1,1)*IP(i+1,1))/(IP(N+1,1)-IP(1,1));
    c(i)=(IP(i+1,2)-IP(i,2))/(IP(N+1,1)-IP(1,1))-S(i)*(IP(N+1,2)-IP(1,2))
        /(IP(N+1,1)-IP(1,1));
    f(i)=(IP(N+1,1)*IP(i,2)-IP(1,1)*IP(i+1,2))/(IP(N+1,1)-IP(1,1))
        -S(i)*(IP(N+1,1)*IP(1,2)-IP(1,1)*IP(N+1,2))/(IP(N+1,1)-IP(1,1));
end;

A_0=IP;
points=N+1;
for i=1:steps
    %for each section
    l=1;
    for j=1:N
        %map all the points to the section j
    end
end

```



```

    for k=1:points-1
        P(1,1)=a(j)*A_0(k,1)+e(j);
        P(1,2)=c(j)*A_0(k,1)+S(j)*A_0(k,2)+f(j);
        l=l+1;
    end;
end;
P(1,1)=A_0(points,1);
P(1,2)=A_0(points,2)
points=l;
A_0=P;
end;

```

Α'.7 Κατασκευή κατά τμήματα συσχετισμένης FΣΠ

Το πρόγραμμα αυτό είναι μια παραλλαγή του αλγορίθμου αιτιοκρατικών επαναλήψεων. Δέχεται τις ίδιες παραμέτρους με τον αλγόριθμο κατασκευής αυτοσυσχετισμένων FΣΠ με την εξαίρεση του πίνακα AD, ο οποίος περιγράφει τις περιοχές που απεικονίζονται σε κάθε τομέα. Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι στον τομέα $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ απεικονίζεται η περιοχή $[AD[i,1], AD[i,2]]$. Το πρόγραμμα επιστρέφει ένα σύνολο σημείων που προσεγγίζουν το γράφημα της κατά τμήματα αυτοόμοιας FΣΠ.

```

%IP is a N+1x2 matrix representing the interpolation points
%N is the number of mappings and N+1 is the number of points
%S is a Nx1 matrix representing the contraction factors
%AD: is a Nx4 matrix representing the interval that is mapped to each section.
%i.e. if [...;x_0,x_1,y_0,y_1;...] then the [x_0,x_1] is the interval.
%steps: is the number of iterations
%The algorithm computes and returns N^(steps+1)+1 points
%representing the attractor of the FIF.

```

```

function P=myRFIF(IP,AD,S,N,steps)
%Here are the map parameters.
for i=1:N
    a(i)=(IP(i+1,1)-IP(i,1))/(AD(i,2)-AD(i,1));
    e(i)=(AD(i,2)*IP(i,1)-AD(i,1)*IP(i+1,1))/(AD(i,2)-AD(i,1));
    c(i)=(IP(i+1,2)-IP(i,2))/(AD(i,2)-AD(i,1))-S(i)*(AD(i,4)-AD(i,3))/(AD(i,2)-AD(i,1));
    f(i)=(AD(i,2)*IP(i,2)-AD(i,1)*IP(i+1,2))/(AD(i,2)-AD(i,1))-S(i)*(AD(i,2)*AD(i,3)-
        AD(i,1)*AD(i,4))/(AD(i,2)-AD(i,1));
end;

A_0=IP;
points=N+1;
E=10^-14;
for i=1:steps
    %for each section
    l=1;
    for j=1:N
        %find the start of the respective interval
        for start=1:points

```



```

        if abs(A_0(start,1)-AD(j,1))<E
            break;
        end;
    end;
    %find the end of the respective interval
    for end_=start+1:points
        if abs(A_0(end_,1)-AD(j,2))<E
            break;
        end;
    end;
    %map all the points to the section j
    for k=start:end_-1
        P(1,1)=a(j)*A_0(k,1)+e(j);
        P(1,2)=c(j)*A_0(k,1)+S(j)*A_0(k,2)+f(j);
        l=l+1;
    end;
end;
P(1,1)=A_0(points,1);
P(1,2)=A_0(points,2);
points=l;
A_0=P;
end;

```

Α'.8 Κατά Τμήματα Συσχετισμένο Μοντέλο Fractal Παρεμβολής

Το πρόγραμμα coPWSAFMGF παίρνει ως εισόδους ένα μονοδιάστατο σήμα (σιγναλ), και τις παραμέτρους δ και ψ και επιστρέφει τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας και τις διευθύνσεις που χρειάζεται να αποθηκευτούν για να συμπίεσουμε το σήμα.

```

%Compress signal
%Piece-wise Self Affine Fractal Model
%and Geometric Fit for the determination of contraction factors
%signal: array (N+1)x2. The discrete data we try to compress.
%delta: The distance between two interpolation points.
%psi: The distance between two interval points.
%d: the contraction factors (array M).
%CA: array M. The map between interpolation intervals and intervals.
%M: The number of interpolation intervals. M+1 int points.
%M1: The number of intervals.
function [C,d,IP,VP]=coPWSAFMGF(signal,delta,psi)
N=length(signal(:,1));
N=N-1;
M=N/delta;
M1=N/psi;
%IP: the interpolation points.
IP(1,1)=signal(1,1);

```



```
left=1;
IP(1,2)=signal(1,2);
for i=2:M+1
    left=left+delta;
    IP(i,1)=signal(left,1);
    IP(i,2)=signal(left,2);
end;
%VP: the interval points.
VP(1,1)=signal(1,1);
left=1;
VP(1,2)=signal(1,2);
for i=2:M1+1
    left=left+psi;
    VP(i,1)=signal(left,1);
    VP(i,2)=signal(left,2);
end;

for i=1:M
    first_time=0;
    %disp('*****checking section:*****');
    %disp(i);
    for j=1:M1
        %compute the contraction factor associated with the
        %ith section and the jth interval
        con_factor=GeoCF2(signal(VP(j,1)+1:VP(j+1,1)+1,:),IP(i:i+1,:),
            signal(IP(i,1)+1:IP(i+1,1)+1,:));
        %disp('with interval:');
        %disp(j);
        %disp(con_factor);
        %if con_factor<1
            diasthmax=VP(j+1,1)-VP(j,1);
            diasthmay=VP(j+1,2)-VP(j,2);
            a=(IP(i+1,1)-IP(i,1))/diasthmax;
            e=(VP(j+1,1)*IP(i,1)-VP(j,1)*IP(i+1,1))/diasthmax;
            c=(IP(i+1,2)-IP(i,2))/diasthmax-con_factor*diasthmay/diasthmax;
            f=(VP(j+1,1)*IP(i,2)-VP(j,1)*IP(i+1,2))/diasthmax-
                con_factor*(VP(j+1,1)*VP(j,2)-VP(j,1)*VP(j+1,2))/diasthmax;
            wsignal=w_map(signal(VP(j,1)+1:VP(j+1,1)+1,:),a,c,con_factor,e,f);
            %calculate distance between signal
            %in interval and wsignal...

            distance=eucl_dist(signal,wsignal,VP(j,1)+1,VP(j+1,1)+1);
            %disp('distance is:');
            %disp(distance);
            if first_time==0
                first_time=1;
                minimum_d=distance;
                minimum_thesh_for_i=j;
                store_con_factor=con_factor;
```



```

        elseif distance<minimum_d
            minimum_d=distance;
            minimum_thesh_for_i=j;
            store_con_factor=con_factor;
        end;
    %end;
end;
%disp(minimum_d);
if (first_time==0)
    disp('cannot compress. All Contraction factors is bigger than 1.');
```

break;

```

elseif (minimum_d>10000000)
    disp('cannot compress. Could not find a suitable match for section:');
    disp(i);
    disp(minimum_d);
    break;
else
    C(i)=minimum_thesh_for_i;
    d(i)=store_con_factor;
end;
end;
```

```
function new_points=w_map(points,a,c,d,e,f)
```

```

N=length(points(:,1));
for i=1:N %For every one of the N points
    x=a*points(i,1)+e;
    y=c*points(i,1)+d*points(i,2)+f;
    new_points(i,:)=[x,y];
end
```

```

%Calculation of the contraction factor for the IFS model
%of a discrete sequence using the geometric aproach.
%S: signal values
%IP: 2 interpolation points
%j1-j2 the discrete data between the 2 interpolation Points,
function d=GeoCF1(S,IP,section)
[N,k]=size(S);
N=N-1;
%N+1: # of the discrete sequence
klisi=(S(N+1,2)-S(1,2))/(S(N+1,1)-S(1,1));
midistance=zeros(N-1,1);
for j=2:N
    midistance(j)=S(j,2)-klisi*(S(j,1)-S(1,1))-S(1,2);
end
m1=max(midistance);
m2=min(midistance);
```



```
if (abs(m2)>abs(m1))
    mi=abs(m2);
else mi=abs(m1);
end

nidistance=zeros(length(section),1);
iklisi=(IP(2,2)-IP(1,2))/(IP(2,1)-IP(1,1));
for j=1:length(section)
    nidistance(j)=section(j,2)-iklisi*(section(j,1)-IP(1,1))-IP(1,2);
end;
ni1=max(nidistance);
ni2=min(nidistance);
if (abs(ni2)>abs(ni1))
    ni=abs(ni2);
else ni=abs(ni1);
end
if mi~=0
    d=ni/mi;
else
    d=100;
end;
```

```
function D=eycl_dist(signal,mapped_signal,i,j)
N=length(mapped_signal(:,1));
D=0;
l=i;
m=i+1;
klisi=(signal(m,2)-signal(l,2))/(signal(m,1)-signal(l,1));
for k=1:N
    if (mapped_signal(k,1)>signal(m,1))
        l=m;
        m=l+1;
        klisi=(signal(m,2)-signal(l,2))/(signal(m,1)-signal(l,1));
    end
    evaluated_y=klisi*(mapped_signal(k,1)-signal(l,1))+signal(l,2);
    D=D+abs(mapped_signal(k,2)-evaluated_y)^2;
end
D=D/N;
```



Α'.9 Bivariate Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής σε Ορθογώνιο Πλέγμα

Το πρόγραμμα RIFS.m παίρνει τις παραμέτρους ενός ΠΣΕΣ όπως αυτό ορίστηκε στο κεφάλαιο 6 και υπολογίζει τον ελκυστή του. Παραδείγματα χρήσης υπάρχουν στο αρχείο examples of fractal surfaces.m.

```
% This program takes a Bivariate RIFS on [0,1]x[0,p]xR and some points and produces the new
% after (steps) steps using DIA.
%a,b,c,d,e,f,g,s,k: the coefficients of w-map
%a: matrix 1xN0
%b: matrix 1xN0
%c: matrix 1xM0
%d: matrix 1xM0
%g,e,f,k: matrix N0xM0
%P: matrix (N0+1)x(M0+1) contains the interpolation points
%nP: matrix (N0+1)steps x (M0+1)steps contains the new points after applying the w-maps
%(steps) times
%C: matrix 1xNOM0 shows which interval is mapped onto which section. (C~v)
%N0: how many sections per line
%M0: how many sections per column
%K0: how many intervals per line
%L0 how many intervals per column

function nP=RIFS(a,b,c,d,e,f,g,s,k,C,P,N0,M0,K0,L0,steps,alpha,delta,R,U)

oP=P;
interval_distance=delta;
section_distance=interval_distance/alpha;
for r=1:steps
    [N,M]=size(oP);
    N=N-1;
    M=M-1;
    %for every section
    deiktisx=1;
    for i=1:N0
        deiktisy=1;
        for j=1:M0
            section=(i-1)*M0+j;
            interval=C(section);
            intervalcol=floor((interval-1)/ L0)+1;
            intervalline=mod(interval-1, L0) +1;
            intervalx=0+(intervalcol-1)*R/L0;
            intervaly=0+(intervalline-1)*U/L0;
            for m=1:alpha^r+1
                for n=1:alpha^r+1
                    nP(deiktisx+m-1,deiktisy+n-1)=
```



```

        e(i,j)*(intervalx+(m-1)*interval_distance)
        +f(i,j)*(intervaly+(n-1)*interval_distance)
        +g(i,j)*(intervalx+(m-1)*interval_distance)
          *(intervaly+(n-1)*interval_distance)
        +s(i,j)*oP((intervalcol-1)*alpha^r+m,
          (intervalline-1)*alpha^r+n)+k(i,j);
    end;
end;
deiktisy=deiktisy+alpha^r;
end;
deiktisx=deiktisx+alpha^r;
end;
interval_distance=interval_distance/alpha;
oP=nP;
end;

```

A'.10 Διανυσματικές Bivariate Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής σε Ορθογώνιο Πλέγμα

Το πρόγραμμα VIFS.m παίρνει τις παραμέτρους ενός ΠΣΕΣ όπως αυτό ορίστηκε στο κεφάλαιο 7 και υπολογίζει τον ελκυστή του. Παραδείγματα χρήσης υπάρχουν στο αρχείο examples of vector-valued fractal surfaces.m.

```

% This program takes an RIFS on [0,1]x[0,p]xRxR and some points and produces the new points
% after (steps) steps using DIA.
%a,b,c,d,e,f,g,s,k: the coefficients of w-map
%a: matrix 1xNO
%b: matrix 1xNO
%c: matrix 1xMO
%d: matrix 1xMO
%gz,ez,fz,kz: matrix NOxMO
%gt,et,ft,kt: matrix NOxMO
%P: matrix (NO+1)x(MO+1) contains the interpolation points
%nP: matrix (NO+1)steps x (MO+1)steps contains the new points after applying the w-maps
%(steps) times
%C: matrix 1xNOM0 shows which interval is mapped onto which section.
%NO: how many sections per line
%MO: how many sections per column
%KO: how many intervals per line
%LO how many intervals per column

function nP=VIFS(a,b,c,d,ez,fz,gz,et,ft,gt,s1,s2,s3,s4,kz,kt,C,Pz,Pt,
    NO,MO,KO,LO,steps,alpha,delta,R,U)

oP(:, :, 1)=Pz;
oP(:, :, 2)=Pt;

```



```

interval_distance=delta;
section_distance=interval_distance/alpha;
for r=1:steps
    [N,M,temp]=size(oP);
    N=N-1;
    M=M-1;
    %for every section
    deiktisx=1;
    for i=1:NO
        deiktisy=1;
        for j=1:MO
            section=(i-1)*MO+j;
            interval=C(section);
            intervalcol=floor((interval-1)/ L0)+1;
            intervalline=mod(interval-1, L0) +1;
            intervalx=0+(intervalcol-1)*R/L0;
            intervaly=0+(intervalline-1)*U/L0;
            for m=1:alpha^r+1
                for n=1:alpha^r+1
                    nP(deiktisx+m-1,deiktisy+n-1,1)=
                        ez(i,j)*(intervalx+(m-1)*interval_distance)
                        +fz(i,j)*(intervaly+(n-1)*interval_distance)
                        +gz(i,j)*(intervalx+(m-1)*interval_distance)
                        *(intervaly+(n-1)*interval_distance)
                        +s1(i,j)*oP((intervalcol-1)*alpha^r+m,
                                    (intervalline-1)*alpha^r+n,1)
                        +s2(i,j)*oP((intervalcol-1)*alpha^r+m,
                                    (intervalline-1)*alpha^r+n,2)
                        +kz(i,j);
                    nP(deiktisx+m-1,deiktisy+n-1,2)=
                        et(i,j)*(intervalx+(m-1)*interval_distance)
                        +ft(i,j)*(intervaly+(n-1)*interval_distance)
                        +gt(i,j)*(intervalx+(m-1)*interval_distance)
                        *(intervaly+(n-1)*interval_distance)
                        +s3(i,j)*oP((intervalcol-1)*alpha^r+m,
                                    (intervalline-1)*alpha^r+n,1)
                        +s4(i,j)*oP((intervalcol-1)*alpha^r+m,
                                    (intervalline-1)*alpha^r+n,2)
                        +kt(i,j);
                end;
            end;
            deiktisy=deiktisy+alpha^r;
        end;
        deiktisx=deiktisx+alpha^r;
    end;
    interval_distance=interval_distance/alpha;
    oP=nP;
end;

```

Παράρτημα Β΄

Κώδικας C++

Σε αυτό το παράρτημα δίνεται ένα κομμάτι του κώδικα που υλοποιήθηκε σε C++ για να εφαρμοστεί το μοντέλο συμπίεσης εικόνας που περιγράφεται στο κεφάλαιο 9. Ολόκληρος ο κώδικας βρίσκεται στο φάκελο Fractal Image Compression\Bmpedge μέσα στο CD που βρίσκεται στο οπισθόφυλλο.

```

/*****
DynamicBouImageBivariateSquare::
DynamicBouImageBivariateSquare(unsigned int d, unsigned int p,
                                unsigned char  depth_factor,
                                Image* picture,float MIN_DIST,
                                CONTRACTION_FACTORS_CALCULATION_TYPE c_calc_type
                                ):DynamicBouImageSquare()
{
    //Debug File
    fprintf(debug_file,"Compresing...\n");
    long   number_of_interpolation_points,
           number_of_sections,section,interval,number_of_intervals,
           sections_per_line,intervals_per_line,
           sections_per_column,intervals_per_column,
           sections_per_line2,intervals_per_line2,
           sections_per_column2,intervals_per_column2,
           i,j,k,l,pixel,pixel2,best_interval,section1;
    BOOLEAN above,left;

    int     n,m,lines,columns,kappa;
    long    Za,Zb,Zc,Zd,za,zb,zc,zd;

    BYTE    contraction_factor_needed;

    float   metric;
    float   idim;

    Square      *section_square,*interval_square;
    NewBivariateSquare *mapped_interval;

```



```

float    best_contraction_factor,best_metric,
          contraction_factor,contraction_factor2,contraction_factor1;
Points<float>    *section_factors,*interval_factors,*interval_dimensions;

delta=d;
psi=p;
depth=depth_factor;
kappa=psi/delta;

lines=picture->total_lines();
columns=picture->total_columns();
number_of_interpolation_points=((lines-1)/d+1)*((columns-1)/d+1);
number_of_sections=((lines-1)/d)*((columns-1)/d);
number_of_lines=picture->total_lines();
number_of_columns=picture->total_columns();
original_number_of_lines=picture->original__lines();
original_number_of_columns=picture->original__columns();

sections_per_line=(columns-1)/delta;
sections_per_column=(lines-1)/delta;

intervals_per_line=(columns-1)/psi;
intervals_per_column=(lines-1)/psi;
number_of_intervals=intervals_per_line*intervals_per_column;

interpolation_points=new Points<int>(number_of_interpolation_points);
section_mapping=new Points<unsigned long>(number_of_sections);
contraction_factors=new Points<float>(number_of_sections);

/*This is for the progress report...*/
Initialize_OS_Dependent_Progress_Procedure();
float    section_percent=1.0/number_of_sections*100.0;
float    progress=0;
/**/

/*calculate factors for all sections*/
pixel=1;
n=delta+1;
m=psi+1;

if (c_calc_type==geometric){

```



```
section_factors=new Points<float>(number_of_sections);
for (i=1;i<=sections_per_column;i++)
{
    for (j=1;j<=sections_per_line;j++)
    {
        section_square=new Square(picture,pixel,n);
        section_factors->put_point(section_square->biv_geometric_factor());
        delete section_square;
        pixel+=delta;
    }
    pixel+=picture->total_columns()*(delta-1)+1;
}
pixel=1;
interval_factors=new Points<float>(number_of_intervals);
for (i=1;i<=intervals_per_column;i++)
{
    for (j=1;j<=intervals_per_line;j++)
    {
        interval_square=new Square(picture,pixel,m);
        interval_factors->put_point(interval_square->biv_geometric_factor());
        delete interval_square;
        pixel+=psi;
    }
    pixel=1+picture->total_columns()*psi*i;
}
}

//debug file
fprintf(debug_file,"Initial Step: %d sections %dx%d.\n",number_of_sections,delta,
        delta);

pixel=1;
section=1;
Continuous_E=CONTINUOUS_DISTANCE;
float MY_MIN_DISTANCE=MIN_DIST;
unsigned int steps=1;
/*fprintf(text_file,"BEGIN\n");
fprintf(text_file,"sections column= %d\n",sections_per_column);
fprintf(text_file,"sections line= %d\n",sections_per_line);
fclose(text_file);*/
/*This list contains the numbers of the sections
not adequately modeled.*/
LIST<long> *difficult_sections=new LIST<long>();
Continuous_E=MIN_DIST*3;
if (Continuous_E>CONTINUOUS_DISTANCE)
    Continuous_E=CONTINUOUS_DISTANCE;
for (i=1;i<=sections_per_column;i++)
{
```



```

for (j=1;j<=sections_per_line;j++)
{
    section_square=new Square(picture,pixel,n);
    za=picture->value(section_square->UpLeftCorner());
    zb=picture->value(section_square->UpRightCorner());
    zc=picture->value(section_square->DownRightCorner());
    zd=picture->value(section_square->DownLeftCorner());
    /*search all intervals*/
    interval=1;
    pixel2=1;
    best_metric=1000000000000000.0;
    best_interval=interval;
    best_contraction_factor=1;

    for (k=1;k<=intervals_per_column;k++)
    {
        for (l=1;l<=intervals_per_line;l++){
            interval_square=new Square(picture,pixel2,m);
            Za=picture->value(interval_square->UpLeftCorner());
            Zb=picture->value(interval_square->UpRightCorner());
            Zc=picture->value(interval_square->DownRightCorner());
            Zd=picture->value(interval_square->DownLeftCorner());

            if (c_calc_type==geometric){
                contraction_factor=interval_factors->point_value(interval);
                if (contraction_factor==0)
                {
                    contraction_factor=0.9;
                }
                else
                    contraction_factor=section_factors->point_value(section)
                        /contraction_factor;
            }
            else
                contraction_factor=
                    section_square->biv_analytic_factor(*interval_square);

            if ((fabs(contraction_factor)>=1)&&(steps<depth)){
                delete interval_square;
                interval++;
                pixel2+=psi;continue;}
            if (!continuous_condition(section_square,section,interval_square,
                contraction_factor,
                section_mapping,contraction_factors)&&(steps<depth)){
                delete interval_square;
                interval++;
                pixel2+=psi;continue;}
            if (!continuous_condition2(section_square,section,interval_square,
                contraction_factor)&&(steps<depth)){

```



```
        delete interval_square;
        interval++;
        pixel2+=psi;continue;}

        mapped_interval=new NewBivariateSquare(interval_square,
            section_square,d,psi,contraction_factor);
        metric=mapped_interval->L2_distance(section_square);
        if (best_metric>metric)
        {
            best_metric=metric;
            best_interval=interval;
            best_contraction_factor=contraction_factor;
        }
        delete mapped_interval;
        delete interval_square;
        interval++;
        pixel2+=psi;
        if ((best_metric<MY_MIN_DISTANCE)&&(fabs(best_contraction_factor)<1))
            break;
    }
    pixel2=1+picture->total_columns()*psi*k;
    if ((best_metric<MY_MIN_DISTANCE)&&(fabs(best_contraction_factor)<1))
        break;
}

delete section_square;
if ((best_metric<MY_MIN_DISTANCE)|| (depth==1)){
    /*Progress Report*/
    progress+=section_percent;
    OS_Dependent_Progress(progress);
    section_mapping->put_point(best_interval);
    contraction_factors->put_point((float)best_contraction_factor);
}
else{
    difficult_sections->put_item_to_end(section);
    section_mapping->put_point(0);
}

interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
section++;
pixel+=delta;
}
interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
pixel+=picture->total_columns()*(delta-1)+1;
}

/*put the last interpolation points*/
for (j=0;j<=sections_per_line;j++)
{
```



```

        interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
        pixel+=delta;
    }

    long    final_interval=pow(2,interval_bits);
    /*Now deal with the problematic sections*/
    extra_interpolation_points=new Points<int>(number_of_interpolation_points/2);
    extra_section_mapping=new Points<unsigned long>(number_of_sections/2);
    extra_contraction_factors=new Points<float>(number_of_sections/2);
    long        X,Y;
    long    intervals_per_line0=intervals_per_line;
    long    intervals_per_column0=intervals_per_column;
    /*this list contains all the initial problems*/
    LIST<long>    *difficult_sections0;
    LIST<long>    *difficult_sections2;
    LIST<long>    *temp; /*for swap...*/
    difficult_sections0=difficult_sections;

    //FILE*    debug_file=fopen("debug.txt","w+");
    int        delta0=delta;
    Continuous_E=MIN_DIST*3;
    int    max_depth=(float)log(delta)/log(kappa);
    while ((d/kappa>1)&&(steps<depth)){
        MY_MIN_DISTANCE*=INCREASE_COEFICIENT;

        steps++;
        difficult_sections2=new LIST<long>();
        sections_per_line=(columns-1)/d;
        sections_per_column=(lines-1)/d;
        delta=d;
        d=d/kappa;
        n=d+1;
        p=p/kappa;
        m=psi+1;
        sections_per_line2=(columns-1)/d;
        sections_per_column2=(lines-1)/d;
        section_percent=section_percent/(kappa*kappa);
        difficult_sections->goto_first_item();
        long    a,plithos=difficult_sections->total_items();
        //debug file
        fprintf(debug_file,"\t\t %d problematic.\n\n",plithos);
        //debug file
        fprintf(debug_file,"%d Step:  %d sections  %dx%d.\n",steps,kappa*kappa*plithos,
            d,d);

        /*debug info

```



```
fprintf(debug_file, "\n-----delta=: %d -----", d);*/

/*While the list is not empty split every section.*/
for (a=1; a<=plithos; a++)
{
    section1=difficult_sections->return_current_item2();
    difficult_sections->goto_next_item();
    /*debug info
    fprintf(debug_file, "\nsection: %d", section1);*/
    /*We divide the section into kappa^2 subsections*/
    /*sections and intervals are now by a factor of kappa smaller.*/
    Y= ((section1-1)/sections_per_line)*delta+1;
    X= ((section1-1)%sections_per_line)*delta+1;
    pixel=(Y-1)*columns+X;
    if (X==1)
        left=FALSE;
    else if (difficult_sections->is_member(section1-1))
        left=TRUE;
    else
        left=FALSE;

    if (Y==1)
        above=FALSE;
    else if (difficult_sections->is_member(section1-1))
        above=TRUE;
    else
        above=FALSE;

    /*calculate the section using the new numbering.
    Don't forget that now the sections are smaller.
    each old section contains now kappa^2 new sections.*/
    section=(Y-1)/d*sections_per_line2+(X-1)/d+1;
    for (i=1; i<=kappa; i++){
        for (j=1; j<=kappa; j++){
            if (i>1){
                if (j==1){
                    /*if the left square is a problematic one then
                    we must not store these interpolation points, since
                    they are stored already.*/
                    if (!left){
                        extra_interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
                        /*debug info
                        fprintf(debug_file, "\n\tIP: %d", picture->value(pixel));*/
                    }
                }
            }
            else{
                extra_interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
                /*debug info
                fprintf(debug_file, "\n\tIP: %d", picture->value(pixel));*/
            }
        }
    }
}
```



```

}
/*if the above square is a problematic one then
we must not store these interpolation points, since
they are stored already.*/
else if (j>1)
    if (!above){
        extra_interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
        /*debug info
        fprintf(debug_file,"\n\tIP: %d",picture->value(pixel));*/
    }
section_square=new Square(picture,pixel,n);
za=picture->value(section_square->UpLeftCorner());
zb=picture->value(section_square->UpRightCorner());
zc=picture->value(section_square->DownRightCorner());
zd=picture->value(section_square->DownLeftCorner());
/*search all intervals*/
interval=1;
pixel2=1;
best_metric=100000000000000.0; /*Worst metric*/
best_interval=interval;
best_contraction_factor=1.5;
if (c_calc_type==geometric)
    contraction_factor1=section_square->biv_geometric_factor();
for (k=1;k<=intervals_per_column0;k++)
{
    for (l=1;l<=intervals_per_line0;l++){
        interval_square=new Square(picture,pixel2,m);
        Za=picture->value(interval_square->UpLeftCorner());
        Zb=picture->value(interval_square->UpRightCorner());
        Zc=picture->value(interval_square->DownRightCorner());
        Zd=picture->value(interval_square->DownLeftCorner());
        if (c_calc_type==geometric){
            contraction_factor2=interval_factors->point_value(interval);
            if (contraction_factor2==0)
            {
                contraction_factor2=0.9;
            }
            else
                contraction_factor=contraction_factor1/contraction_factor2;
        }
        else
            contraction_factor=
                section_square->biv_analytic_factor(*interval_square);
        if (depth<max_depth){
            if (fabs(contraction_factor)>=1){
                delete interval_square;
                interval++;
                pixel2+=psi;continue;}
        }
    }
}

```



```
else if (contraction_factor>=1)
    contraction_factor=0.95;
else if (contraction_factor<=-1)
    contraction_factor=-0.95;
if (!continuous_condition2(section_square,section,
    interval_square,contraction_factor)
    &&(steps<depth)){
    delete interval_square;
    interval++;
    pixel2+=psi;continue;}

mapped_interval=new NewBivariateSquare(interval_square,
    section_square, d,psi, contraction_factor);
metric=mapped_interval->L2_distance(section_square);
if (best_metric>metric)
{
    best_metric=metric;
    best_interval=interval;
    best_contraction_factor=contraction_factor;
}
delete mapped_interval;
delete interval_square;
if ((best_metric<MY_MIN_DISTANCE)
    &&(fabs(best_contraction_factor)<1))
    break;
interval++;
pixel2+=psi;
}
if ((best_metric<MY_MIN_DISTANCE)
    &&(fabs(best_contraction_factor)<1))
    break;
pixel2=1+picture->total_columns()*psi*k;
}

delete section_square;
if (steps==depth){
    if ((fabs(best_contraction_factor)>=1.0)&&(depth<max_depth)){
        difficult_sections2->put_item_to_end(section);
        extra_section_mapping->put_point(0);
    }
    else if (best_metric>MY_MAX_DISTANCE_CONST){
        difficult_sections2->put_item_to_end(section);
        extra_section_mapping->put_point(0);
    }
    else{
        progress+=section_percent;
        OS_Dependent_Progress(progress);
        extra_section_mapping->put_point(best_interval);
        /*save info for previous section*/
    }
}
```



```

        extra_contraction_factors->put_point(
            (float)best_contraction_factor);
    }
}
else if (best_metric<MY_MIN_DISTANCE){
    /*Progress Report*/
    progress+=section_percent;
    OS_Dependent_Progress(progress);
    extra_section_mapping->put_point(best_interval);
    /*save info for previous section*/
    extra_contraction_factors->put_point(
        (float)best_contraction_factor);
}
else{
    difficult_sections2->put_item_to_end(section);
    extra_section_mapping->put_point(0);
}
pixel+=d;
section++;
}
if ((i>1)&&(j>kappa)){ /*Do not put the old interpolation points.
                        only the new interpolation points.*/
    extra_interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
    /*debug info
    fprintf(debug_file,"\n\tIP: %d",picture->value(pixel));*/
}
Y=Y+d;
pixel=(Y-1)*columns+X;
section=section+sections_per_line2-kappa;
}
pixel+=d;
for (i=1;i<=kappa-1;i++){
    extra_interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
    /*debug info
    fprintf(debug_file,"\n\tIP: %d",picture->value(pixel));*/
    pixel+=d;
}
pixel+=d;/*giati to evala?*/

}
if (difficult_sections0!=difficult_sections)
    delete difficult_sections;
difficult_sections=difficult_sections2;
if ((!difficult_sections->is_empty())&&(steps==depth))
    depth++;
}
delete difficult_sections0;
/*The last sections need only interpolation points*/
long    a,plithos;

```



```
if (steps==depth)
    plithos=0;
else
    plithos=difficult_sections->total_items();
/*While the list is not empty split every section.*/
for (a=1;a<=plithos;a++)
{
    section=difficult_sections->return_current_item2();
    difficult_sections->goto_next_item();
    /*We devide the section into kappa^2 subsections*/
    /*sections and intervals are now by a factor of kappa smaller.*/
    Y= ((section-1)/sections_per_line2)*d+1;
    X= ((section-1)%sections_per_line2)*d+1;
    pixel=(Y-1)*columns+X;

    /*first line*/
    for (i=2;i<=kappa;i++){
        pixel++;
        extra_interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
    }
    /*rest lines*/
    for (i=2;i<=kappa;i++){
        Y++;
        pixel=(Y-1)*columns+X;
        for (j=1;j<=kappa+1;j++){
            extra_interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
            pixel++;
        }
    }
    /*last line*/
    Y++;
    pixel=(Y-1)*columns+X;
    for (i=2;i<=kappa;i++){
        pixel++;
        extra_interpolation_points->put_point(picture->value(pixel));
    }
}

delta=psi/kappa;
if (c_calc_type==geometric){
    delete interval_factors;
    delete section_factors;
}
if (steps>1)
    delete difficult_sections2;
}
```



```

/*****/
/*Decompression Bivariate Model */
/*****/

Points<int> *decompress_dynamic_method_v2D6_0(int number_of_lines,
        int number_of_columns,
        int delta,
        int psi,
        Points<int> *interpolation_points,
        Points<unsigned long> *section_mapping,
        Points<float> *contraction_factors,
        Points<int> *extra_interpolation_points,
        Points<unsigned long> *extra_section_mapping,
        Points<float> *extra_contraction_factors,
        unsigned int interval_bits)

{
    /*Dynamic PSA 2D Model Squares and squares*/
    long    lines=number_of_lines;
    long    columns=number_of_columns;

    Points<int> *gray=new Points<int>(lines*columns);

    long                number_of_pixels=lines*columns;
    SpecialPoints<int>  gray_values(number_of_pixels);

    long    number_of_interpolation_points,kappa,
            number_of_sections,interval,number_of_intervals,
            sections_per_line,intervals_per_line,
            sections_per_line2,intervals_per_line2,
            sections_per_line3,intervals_per_line3,
            delta2,psi2,delta3,psi3,section2,
            sections_per_column,intervals_per_column,
            i,j,k,l,o,steps,r,s,sections,section1;

    long    interval_distance,interval_distance2,
            section_distance,section_distance2,section_distance3,
            pixel_thesis,mapped_thesis,
            points,iterations,N,M,N0,u,v,section;

    long    Xa,Ya,Za,Xb,Yb,Zb,Xc,Yc,Zc,Xd,Yd,Zd;
    long    xa,ya,za,xb,yb,zb,xc,yc,zc,xd,yd,zd;
    long    X,Y,x,y;
    float   Z,z;

```



```
float      s_,a_,c_,b_,d_,g_,e_,f_,k_,contraction_factor;

Points<unsigned long>      *subsections_addresses[10];
Points<float>              *subsections_cfactors[10];
Points<unsigned long>      *problematic_subsections[10];
LIST<unsigned long>        really_problematic_subsections[10];

BOOLEAN      left;
kappa=psi/delta;
number_of_interpolation_points=((lines-1)/delta+1)*((columns-1)/delta+1);
number_of_sections=((lines-1)/delta)*((columns-1)/delta);
sections_per_line=(columns-1)/delta;
sections_per_column=(lines-1)/delta;

intervals_per_line=(columns-1)/psi;
intervals_per_column=(lines-1)/psi;
number_of_intervals=intervals_per_line*intervals_per_column;

gray_values.fill_with_zeros();

/*First I Put The interpolation points*/
gray_values.goto_first_point();
interpolation_points->goto_first_point();
for (i=0;i<=sections_per_column;i++)
{
    for (j=0;j<=sections_per_line;j++)
    {
        gray_values.special_set_point(interpolation_points->point_value());
        gray_values.move_points(delta);
        interpolation_points->goto_next_point();
    }
    gray_values.move_points((delta-1)*columns-delta+1);
}

/*****Build the arrays*****/
k=0;
extra_section_mapping->goto_first_point();
extra_interpolation_points->goto_first_point();
section_mapping->goto_first_point();
long    a_value;
float    c_value;

/*I map every section*/
gray_values.goto_first_point();
section_mapping->goto_first_point();
if (contraction_factors!=NULL)
    contraction_factors->goto_first_point();
if (extra_contraction_factors!=NULL)
```



```

        extra_contraction_factors->goto_first_point();

subsections_addresses[0]=section_mapping;
subsections_cfactors[0]=contraction_factors;
/*find how many problematic sections there are.*/
N=section_mapping->total_points();
N0=0;
for (i=1;i<=N;i++){
    a_value=section_mapping->point_value();
    if (a_value==0){
        N0++;
        really_problematic_subsections[0].put_item_to_end(i);
    }
    section_mapping->goto_next_point();
}

M=extra_section_mapping->how_many_points();
j=1;
k=1;
psi2=delta;
delta2=psi2/kappa;
intervals_per_line2=(columns-1)/psi2;
while (j<=M){
    //N is the number of address needed for k+1 step
    //N0 the number of address needed for k+2 step
    N=N0*kappa*kappa;
    subsections_addresses[k]=new Points<unsigned long>(N);
    subsections_cfactors[k]=new Points<float>(N);
    N0=0;
    for (i=1;i<=N;i++){
        a_value=extra_section_mapping->point_value();
        extra_section_mapping->goto_next_point();
        subsections_addresses[k]->put_point(a_value);
        interval=a_value;
        j++;
        if (a_value==0)
            N0++;
        else{
            c_value=extra_contraction_factors->point_value();
            extra_contraction_factors->goto_next_point();
            subsections_cfactors[k]->put_point(c_value);
        }
    }
    k++;
    psi2=delta2;
    delta2=psi2/kappa;
    intervals_per_line2=(columns-1)/psi2;
}

```



```
//Iteration Steps
steps=trunc(log((float)delta)/log((float)kappa));
if (steps==0)
    steps=1;
for (i=k;i<=steps;i++){
    subsections_addresses[i]=new Points<unsigned long>(0);
    subsections_cfactors[i]=new Points<float>(0);
}
/*end build the arrays.*/

sections=1;
interval_distance=delta;
section_distance=interval_distance/kappa;
iterations=1;

for (k=1;k<=steps;k++){
    problematic_subsections[k]=new Points<unsigned long>
        (subsections_addresses[k]->total_points());
    section_mapping->goto_first_point();
    if (contraction_factors!=NULL)
        contraction_factors->goto_first_point();
    //for every section
    ya=1;
    for(i=1;i<=sections_per_column;i++){
        xa=1-delta;
        for (j=1;j<=sections_per_line;j++){
            interval=section_mapping->point_value();
            section_mapping->goto_next_point();
            if (interval==0){
                xa+=delta;
                continue;
            }
            contraction_factor=contraction_factors->point_value();
            contraction_factors->goto_next_point();
            /*section_points*/
            xa+=delta;
            za=gray_values.point_value((ya-1)*columns+xa);
            xb=xa+delta;
            yb=ya;
            zb=gray_values.point_value((ya-1)*columns+xb);
            xc=xb;
            yc=ya+delta;
            zc=gray_values.point_value((yc-1)*columns+xb);
            xd=xa;
            yd=yc;
```



```

zd=gray_values.point_value((yc-1)*columns+xa);
/*interval points*/
Ya= ((interval-1)/intervals_per_line)*psi+1;
Xa= ((interval-1)%intervals_per_line)*psi+1;
Za=gray_values.point_value((Ya-1)*columns+Xa);
Xb=Xa+psi;
Yb=Ya;
Zb=gray_values.point_value((Yb-1)*columns+Xb);
Xc=Xb;
Yc=Ya+psi;
Zc=gray_values.point_value((Yc-1)*columns+Xc);
Xd=Xa;
Yd=Yc;
Zd=gray_values.point_value((Yd-1)*columns+Xd);

/*map parameters*/
s_=contraction_factor;
if (s_>=1.0)
    s_=0.9;
if (s_<=-1)
    s_=-0.9;
if (s_==0)
    s_=0.01;
a_=(float)delta/psi;
c_=(float)delta/psi;
b_=(float)(xa*Xb-xb*Xa)/psi;
d_=(float)(ya*Yd-yd*Ya)/psi;
g_=(float)(zc+za-zd-zb-s_*(Zc+Za-Zd-Zb))/(psi*psi);
e_=(float)(za-zb-s_*(Za-Zb)-g_*Ya*(Xa-Xb))/(-psi);
f_=(float)(za-zd-s_*(Za-Zd)-g_*Xa*(Ya-Yd))/(-psi);
k_=(float)zc-e_*Xb-f_*Yd-s_*Zc-g_*Xb*Yd;

//scan the interval with distance interval_distance
//and the section with distance section_distance
Y=Ya;
X=Xa;
y=ya;
x=xa;
mapped_thesis=(y-1)*columns+x;

for(s=1;s<=iterations;s++){
    //For the first line do this:
    //skip the first map kappa-1,
    //skip the next map k-1 etc.
    //the procedure must do k^(steps-1) iterations
    for(r=1;r<=iterations;r++){
        //skip the first pixel
        mapped_thesis+=section_distance;
    }
}

```



```
X+=interval_distance;
//map kappa-1 elements
for(l=1;l<=kappa-1;l++){
    Z=gray_values.point_value((Y-1)*columns+X);
    z=round(e_*X+f_*Y+g_*X*Y+s_*Z+k_);
    gray_values.goto_index(mapped_thesis);
    gray_values.set_point(z);
    X+=interval_distance;
    mapped_thesis+=section_distance;
}
}
//Now map kappa-1 lines...
for(l=1;l<=kappa-1;l++){
    //for each line we map k^steps+1 pixels
    Y=Y+interval_distance;
    X=Xa;
    y=y+section_distance;
    x=xa;
    mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
    points=iterations*kappa+1;
    for (r=1;r<=points;r++){
        Z=gray_values.point_value((Y-1)*columns+X);
        z=round(e_*X+f_*Y+g_*X*Y+s_*Z+k_);
        gray_values.goto_index(mapped_thesis);
        gray_values.set_point(z);
        X+=interval_distance;
        mapped_thesis+=section_distance;
    }
}
Y=Y+interval_distance;
X=Xa;
y=y+section_distance;
x=xa;
mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
}
//For the last line do this:
//skip the first map kappa-1,
//skip the next map k-1 etc.
//the procedure must do k^(steps-1) iterations
for(r=1;r<=iterations;r++){
    //skip the first pixel
    mapped_thesis+=section_distance;
    X+=interval_distance;
    //map kappa-1 elements
    for(l=1;l<=kappa-1;l++){
        Z=gray_values.point_value((Y-1)*columns+X);
        z=round(e_*X+f_*Y+g_*X*Y+s_*Z+k_);
        gray_values.goto_index(mapped_thesis);
        gray_values.set_point(z);
```



```

        X+=interval_distance;
        mapped_thesis+=section_distance;
    }
} //end for
} //end column sections
ya+=delta;
} //end line sections

/*Handle the initial problem.
put the first interpolation points and
find the first problematic sections.*/
section_mapping->goto_first_point();
psi2=delta;/*new psi*/
delta2=delta/kappa;/*new delta*/
sections_per_line2=(columns-1)/delta2;
intervals_per_line2=(columns-1)/psi2;
if (k==1){
    ya=1;
    for(i=1;i<=sections_per_column;i++){
        xa=1-delta;
        for (j=1;j<=sections_per_line;j++){
            interval=section_mapping->point_value();
            section_mapping->goto_next_point();
            xa+=delta;
            if (interval==0){
                /*Put kappa^2 problematic subsections.*/
                x=xa;
                y=ya;
                for (u=1;u<=kappa;u++){
                    x=xa;
                    for(v=1;v<=kappa;v++){
                        section=(y-1)/delta2*sections_per_line2+(x-1)/delta2+1;
                        problematic_subsections[1]->put_point(section);
                        x+=delta2;
                    }
                    y+=delta2;
                }
            }
        }

        /*put the interpolation points*/
        y=ya;
        x=xa;
        section=(y-1)/delta*sections_per_line+(x-1)/delta+1;
        mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
        for(s=1;s<=iterations;s++){
            //For the first line do this:
            //skip the first map kappa-1,
            //skip the next map k-1 etc.
            //the procedure must do k^(steps-1) iterations
            /*Map the first line pixels only if the above section

```



```
is not a really problematic one!*/
if (!really_problematic_subsections[0].is_member(
    section-sections_per_line))
    for(r=1;r<=iterations;r++){
        //skip the first pixel
        mapped_thesis+=section_distance;
        //map kappa-1 elements
        for(l=1;l<=kappa-1;l++){
            z=extra_interpolation_points->point_value();
            extra_interpolation_points->goto_next_point();
            gray_values.goto_index(mapped_thesis);
            gray_values.special_set_point(z);
            mapped_thesis+=section_distance;
        }
    }
if (xa==1)
    left=FALSE;
else if (really_problematic_subsections[0].is_member(section-1))
    left=TRUE;
else
    left=FALSE;

//Now map kappa-1 lines...
for(l=1;l<=kappa-1;l++){
    //for each line we map k^steps+1 pixels
    y=y+section_distance;
    x=xa;
    mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
    points=iterations*kappa+1;
    for (r=1;r<=points;r++){
        /*map the right pixel only if the right section
        is not areally problematic one!*/
        if (r==1)
            if (left){
                mapped_thesis+=section_distance;
                continue;
            }
        z=extra_interpolation_points->point_value();
        extra_interpolation_points->goto_next_point();
        gray_values.goto_index(mapped_thesis);
        gray_values.special_set_point(z);
        mapped_thesis+=section_distance;
    }
}
y=y+section_distance;
x=xa;
mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
}
//For the last line do this:
```



```

        //skip the first map kappa-1,
        //skip the next map k-1 etc.
        //the procedure must do k^(steps-1) iterations
        for(r=1;r<=iterations;r++){
            //skip the first pixel
            mapped_thesis+=section_distance;
            //map kappa-1 elements
            for(l=1;l<=kappa-1;l++){
                z=extra_interpolation_points->point_value();
                extra_interpolation_points->goto_next_point();
                gray_values.goto_index(mapped_thesis);
                gray_values.special_set_point(z);
                mapped_thesis+=section_distance;
            }
        } //end for
    } //end if interval==0
} //end column sections
ya+=delta;
} //end line sections;
}

/*Now handle with the problematic sections...*/
/*map all the subsections. (d/kappa, d/kappa^2 etc...)*/
delta2=delta;
long    iterations2=iterations;
interval_distance2=interval_distance;
for (o=2;o<=k;o++){
    iterations2=iterations2/kappa;
    interval_distance2*=kappa;
    psi2=delta2;/*new psi*/
    delta2=delta2/kappa;/*new delta*/
    sections_per_line2=(columns-1)/delta2;
    intervals_per_line2=(columns-1)/psi2;
    /*mapa all the subsections.*/
    subsections_addresses[o-1]->goto_first_point();
    subsections_cfactors[o-1]->goto_first_point();
    problematic_subsections[o-1]->goto_first_point();
    for(i=1;i<=problematic_subsections[o-1]->total_points();i++){
        section=problematic_subsections[o-1]->point_value();
        problematic_subsections[o-1]->goto_next_point();
        interval=subsections_addresses[o-1]->point_value();
        subsections_addresses[o-1]->goto_next_point();
        if (interval==0)
            continue;
        contraction_factor=subsections_cfactors[o-1]->point_value();
        subsections_cfactors[o-1]->goto_next_point();
        /*Do we need a contraction factor?*/
        Ya= ((interval-1)/intervals_per_line)*psi+1;
        Xa= ((interval-1)%intervals_per_line)*psi+1;
        Za=gray_values.point_value((Ya-1)*columns+Xa);

```



```
Xb=Xa+psi;
Yb=Ya;
Zb=gray_values.point_value((Yb-1)*columns+Xb);
Xc=Xb;
Yc=Ya+psi;
Zc=gray_values.point_value((Yc-1)*columns+Xc);
Xd=Xa;
Yd=Yc;
Zd=gray_values.point_value((Yd-1)*columns+Xd);
/*section_points*/
xa=((section-1)%sections_per_line2)*delta2+1;
ya=((section-1)/sections_per_line2)*delta2+1;
za=gray_values.point_value((ya-1)*columns+xa);
xb=xa+delta2;
yb=ya;
zb=gray_values.point_value((ya-1)*columns+xb);
xc=xb;
yc=ya+delta2;
zc=gray_values.point_value((yc-1)*columns+xb);
xd=xa;
yd=yc;
zd=gray_values.point_value((yc-1)*columns+xa);

/*map parameters*/
s_=contraction_factor;
a_=(float)delta/psi;
c_=(float)delta/psi;
b_=(float)(xa*Xb-xb*Xa)/psi;
d_=(float)(ya*Yd-yd*Ya)/psi;
g_=(float)(zc+za-zd-zb-s_*(Zc+Za-Zd-Zb))/(psi*psi);
e_=(float)(za-zb-s_*(Za-Zb)-g_*Ya*(Xa-Xb))/(-psi);
f_=(float)(za-zd-s_*(Za-Zd)-g_*Xa*(Ya-Yd))/(-psi);
k_=(float)zc-e_*Xb-f_*Yd-s_*Zc-g_*Xb*Yd;

//scan the interval with distance interval_distance
//and the section with distance section_distance
Y=Ya;
X=Xa;
y=ya;
x=xa;
mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
for(s=1;s<=iterations2;s++){
    //For the first line do this:
    //skip the first map kappa-1,
    //skip the next map k-1 etc.
    //the procedure must do k^(steps-1) iterations
    for(r=1;r<=iterations2;r++){
        //skip the first pixel
```



```

        mapped_thesis+=section_distance;
        X+=interval_distance2;
        //map kappa-1 elements
        for(l=1;l<=kappa-1;l++){
            Z=gray_values.point_value((Y-1)*columns+X);
            z=round(e_*X+f_*Y+g_*X*Y+s_*Z+k_);
            gray_values.goto_index(mapped_thesis);
            gray_values.set_point(z);
            X+=interval_distance2;
            mapped_thesis+=section_distance;
        }
    }
    //Now map kappa-1 lines...
    for(l=1;l<=kappa-1;l++){
        //for each line we map k^steps+1 pixels
        Y=Y+interval_distance2;
        X=Xa;
        y=y+section_distance;
        x=xa;
        mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
        points=iterations2*kappa+1;
        for (r=1;r<=points;r++){
            Z=gray_values.point_value((Y-1)*columns+X);
            z=round(e_*X+f_*Y+g_*X*Y+s_*Z+k_);
            gray_values.goto_index(mapped_thesis);
            gray_values.set_point(z);
            X+=interval_distance2;
            mapped_thesis+=section_distance;
        }
    }
    Y=Y+interval_distance2;
    X=Xa;
    y=y+section_distance;
    x=xa;
    pixel_thesis=(Y-1)*columns+X;
    mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
}
//For the last line do this:
//skip the first map kappa-1,
//skip the next map k-1 etc.
//the procedure must do k^(steps-1) iterations
for(r=1;r<=iterations2;r++){
    //skip the first pixel
    mapped_thesis+=section_distance;
    X+=interval_distance2;
    //map kappa-1 elements
    for(l=1;l<=kappa-1;l++){
        Z=gray_values.point_value((Y-1)*columns+X);
        z=round(e_*X+f_*Y+g_*X*Y+s_*Z+k_);

```



```
        gray_values.goto_index(mapped_thesis);
        gray_values.set_point(z);
        X+=interval_distance2;
        mapped_thesis+=section_distance;
        pixel_thesis+=interval_distance2;
    }
    }//end for
} //end for
} /*end for o*/

if (k==1){
    iterations*=kappa;
    interval_distance/=kappa;
    section_distance=interval_distance/kappa;
    /*normalize!*/
    gray_values.normalise();
    continue;
}

/*Lastly handle with those of the problematic subsections
that need to be devided again.*/
psi3=delta2; /*new psi*/
delta3=delta2/kappa; /*new delta*/
sections_per_line3=(columns-1)/delta3;
intervals_per_line3=(columns-1)/delta3+1-kappa;
problematic_subsections[k-1]->goto_first_point();
subsections_addresses[k-1]->goto_first_point();
iterations2=1;
for(i=1;i<=problematic_subsections[k-1]->total_points();i++){
    interval=subsections_addresses[k-1]->point_value();
    subsections_addresses[k-1]->goto_next_point();
    section=problematic_subsections[k-1]->point_value();
    problematic_subsections[k-1]->goto_next_point();
    if (interval==0){
        /*Put the interpolation points.
        and devide the interval.
        Create kappa^2 new subsections and
        put them in subsection_address[k]*/
        /*First put the new problematic sections.*/
        /*Put kappa^2 problematic subsections.*/
        xa=((section-1)%sections_per_line2)*delta2+1;
        ya=((section-1)/sections_per_line2)*delta2+1;
        section1=(ya-1)/delta2*sections_per_line2+(xa-1)/delta2+1;
        really_problematic_subsections[k-1].put_item_to_end(section1);
        if (k<steps){
            x=xa;
            y=ya;
            for (u=1;u<=kappa;u++){
                x=xa;
                for(v=1;v<=kappa;v++){
```



```

        section2=(y-1)/delta3*sections_per_line3+(x-1)/delta3+1;
        problematic_subsections[k]->put_point(section2);
        x+=delta3;
    }
    y+=delta3;
}

/*put the interpolation points*/
y=ya;
x=xa;
mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
for(s=1;s<=iterations2;s++){
    //For the first line do this:
    //skip the first map kappa-1,
    //skip the next map k-1 etc.
    //the procedure must do k^(steps-1) iterations
    /*Map the first line pixels only if the above section
    is not a really problematic one!*/
    if (!really_problematic_subsections[k-1].is_member(section1-
                                                    sections_per_line2))

        for(r=1;r<=iterations2;r++){
            //skip the first pixel
            mapped_thesis+=section_distance;
            //map kappa-1 elements
            for(l=1;l<=kappa-1;l++){
                z=extra_interpolation_points->point_value();
                extra_interpolation_points->goto_next_point();
                gray_values.goto_index(mapped_thesis);
                gray_values.special_set_point(z);
                mapped_thesis+=section_distance;
            }
        }
    if (xa==1)
        left=FALSE;
    else if (really_problematic_subsections[k-1].is_member(section1-1))
        left=TRUE;
    else
        left=FALSE;
    //Now map kappa-1 lines...
    for(l=1;l<=kappa-1;l++){
        //for each line we map k^steps+1 pixels
        y=y+section_distance;
        x=xa;
        mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
        points=iterations2*kappa+1;
        for (r=1;r<=points;r++){
            if (r==1)
                if(left){
                    mapped_thesis+=section_distance;

```



```
        continue;
    }
    z=extra_interpolation_points->point_value();
    extra_interpolation_points->goto_next_point();
    gray_values.goto_index(mapped_thesis);
    gray_values.special_set_point(z);
    mapped_thesis+=section_distance;
}
}
y=y+section_distance;
x=xa;
mapped_thesis=(y-1)*columns+x;
}
//For the last line do this:
//skip the first map kappa-1,
//skip the next map k-1 etc.
//the procedure must do k^(steps-1) iterations
for(r=1;r<=iterations2;r++){
    //skip the first pixel
    mapped_thesis+=section_distance;
    //map kappa-1 elements
    for(l=1;l<=kappa-1;l++){
        z=extra_interpolation_points->point_value();
        extra_interpolation_points->goto_next_point();
        gray_values.goto_index(mapped_thesis);
        gray_values.special_set_point(z);
        mapped_thesis+=section_distance;
    }
}
}
}

/*normalize!*/
gray_values.normalise();
iterations*=kappa;
interval_distance/=kappa;
section_distance=interval_distance/kappa;
}

/*delete all memory...*/
for (i=1;i<=steps;i++){
    if (subsections_addresses[i]!=NULL)
        delete subsections_addresses[i];
    if (subsections_cfactors[i]!=NULL)
        delete subsections_cfactors[i];
    if (problematic_subsections[i]!=NULL)
        delete problematic_subsections[i];
}
}
```



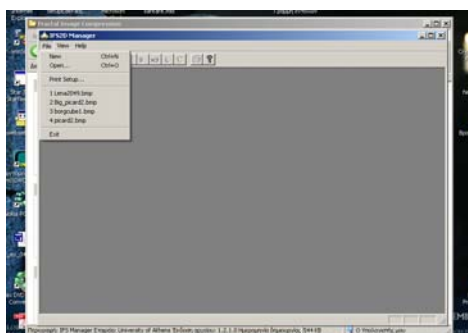
```
end:
/*normalize!*/
gray->goto_first_point();
gray_values.goto_first_point();
for(i=1;i<=number_of_pixels;i++)
{
    z=gray_values.point_value();
    if (z<0)
        gray->put_point(0);
    else if (z>255)
        gray->put_point(255);
    else
        gray->put_point(z);
    gray_values.goto_next_point();
}
return gray;
}
```

Παράρτημα Γ'

Οδηγός Χρήσης του Προγράμματος IFS2D Manager.exe

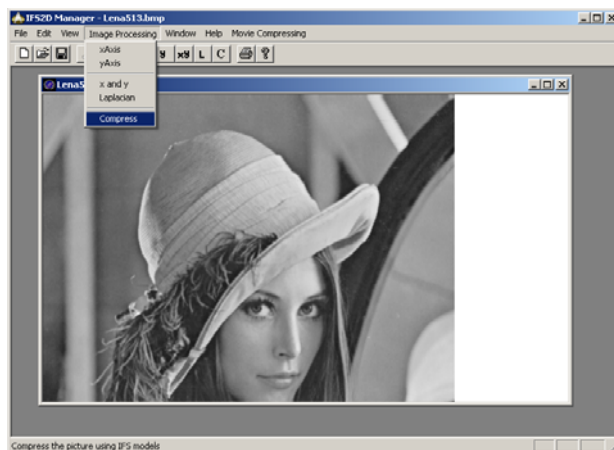
Το πρόγραμμα IFS2D Manager.exe, που βρίσκεται μέσα στο CD στο οπισθόφυλλο του βιβλίου, μπορεί να συμπίεσει μια εικόνα αποχρώσεων του γκριζου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο fractal παρεμβολής που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 9. Η χρήση του είναι πολύ απλή.

Καταρχήν, πρέπει να “ανοίξουμε” μια εικόνα σε μορφοποίηση bitmap (.bmp). Αυτό γίνεται μέσω του μενού File (βλέπε σχήμα Γ'.1 με την εντολή Open).



Σχήμα Γ'.1: Άνοιγμα μιας bitmap εικόνας.

Στη συνέχεια για να συμπίεσουμε την εικόνα που έχουμε ανοίξει χρησιμοποιούμε την εντολή Compress του μενού Image Processing (βλέπε σχήμα Γ'.2) ή το κουμπί C που βρίσκεται στην εργαλειοθήκη.

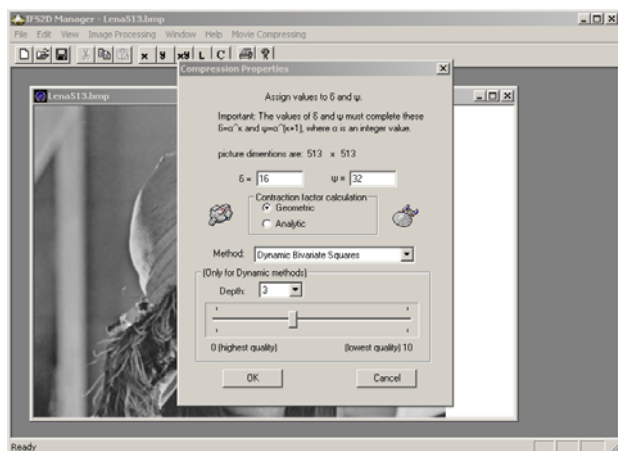


Σχήμα Γ'.2: Συμπίεση μιας bitmap εικόνας.

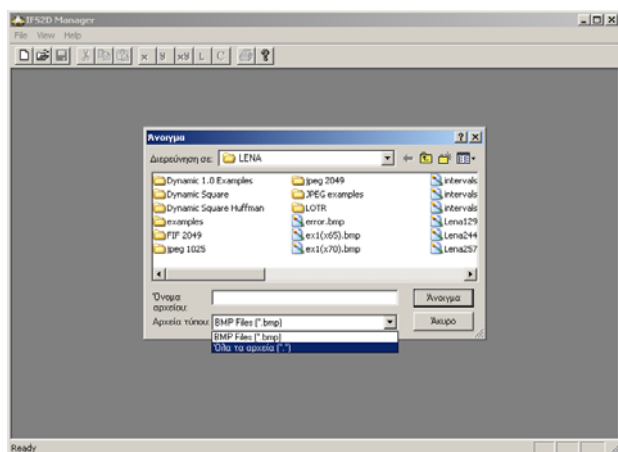
Έτσι εμφανίζεται ένα παράθυρο μέσω του οποίου μπορούμε να εισάγουμε τις παραμέτρους δ , ψ , E (για την ποιότητα της συμπίεσμένης εικόνας, μέσω της scroll bar) και τον τρόπο επιλογής των συντελεστών κατακόρυφης αναλογίας. (Μπορούμε να επιλέξουμε και διαφορετική μέθοδο συμπίεσης όπως αυτές που περιγράφονται στο [BΔΤ], αλλά δε θα αναφερθούμε σε αυτή την περίπτωση εδώ)

Περιμένουμε λίγο ώρα (μέχρι να συμπληρωθεί η progress bar που εμφανίζεται) και στο τέλος το πρόγραμμα έχει δημιουργήσει ένα νέο αρχείο με το ίδιο όνομα με την αρχική εικόνα, αλλά με κατάληξη .fif στο φάκελο που βρίσκεται η αρχική εικόνα. Επίσης εμφανίζεται ένα παράθυρο που μας ενημερώνει για το συνολικό χρόνο που χρειάστηκε η διαδικασία συμπίεσης, καθώς επίσης και για τις τιμές PSNR και SNR μεταξύ τη αρχικής εικόνας και της ανακατασκευασμένης εικόνας μετά τη συμπίεση.

Για να ανοίξουμε μια εικόνα με κατάληξη .fif αρκεί να χρησιμοποιήσουμε πάλι την εντολή Open του μενού File. Στο παράθυρο που προκύπτει πρέπει να επιλέξουμε να δούμε όλα τα αρχεία και όχι μόνο τις bitmap εικόνες (βλέπε σχήμα Γ'.4). Στη συνέχεια επιλέγουμε την επιθυμητή εικόνα και τη βλέπουμε στην οθόνη μας.



Σχήμα Γ'.3: Το παράθυρο επιλογών των παραμέτρων συμπίεσης.



Σχήμα Γ'.4: Άνοιγμα μιας εικόνας με κατάληξη .fif.

Ξένη Βιβλιογραφία

- [AC94] M. Ali and T. G. Clarkson. Using linear fractal interpolation functions to compress video images. *Fractals*, 2:417–421, 1994.
- [Baj56] M. Bajraktarevic. Sur une equation fonctionnelle. *Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser.*, 168, 1956.
- [Bar86] M. F. Barnsley. Fractal functions and interpolation. *Constr. Approx.*, 2:303–329, 1986.
- [Bar93] M. F. Barnsley. *Fractals everywhere, 2nd ed.* Academic Press Professional, 1993.
- [BDDar] P. Bouboulis, L. Dalla, and V. Drakopoulos. Image compression using recurrent bivariate fractal interpolation surfaces. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, Complexity: A Unifying Direction In Science, volume II, July 2006 (to appear).
- [BDD] P. Bouboulis, L. Dalla, and V. Drakopoulos. Construction of recurrent bivariate fractal interpolation surfaces and computation of their box-counting dimension. *Journal of Approximation Theory (to appear)*.
- [BDT] P. Bouboulis, V. Drakopoulos, and S. Theodoridis. Image compression using affine fractal interpolation surfaces. (*submitted*).
- [BDa] P. Bouboulis and Leoni Dalla. Hidden variable vector valued fractal interpolation functions. *Fractals Vol. 13, No. 3 (2005) 227-232*.
- [BDb] P. Bouboulis and L. Dalla. Closed fractal interpolation surfaces. (*submitted*).
- [BEH89] M. F. Barnsley, J. H. Elton, and D. P. Hardin. Recurrent iterated function systems. *Constr. Approx.*, 5:3–31, 1989.
- [BEHM89] B. F. Barnsley, J. Elton, D. Hardin, and P. Massopust. Hidden variable fractal interpolation functions. *SIAM J MATH ANAL*, 20:1218–1242, 1989.
- [BH89] B. F. Barnsley and A. N. Harrington. The calculus of fractal interpolation functions. *J. Approx. Theory*, 57:14–43, 1989.
- [BH93] M. F. Barnsley and L. P. Hurd. Fractal image compression. 1993.
- [Bou] P. Bouboulis. Pseudo random number generation with the aid of iterated function systems. (*submitted*).



- [BP70] A. L. Brown and A. Page. *Elements of Functional Analysis*. Van Noshand Reinhold Company, 1970.
- [BS87] M. F. Barnsley and A. D. Sloan. Chaotic compression. *Computer Graphics World*, November 1987.
- [BS88] M. F. Barnsley and A. D. Sloan. A better way to compress images. *BYTE magazine*, January 1988.
- [CG03] A.K.B. Chand and G.P.Kapoor. Hidden variable bivariate fractal interpolation surfaces. *Fractals*, 11(3):277–288, 2003.
- [Cha04] Arya Kumar Bedabrata Chand. *A Study on Coalescence and Spline Fractal Interpolation Functions*. PhD thesis, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, December 2004.
- [CS98] B. A. Cambell and M.K. Shepard. Shadows on a planetary surface and implications for photometric roughness. *ICARUS*, 134:279–291, 1998.
- [Dal02] Leoni Dalla. Bivariate fractal interpolation functions on grids. *Fractals*, 10(1):53–58, 2002.
- [DD96] L. Dalla and C. Damianou. An estimation of the box dimension of greater athens. *Tech. Chron A*, pages 9–15, 1996.
- [DD99] L. Dalla and V. Drakopoulos. On the parameter identification problem in the plane and the polar fractal interpolation functions. *Journal of Approximation Theory*, 101:289–302, 1999.
- [DDP03] L. Dalla, V. Drakopoulos, and M. Prodromou. On the box dimension for a class of nonaffine fractal interpolation functions. *Anal. Theory Appl.* 19 (2003), no 3, 220-233., 19(3):220–233, 2003.
- [DT88] B. Dubuc and C. Tricot. Vatiation d’ une fonction et dimension de son graphe. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math*, 306:531–533, 1988.
- [Fal97] Kenneth Falconer. *Techniques in Fractal Geometry*. John Wiley & Sons, 1997.
- [Fal99] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry*. John Wiley & Sons, 1999.
- [Fis95] Y. Fisher. *Fractal image compression: Theory and application*. Springer Verlag, New York, 1995.
- [Fro12] G. Frobenius. Über matrizen aus nicht negativen elementen. *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaft*, pages 456–477, 1912.
- [Gan00a] F. R. Gantmacher. *Matrix Theory*, volume 1. Chelsea Publishing Company, 2000.
- [Gan00b] F. R. Gantmacher. *Matrix Theory*, volume 2. Chelsea Publishing Company, 2000.
- [GH93] J.S. Geronimo and D. Hardin. Fractal interpolation surfaces and a related 2d multire-solutional analysis. *J. Math. Anal. Appl.*, 176:561–586, 1993.
- [Gon92] R. C. Gonzalez. *Digital Image Processing*. Addison Wesley Publ., 1992.



- [Hat81] J. E. Hutchinson. Fractals and self similarity. *Indiana Un. Journal of Maths*, 30:713–746, 1981.
- [HM86] D. P. Hardin and P. R. Massopust. The capacity of a class of fractal functions. *Math. Phys.*, 105:455–460, 1986.
- [HM93] D. P. Hardin and P. R. Massopust. Fractal interpolation functions from $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ and their projections. *Zeitschrift fur Analysis u. i. Anw.*, 12:535–548, 1993.
- [Hou65] Alton S. Householder. *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Blaisdell Publishing Company, 1965.
- [Hou75] A. S. Householder. *The theory of matrices in numerical analysis*. New York, 1975.
- [Hut81] J. E. Hutchinson. Fractals and self similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30:713–747, 1981.
- [Jac92] A. E. Jacquin. Image coding based on fractal theory of iterated contractive image transformations. *IEEE Trans. Image Processing*, 1:18–30, 1992.
- [Jac93] A. E. Jacquin. Fractal image coding: A review. *Proc. IEEE*, 81:1451–1465, 1993.
- [KF70] A. N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover, 1970.
- [KT74] Samuel Karlin and Howard M. Taylor. *A first course in stochastic processes*. Academic Press, New York, 2nd edition, 1974.
- [Lu97] Ning Lu. *Fractal imaging*. Academic Press, 1997.
- [Mac00] C. R. MacCluer. The many proofs and applications of perron’s theorem. *SIAM REVIEW*, 42, 2000.
- [Mal] R. Malysz. The Minkowski dimension of the bivariate fractal interpolation surfaces. *Chaos, Solitons and Fractals (to appear)*.
- [Mas54] J. M. Mastrand. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions. *Proc. London Math. Soc.*, (3)4:257–302, 1954.
- [Mas90] P. R. Massopust. Fractal surfaces. *J. Math. Anal and Appl.*, 151(1):275–290, 1990.
- [Mas94] Peter R. Massopust. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. Academic Press, 1994.
- [Mat75] P. Mattila. Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes. *Ann. Acad. Sci. Fenn. ser. A I Math*, 1:227–244, 1975.
- [Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces (Fractals and rectifiability)*. Cambridge University Press, 1995.
- [Maz94] D. S. Mazel. Representation of discrete sequences with three-dimensional iterated function systems. *IEEE Trans. Signal Process.*, 42:3269–3271, 1994.
- [MH92] D. S. Mazel and M. H. Hayes. Using iterated function systems to model discrete sequences. *IEEE Trans. Signal Process.*, 40:1724–1734, 1992.



- [MMK98] Suman K. Mitra, C. A. Murthy, and Malay K. Kundu. Technique for fractal image compression using genetic algorithm. *IEEE Transactions On Image Processing*, 7(4):586–593, 1998.
- [MPP84] B. B. Mandelbrot, D. E. Passoja, and A.J. Paullay. Fractal character of fracture surfaces of metals. *Nature*, 308:721–722, 1984.
- [NM91] B. B. Nakos and C. Mitsakaki. On the fractal character of rock surfaces. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 28:527–533, 1991.
- [NS04] M. A. Navascues and M. V. Sebastian. Generalization of hermite functions by fractal interpolation. *Journal of Approximation Theory*, 131:19–29, 2004.
- [Per07] O. Perron. Grundlagen fur eine theorie des jacobischen kettenbruchalgorithmus. *Math. Ann.*, 64:11–76, 1907.
- [Pri98] J. R. Price. Resampling and reconstructing with fractal interpolation functions. *IEEE Signal Process. Letters*, 5:228–230, 1998.
- [PRL⁺87] C. S. Pande, L. E. Richards, N. Louat, B. D. Dempsey, and A. J. Schwoeble. Fractal characterization of fractured surfaces. *Acta Metalurgica*, 35:1633–1637, 1987.
- [Rea52] A. H. Read. The solution of a functional equation. *Proc. Rpy. Soc. Edinburg*, 63, 1951-1952.
- [RSS03] Huo-Jun Ruan, Zhen Sha, and Wei-Yi Su. Counterexamples in parameter identification problem of the fractal interpolation functions. *Journal of Approximation Theory*, 122:121–128, 2003.
- [Sen73] E. Seneta. *Non-negative matrices*. New Work: Wiley, 1973.
- [Tri93] Claude Tricot. *Curves and Fractal Dimension*. Springer Verlag, 1993.
- [Tri97] C. Tricot. Function norms and fractal dimension. *SIAM J. MATH. ANAL.*, 28(1):189–212, 1997.
- [WdJ99] B. Wohlberg and G. de Jager. A review of the fractal image coding literature. *IEEE Trans. Image Processing*, 8:1716–1729, 1999.
- [WHL86] P. Wong, J. Howard, and J. Li. Surfaces roughening and the fractal nature of rocks. *Phys. Rev. Lett.*, 57(637-640), 1986.
- [XS97] H. Xie and H. Sun. The study of bivariate fractal interpolation functions and creation of fractal interpolation surfaces. *Fractals*, 5(4):625–634, 1997.
- [XSZF01] Heping Xie, Hongquan Sun, Yang Zu, and Zhigang Feng. Study on generation of rock fracture surfaces by using fractal interpolation. *International Journal of Solids and Structures*, 38:5765–5787, 2001.
- [YYF89] Naokazu Yokoya, Kazuhiko Yamamoto, and Noburu Funakubo. Fractal-based analysis and interpolation of 3d natural surface shapes and their application to terrain modeling. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 46:284–302, 1989.
- [Zha96] Nailiang Zhao. Construction and application of fractal interpolation surfaces. *The Visual Computer*, 12:132–146, 1996.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Γ. Δ. Ακρίβης Β. Α. Δουγαλής. *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2004.
- [2] Λεώνη Ευαγγελάτου Δάλλα. *Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας*. 2000.
- [3] G.E. Forsythe, M.A. Malcolm, C.B. Moler. *Αριθμητικές Μέθοδοι και Προγράμματα για Μαθηματικούς Υπολογισμούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1994.

Ευρετήριο

- Banach
 Θεώρημα Σταθερού Σημείου, 25, 28, 30, 31, 38, 98, 164
- Blaschke
 Θεώρημα Επιλογής, 28
- Cantor
 σύνολο, 32
- Cauchy-Schwarz
 ανισότητα, 162
- Fractal
 Αυτοόμοια Διανυσματική Επιφάνεια Παρεμβολής, 166
 διάσταση, 47, 50
 διάσταση, 102
 Διανυσματική Επιφάνεια Παρεμβολής, 159, 164
 Επιφάνεια Παρεμβολής, 87, 89, 95, 102, 118, 122, 126, 134, 139, 186
 Αυτοόμοια, 113, 114, 130
 Κλειστή Επιφάνεια Παρεμβολής, 139, 144, 148, 153
 σύνολα, 30
 Συμπίεση Εικόνας, 179
 Συνάρτηση Παρεμβολής, 58, 77, 87
 Αυτοσυσχετισμένη, 60, 62, 78
 Διανυσματική, 68, 69
 Κατά Τμήματα Συσχετισμένη, 69, 71, 81
 Κρυφής μεταβλητής, 68, 69
- Frobenius
 Θεώρημα, 108
- FΕΠ, βλέπε Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής
- FΣΠ, βλέπε Fractal Συνάρτηση Παρεμβολής
- Hatchinson
 Θεώρημα, 53
- Hausdorff
 διάσταση, 50, 51
 εξωτερικό μέτρο, 49
 μέτρο, 47, 49
 μετρική, 27, 28, 81
- Kolmogorov
 εντροπία, 50
- Lebesgue
 μέτρο, 47, 48
- Markov
 αλυσίδα, 15, 16, 39, 40, 90
 κατάσταση, 15
 χώρος καταστάσεων, 15
- Minkowski
 διάσταση, 50
- Read-Bajraktarevic
 τελεστής, 60, 97, 165
- Sierpinski
 τρίγωνο, 33
- affine, 58, βλέπε Συνάρτηση affine
 bivariate, βλέπε Συνάρτηση bivariate
- AAE, βλέπε Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων
- ακέραιο μέρος, 104
- Ακολουθία, 21
 Cauchy, 21, 22
 βασική, 21
 οριακό σημείο, 21
 σύγκλιση, 21
 σημείο συσσώρευσης, 21
- Αλγόριθμος, 71, 80, 82, 193, 197
- Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων, 31, 99, 186, 197
- Αλγόριθμος κατασκευής FΣΠ, 63
- Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων, 31, 70
- Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων για ΠΣΕΣ, 39
- ανοικτή σφαίρα, 20
- ανοικτό σύνολο, 20



- απόσταση, 18, 27
 ATE, βλέπε Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων
 ATE για ΠΣΕΣ με αναγώγιμους πίνακες, 41
- ΔΦΕΠ, βλέπε Fractal Διανυματική Επιφάνεια Παρεμβολής
 διάνυσμα συνδέσεων, 96, 163
 διάσταση Box, 51, 53
 διάσταση box, 102, 105
 διάσταση Hausdorff-Besicovitch, βλέπε Hausdorff
 διάσταση Minkowski, βλέπε Minkowski
 διάσταση εντροπίας, 50
 διάσταση πληροφορίας, 50
 διακριτό σήμα, 77
- ελκυστής, 23, 95, 96, 104, 105, 159, 164
 εσωτερικό, βλέπε Σύνολο
 εξωτερικό μέτρο, 47
- φάσμα, 13
 φύλλο φτέρης, 34
 φασματική ακτίνα, 13, 16, 17
 φραγμένο σύνολο, 21
- Γράφημα, 14
 ισχυρώς συνεκτικό, 14, 16
 κατευθυνόμενο γράφημα, 14
 γραμμική απεικόνιση, 12
- ιδιοδιάνυσμα, 13
 ιδιοτιμή, 13, 16, 17
 ισοδύναμες νόρμες, 162
- Θεώρημα
 επιλογής του Blaschke, 28
 Μέσης Τιμής, 143, 162
 Σταθερού Σημείου του Banach, 25
 Συγκόλλησης, 38
 Συγκόλλησης, 77, 83
 Συγκόλλησης για ΠΣΕΣ, 44
- κβαντιστής, 200
 κλειστή σφαίρα, 20
 κλειστό σύνολο, 20, 21
 κυρτή θήκη, 143
- λογαριθμική πυκνότητα, 50
- μέτρο, 48
 μέτρο Lebesgue, βλέπε Lebesgue
- μέτρο του Hausdorff, 49
 μετρήσιμο, 48
 μετρικές ισοδύναμες, 19
 μετρική, 18, 81, 101, 162
- νόρμα, 12
 νόρμες ισοδύναμες, 20
- ολικά φραγμένο σύνολο, 21
 ομοιομορφισμός, βλέπε Συνάρτηση
 οχταμόριο, 143
 οριακό σημείο, βλέπε Ακολουθία
- Πίνακας, 13
 αναγώγιμος, 14, 16, 17, 40, 112, 113, 122
 αρνητικοί Πίνακες, 13
 φασματική ακτίνα, 71, 105, 111, 113
 φυσική νόρμα πινάκων, 18, 26
 ιδιοδιάνυσμα, 113
 ιδιοδιάνυσμα, 108, 111
 ιδιοτιμή, 108
 θετικοί Πίνακες, 13
 μετάβασης, 16, 39
 μη αναγώγιμος, 14–17, 39, 105, 108, 114, 118, 126, 130, 134
 μη αρνητικός, 16, 17, 108, 111
 νόρμα πινάκων, 17
 πιθανοτήτων, 90, 96, 163
 χαρακτηριστική εξίσωση, 17
 στοχαστικός, 113
 συνδέσεων, 70, 71, 90, 105, 111, 114, 118, 122, 126, 130, 134, 163
- Πίνακες
 μετρική πινάκων, 162
- ΠΦΣΠ, βλέπε Fractal Συνάρτηση Παρεμβολής Κατά Τμήματα Συσχετισμένη
 παρεμβολή, 57, 77, 87
 Περιοδικό Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων, 38, 70, 71, 90, 93, 96, 101–103, 105, 106, 111, 113, 114, 118, 122, 126, 130, 134, 139, 144, 148, 153, 159, 163, 164, 180–183, 186, 189
- περιοχή, 69, 90, 95, 101
 περιστροφική τριγωνοποίηση, 88
 Πλήρης, βλέπε Χώρος
 πλατανόφυλλο, 34
 προβολή, 166
 ΠΣΕΣ, βλέπε Περιοδικό Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων



- Χώροι
 ισοδύναμοι, 19
 τοπολογικώς ισοδύναμοι, 21
- Χώρος, 11
 Διανυσματικός Χώρος, 11
 ευκλείδειος, 26
 Γραμμικός Χώρος, 11
 Μετρικός Χώρος, 18, 19
 Ομοιομορφικός, 20
 Πλήρης, 22, 25, 27, 28
 Χώρος με νόρμα, 12
 Χώρος των Fractal Συνόλων, 26
 Συμπαγής, 22, 23, 27, 28
- σήμα, 77, 83
- Σύνολα
 Fractal, 29, 30
- Σύνολο, 11
 Fractal, 11, 25, 28
 ανοικτή σφαίρα, 20
 ανοικτό, 20
 εσωτερικό, 22
 φραγμένο, 21
 θήκη, 21
 κλειστή σφαίρα, 20
 κλειστό, 20, 22
 κλειστότητα, 21
 ολικά φραγμένο, 21
 σταθερό, 23
 Συμπαγές, 22, 24
 συνοριακό σημείο, 21
- Σύνολο σύνορο, 21
- Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων, 30,
 58, 59, 62, 81, 179
 υπερβολικό, 60
 ελκυστή, 30
 συντελεστής συστολής, 30
 υπερβολικό, 30
- Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων, 68
- σ-άλγεβρα, 48
- ΣΕΣ, βλέπε Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων
- σημείο συσώρευσης, βλέπε Ακολουθία
- σταθερό σύνολο, 23
- σταθερό σημείο, 23, 25
- Συμπίεση Εικόνας, 179, 189, 194, 200
- Συμπαγής, βλέπε Χώρος
- Συνάρτηση
 Lipschitz, 23, 143
 affine, 25, 26, 88, 180, 183, 201
 bivariate, 88, 91, 101–103, 105, 106, 113, 139, 164, 183, 190, 201
 κατοπτρισμός, 25
 ομοιότητα, 23, 25
 ομοιομορφισμός, 20
 σύνθεση, 24
 στροφή, 25
 συνεχής, 20, 23
 συστολή, 23, 25, 26, 94, 162
- Συνάρτηση
 bivariate, 256
 συνθήκη Lipschitz, βλέπε Συνάρτηση Lipschitz
 συνοριακό σημείο, βλέπε Σύνολο
 συντελεστής κατακόρυφης αναλογίας, 58
 συντελεστής συστολής, 23
 συστολή, 90, βλέπε Συνάρτηση συστολή, 163
- τέλειο σύνολο, 21
- τομέας, 69, 90, 95, 101
- υπερβολικό, 60, 81, 90, 93, 96