# Το Θεώρημα του Montel

Παρουσίαση της Χριστίνας Σαββίδου
Μεταπτυχιακού Προγράμματος Θεωρητικών Μαθηματικών
Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών
για το μάθημα Γεωμετρια των Fractal (ΓΝ20)
2006- 2007

Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος του Montel, το οποίο θα μας είναι απαραίτητο στη μελέτη των συνόλων Julia. Αρχικά θα θυμηθούμε κάποια βασικά πράγματα από την μιγαδική ανάλυση, στη συνέχεια θα ορίσουμε τις κανονικές οικογένειες συναρτήσεων και θα ολοκληρώσουμε με τη διατύπωση και μια απόδειξη για το Θεώρημα του Montel ή Θεμελιώδες κριτήριο κανονικότητας, όπως αναφέρεται στο [3].

## 1 Υπενθυμίσεις από Μιγαδική Ανάλυση

**Ορισμός 1** *Έστω $V$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Αν $f : V \to \mathbb{C}$ και $a \in V$, τότε η μιγαδική παράγωγος της $f$ στο $a$ είναι, αν υπάρχει, το όριο $f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$.*
*Αν η $f$ έχει παράγωγο για κάθε $a \in V$, τότε η $f$ λέγεται ολόμορφη ή αναλυτική στο $V$.*
*Αν υπάρχει ένα σύνολο $W \subset V$ τέτοιο ώστε το $W$ να μην έχει κανένα σημείο συσσώρευσης, δηλαδή να αποτελείται από μεμονομένα σημεία, η $f$ να έχει παράγωγο για κάθε $a \in V - W$ και σε κάθε σημείο του $W$, η $f$ να έχει πόλο, η $f$ λέγεται μερόμορφη στο $V$.*

Επειδή θα ασχοληθούμε με οικογένειες αναλυτικών ή μερόμορφων συναρτήσεων, μια χρήσιμη έννοια είναι η ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων.

**Ορισμός 2** *Έστω $f_n : V \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ ακολουθία συναρτήσεων, $f : V \to \mathbb{C}$ και $U \subset V$.*
*Η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $U$ στην $f$, αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon, U) \in \mathbb{N}$, ώστε για $n \geq n_0$, να ισχύει $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, για κάθε $z \in U$. Συμβολίζουμε $f_n \rightrightarrows f$ στο $U$*
*Η $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $U$ στο $\infty$, αν για κάθε $M > 0$, υπάρχει $n_0 = n_0(M, U) \in \mathbb{N}$, ώστε για $n \geq n_0$, να ισχύει $|f_n(z)| > M$, για κάθε $z \in U$.*

Για να καταφέρουμε να παρουσιάσουμε μια απόδειξη για το Θεώρημα του Montel, που είναι και ο στόχος μας, θα χρειαστεί να θεωρήσουμε γνωστά κάποια θεωρήματα από Μιγαδική Ανάλυση. Εδώ τα αναφέρουμε απλά, για λόγους πληρότητας.

**Θεώρημα 1** *(Θεώρημα του Liouville) Αν η $f$ είναι ακέραια συνάρτηση (δηλαδή είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο) και υπάρχει σταθερά $M$ τέτοια ώστε $|f(z)| \leq M$ , $\forall z \in \mathbb{C}$, τότε η $f$ είναι ταυτοτικά σταθερή.*

**Θεώρημα 2** *(Θεώρημα Σύγκλισης του Weierstrass) Έστω $f_n : V \to \mathbb{C}$, ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων και $f : V \to \mathbb{C}$. Αν $f_n \rightrightarrows f$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $V$, τότε η $f$ είναι αναλυτική στο $V$ και $f_n' \rightrightarrows f'$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $V$.*

**Θεώρημα 3** *(Θεώρημα του Hurwitz) Έστω $G$ τόπος (δηλαδή ανοικτό και συνεκτικό), και έστω $f_n \rightrightarrows f$ στο $G$, όπου $\{f_n\}_n$ ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων στο $G$ και $f$ μη σταθερή. Αν $f(z_0) = 0$ για κάποιο $z_0 \in G$, τότε για $r$ αρκετά μικρό, υπάρχει $N = N(r)$, τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$, η $f_n$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών στο $\bar{S}(z_0, r)$ με την $f$.*

Το θεώρημα του Hurwitz αποδεικνύεται εύκολα με χρήση του θεωρήματος του Rouche. Οι ενδιαφερόμενοι, μπορούν να ανατρέξουν στο [3]. Για το σκοπό που μας ενδιαφέρει, το θεώρημα είναι πιο χρήσιμο στην παρακάτω μορφή.

**Πόρισμα 1** *Αν $\{f_n\}_n$ ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων στο $G$, που συγκλινει ομοιόμορφα στην $f$, και κάθε $f_n$ δεν έχει ρίζα στο $G$, τότε ή $f \equiv 0$ στο $G$ ή η $f$ δεν έχει ρίζα στο $G$.*

## 2 Κανονικές οικογένειες αναλυτικών συναρτήσεων

**Ορισμός 3** *Έστω $\mathfrak{F}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων που ορίζονται στον ανοικτό σύνολο $V \subset \mathbb{C}$*
*Η $\mathfrak{F}$ καλείται κανονική οικογένεια στο $V$, αν για κάθε ακολουθία $\{f_n\}_n \subset \mathfrak{F}$, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}_k$, ώστε να ισχύει ένα από τα ακόλουθα:*

1. *Υπάρχει $f : V \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f_{k_n} \rightrightarrows f$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $V$.*

2. *Σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $V$, $f_{k_n} \rightrightarrows \infty$.*

*Η $\mathfrak{F}$ λέγεται κανονική οικογένεια στο $w \in V$, αν υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subset V$ με $w \in U$, ώστε η $\mathfrak{A} = \{f|_U : f \in \mathfrak{F}\}$ να είναι κανονική οικογένεια στο $U$.*

**Θεώρημα 4** *Έστω $\mathfrak{F}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων στον τόπο $\Omega$. Τότε η $\mathfrak{F}$ είναι κανονική στο $\Omega$, αν και μόνο αν είναι κανονική σε κάθε σημείο του $\Omega$.*

Μπορείτε να βρείτε την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος στο [3] και στο [4]. Το θεώρημα αυτό θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στα παραδείγματα που ακολουθούν.

**Παραδείγματα**

1. Έστω $\mathfrak{F} = \{f_n(z) = nz : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε $f_n(0) = 0$ και $f_n(z) \to \infty$, $\forall z \neq 0$. Άρα η $\mathfrak{F}$ δεν είναι κανονική σε κανένα τόπο που περιέχει το 0.

2. Η $\mathfrak{F} = \{f_n(z) = z^n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κανονική στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο αφού για κάθε $z$, με $|z| < 1$, υπάρχει ανοικτό σύνολο $S(0,r)$ που το περιέχει με $|z| < r < 1$ τέτοιο ώστε να έχουμε ότι $f_n(z) \rightrightarrows 0$ στο $S(0,r)$. Επίσης, η $\mathfrak{F}$ είναι κανονική στο $\mathbb{C} - \bar{S}(0,1)$, αφού για κάθε $z \in \mathbb{C} - \bar{S}(0,1)$ έχουμε ένα ανοικτό σύνολο $L_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| > r\}$ με $1 < r < |z|$ τέτοιο ώστε $f_n(z) \rightrightarrows \infty$ στο $L_r$. Όπως φαίνεται από τα προηγούμενα, η $\mathfrak{F}$ δεν είναι κανονική στα σημεία του $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

# 3 Κανονικές οικογένειες μερόμορφων συναρτήσεων

Για να δώσουμε ένα πιο γενικό χαρακτηρισμό για τις κανονικές οικογένειες αναλυτικών αλλά και μερόμορφων συναρτήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε τη χορδική μετρική.

Έστω $S$ η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$ και $P : S - \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$ η στερεογραφική προβολή της $S$ χωρίς το βόρειο πόλο στο $\mathbb{C}$. Η $P$ είναι 1-1, επί, συνεχής, άρα έχει και αντίστροφη. Αν $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, επεκτείνουμε την $P$, $\tilde{P} : S \to \tilde{\mathbb{C}}$ με $\tilde{P}((0,0,1)) = \infty$.
Ορίζουμε σαν χορδική απόσταση $\chi$ δύο σημείων στον $\tilde{\mathbb{C}}$ την απόσταση της αντίστροφής εικόνας τους μέσω της $P$ στον $\mathbb{R}^3$. Δηλαδή, αν $z_1, z_2 \in \tilde{\mathbb{C}}$,

ορίζουμε σαν

$$\chi(z_1,z_2)=||\tilde{P}^{-1}(z_1)-\tilde{P}^{-1}(z_2)||=\begin{cases}\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & ,z_1,z_2\in\mathbb{C}\\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & ,z_1\in\mathbb{C},z_2=\infty\\ 0 & ,z_1=z_2=\infty\end{cases} \tag{1}$$

**Ορισμός 4** *Μια οικογένεια $\mathfrak{F}$ μερόμορφων συναρτήσεων σε ένα τόπο $\Omega$, είναι κανονική στο $\Omega$, αν κάθε ακολουθία $\{f_n\}\subset\mathfrak{F}$ περιέχει μια υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα χορδικά (δηλαδή ως προς τη χορδική μετρική) στα συμπαγή υποσύνολα του $\Omega$*

**Θεώρημα 5** *Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία μερόμορφων συναρτήσεων στον τόπο $\Omega$. Τότε, η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς τη χορδική μετρική στα συμπαγή υποσύνολα του $\Omega$ στην $f$ αν και μόνο αν σε κάθε σημείο $z_0\in\Omega$ υπάρχει κλειστός δίσκος $\bar{S}(z_0,r)$ στον οποίο $|f_n-f|\to 0$ ή $|\frac{1}{f_n}-\frac{1}{f}|\to 0$ ομοιόμορφα καθώς $n\to\infty$.*

Η απόδειξη παραλείπεται. Μπορείτε να την βρείτε στο [3].

# 4 Ισοσυνεχείς οικογένειες συναρτήσεων

Μια άλλη έννοια για οικογένειες συναρτήσεων είναι η ισοσυνέχεια. Επειδή αυτή η έννοια γίνεται πιο εύκολα κατανοητή από την κανονικότητα, θεωρούμε πως είναι σκόπιμο να την αναφέρουμε, μιας και συνδέεται άμεσα με την έννοια της κανονικότητας, όπως θα δούμε παρακάτω.

**Ορισμός 5** *Έστω $\mathfrak{F}=\{f_i :< X,\rho >\to< Y,\sigma >, i\in I\}$ οικογένεια συναρτήσεων μεταξύ των μετρικών χώρων $< X,\rho >,< Y,\sigma >$.*
*Η $\mathfrak{F}$ λέγεται ισοσυνεχής στο $x_0\in X$, αν για κάθε $\epsilon>0$, υπάρχει $\delta=\delta(\epsilon,x_0)$ ώστε για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ να ισχύει $\sigma(f(x),f(x_0))<\epsilon$ για κάθε $f\in\mathfrak{F}$.*
*Η $\mathfrak{F}$ λέγεται ισοσυνεχής στο $A\subset X$, αν είναι ισοσυνεχής σε κάθε $x_0\in X$.*

Η σύνδεση μεταξύ κανονικότητας και ισοσυνέχειας εξασφαλίζεται από το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 6** *Έστω $\mathfrak{F} = \{f_i : V \to \mathbb{C}, i \in I\}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων στον τόπο $V$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $\mathfrak{F}$ είναι κανονική οικογένεια στο $V$.*

2. *Η $\mathfrak{F} = \{f_i :< V, \chi > \to < \mathbb{C}, \chi >, i \in I\}$ είναι ισοσυνεχής οικογένεια στο $V$.*

Οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να ανατρέξουν στο [3] για την απόδειξη. Τώρα πια είμαστε εφοδιασμένοι ώστε να προχωρήσουμε στον στόχο μας, το Θεώρημα του Montel, και μια απόδειξή του.

# 5 Το Θεώρημα του Montel

Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε μια απόδειξη για το ακόλουθο θεώρημα, που στη βιβλιογραφία αναφέρεται σαν Θεώρημα του Montel αλλά και σαν Θεμελιώδες κριτήριο κανονικότητας.

**Θεώρημα 7** *(Το Θεώρημα του Montel) Έστω $\mathfrak{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων στο $V$.*
*Αν $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(V) \subset \mathbb{C} - \{a, b\}$ με $a \neq b$, τότε η $\mathfrak{F}$ είναι κανονική.*
*Ή, ισοδύναμα, αν η $\mathfrak{F}$ δεν είναι κανονική, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(V) = \mathbb{C}$ ή $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(V) = \mathbb{C} - \{a\}$ για κάποιο $a \in \mathbb{C}$*

Εδώ δε θα γίνει η αρχική απόδειξη που έγινε από τον Montel το 1912, αλλά μια αρκετά πιο στοιχειώδης, με την έννοια ότι χρειάζεται λιγότερα μαθηματικά εφόδια, βασισμένη σε μια ιδέα του Antonio Ros, όπως τη βρήκαμε στο [5].
Η κλασσική απόδειξη του Θεωρήματος χρησιμοποιεί την έννοια της τοπικά φραγμένης οικογένειας καθώς και το ακόλουθο θεώρημα.

**Ορισμός 6** *Η οικογένεια συναρτήσεων $\mathfrak{F}$ είναι τοπικά φραγμένη στο $V$ αν για κάθε $z_0 \in V$ υπάρχει $M = M(z_0) > 0$ και περιοχή $S(z_0, r) \subset V$ του $z_0$ τέτοια ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in S(z_0, r)$ και για κάθε $f \in \mathfrak{F}$.*

**Θεώρημα 8** *(Montel) Έστω $\mathfrak{F} = \{f : \Omega \to \mathbb{C}\}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων με $\Omega$ ανοικτό. Αν η $\mathfrak{F}$ είναι τοπικά φραγμένη στο $\Omega$, τότε η $\mathfrak{F}$ είναι κανονική στο $\Omega$.*

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό αποτέλεσμα, το οποίο ισχύει για μερόμορφες συναρτήσεις.

**Θεώρημα 9** *(Marty) Μια οικογένεια $\mathfrak{F}$ μερομορφικών συναρτήσεων σε ένα τόπο $\Omega$ είναι κανονική αν και μόνο αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset \Omega$, υπάρχει μια σταθερά $C = C(K)$ τέτοια ώστε για τη σφαιρική παράγωγο $f^\sharp(z) = \frac{f'(z)}{1+|f(z)|^2}$, να ισχύει $|f^\sharp(z)| \leq C$, $\forall z \in K, f \in \mathfrak{F}$.*

Απόδειξη: (Μπορείτε να βρείτε την απόδειξη αυτή στο [3].) Έστω ότι για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset \Omega$, υπάρχει μια σταθερά $C = C(K)$ τέτοια ώστε να ισχύει $|f^\sharp(z)| \leq C$, $\forall z \in K, f \in \mathfrak{F}$. Έστω $z_0 \in \Omega$ και $\bar{S}(z_0, r) \subset \Omega$. Για κάποιο $z \in \bar{S}(z_0, r)$, έστω $\gamma$ η ευθεία γραμμη που ενώνει τα $z, z_0$ στο $\bar{S}(z_0, r)$. Τότε ισχύει $\chi(f(z), f(z_0)) \leq \int_\gamma |f^\sharp(\zeta)||d\zeta|$. Άρα, έχουμε $\chi(f(z_0), f(z)) \leq C_1|z_0 - z|$ για κάποιο $C_1 = C_1(K)$ και κάθε $f \in \mathfrak{F}$. Όμως, γύρω από το $z_0$, η ευκλείδεια μετρική είναι ισοδύναμη με τη χορδική μετρική, δηλαδή $|z_0 - z| < C_2\chi(z_0, z)$ $\forall z \in \bar{S}(z_0, r)$. Συνεπώς, η $\mathfrak{F}$ είναι ισοσυνεχής με τη χορδική μετρική, και η $\mathfrak{F}$ είναι κανονική.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\mathfrak{F}$ είναι κανονική, αλλά έστω ότι υπάρχει συμπαγές $K \subset \Omega$, μια ακολουθία $\{z_n\}_n \subset K$ και μια ακολουθία $\{f_n\}_n \subset \mathfrak{F}$, τέτοια ώστε $f_n^\sharp(z_n) \to \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε, λόγω συμπάγειας του K, ότι $z_n \to z_0$ με $z_0 \in K$. Παίρνουμε μια υπακολουθία $\{f_{n_k}\}_k$ που συγκλίνει ομοιόμορφα χορδικά στο K σε κάποια $f$. Τότε, από το Θεώρημα 5, υπάρχει ένας κλειστός δίσκος $\bar{S}(z_0, r) \subset \Omega$ στον οποίο $f_{n_k} \to f$ ή $\frac{1}{f_{n_k}} \to \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα. Στην πρώτη περίπτωση, η $f$ είναι αναλυτική και φραγμένη στο $\bar{S}(z_0, r)$. Από το θεώρημα του Weierstrass, $f_{n_k}^\sharp \rightrightarrows f^\sharp$ στο $\bar{S}(z_0, r)$. Όμως, $f_{n_k}^\sharp(z_{n_k}) \to \infty$. Άρα και $f^\sharp(z_0) = \infty$, με το οποίο καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα, για κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$ υπάρχει $C = C(K)$ ώστε $|f^\sharp(z)| \leq C$ $\forall z \in K, f \in \mathfrak{F}$. Για την δεύτερη περίπτωση, ακολουθούμε το ίδιο σκεπτικό, έχοντας υπόψη ότι ισχύει $g^\sharp(z) = \left(\frac{1}{g(z)}\right)^\sharp$.

**Λήμμα 1** *Έστω $\mathfrak{F}$ μια οικογένεια μερόμορφων συναρτήσεων στο μοναδιαίο δίσκο, τέτοια ώστε όλες οι ρίζες των συναρτήσεων να έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη ή ίση με $l$ και όλοι οι πόλοι των συναρτήσεων να έχουν πολλαπλότητα μεγαλύτερη ή ίση με $j$. Έστω $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $-l < a < j$. Τότε η $\mathfrak{F}$ δεν είναι κανονική σε κάθε γειτονιά του $z_0 \in S(0,1)$ αν και μόνο αν υπάρχουν*

1. *$z_k \in S(0,1)$ με $z_k \to z_0$,*

2. *θετικοί αριθμοί $\rho_k$ με $\rho_k \to 0$ και*

*3. συναρτήσεις $f_k \in \mathfrak{F}$*

*τέτοια ώστε $\rho_k^{a+1} f_k(z_k + \rho_k \zeta) \rightrightarrows g(\zeta)$ χορδικά στα συμπαγή του $\mathbb{C}$, όπου $g$ είναι μη σταθερή, μερόμορφη συνάρτηση. Η $g$ μάλιστα μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να ισχύει $|g^\sharp(z)| \leq |g^\sharp(0)| = 1$.*

Θα κάνουμε μια σκιαγράφηση της απόδειξης του λήμματος για $a = 0$.
Έστω ότι η $\mathfrak{F}$ είναι κανονική και υπάρχουν τα 1-3 τέτοια ώστε να έχουμε $\rho_k^{a+1} f_k(z_k + \rho_k \zeta) \rightrightarrows g(\zeta)$ χορδικά στα συμπαγή του $\mathbb{C}$, με g μια μη σταθερή, μερόμορφη συνάρτηση. Επιλέγω $r$ τέτοιο ώστε για μεγάλα k να έχουμε $|z_k| \leq r < 1$. Από το Θεώρημα του Marty (θεώρημα 9), υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $max_{|z| \leq \frac{1+r}{2}} |f^\sharp(z)| \leq M$ για κάθε $f \in \mathfrak{F}$. Σταθεροποιώ $\zeta \in \mathbb{C}$. Για μεγάλα $k, |z_k + \rho_k \zeta| \leq \frac{1+r}{2}$, και $\rho_k |f_k^\sharp(z_k + \rho_k \zeta)| \leq \rho_k M$. Τότε, για όλα τα $\zeta \in \mathbb{C}, g^\sharp(\zeta) = lim \rho_k f_k^\sharp(z_k + \rho_k \zeta) = 0$. Άρα η g είναι σταθερή και έχουμε το άτοπο.
Αντίστροφα, αν η $\mathfrak{F}$ δεν είναι κανονική στο $S(0,1)$, από το Θεώρημα του Marty (θεώρημα 9), υπάρχουν $r'$, με $0 < r' < 1$, $z'_k$ στο $\{|z| < r'\}$ και $f_k \in \mathfrak{F}$ τέτοια ώστε $f_k^\sharp(z'_k) \to \infty$. Σταθεροποιούμε $r$,με $r' < r < 1$ και θέτουμε $M_k = max_{|z| \leq r} \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right) |f_k^\sharp(z)| = \left(1 - \frac{|z_k|^2}{r^2}\right) |f_k^\sharp(z_k)|$. Το μέγιστο υπάρχει αφού $f_k^\sharp$ συνεχής για $|z| < r$. Προφανώς ισχύει $M_k \geq \left(1 - \frac{|z'_k|^2}{r^2}\right) |f_k^\sharp(z'_k)| \to \infty$. Θέτουμε $\rho_k = \frac{1}{f_k^\sharp}(z_k)$ και έχουμε αυτά που θέλουμε.

Και τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα του Montel ή Θεμελιώδες κριτήριο Κανονικότητας, στην κάτωθι διατύπωση:

**Θεώρημα 10** *Μια οικογένεια $\mathfrak{F}$ μερομορφικών συναρτήσεων που δεν παίρνει τρεις τιμές $a, b, c \in \tilde{\mathbb{C}}$, σε ένα τόπο $D \subset \mathbb{C}$, είναι κανονική οικογένεια στο $D$.*

Απόδειξη: Μπορούμε να θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας και με απλούς γραμμικούς μετασχηματισμούς, ότι παραλείπονται οι τιμές $0, 1, \infty$. Επίσης μπορούμε να περιοριστούμε στο μοναδιαίο δίσκο, αφού, όπως είδαμε στο Θεώρημα 4, η κανονικότητα είναι τοπική έννοια.
Θέτουμε $\mathfrak{F}_n = \{\sqrt[n]{f} : f \in \mathfrak{F}\}$. Τότε, η $\mathfrak{F}_n$ είναι μια οικογένεια συναρτήσεων στο $S(0,1)$ που δεν παίρνουν τις τιμές $0, \infty$ και όλες τις n-οστές ρίζες της μονάδας.

Έστω τώρα ότι η $\mathfrak{F}$ δεν είναι κανονική. Τότε, καμιά από τις $\mathfrak{F}_n$ δεν είναι κανονική. Από το Λήμμα 1, έχουμε για κάθε $n$, μια μη σταθερή, ακέραια συνάρτηση $g_n$ που είναι το όριο συναρτήσεων που δεν παίρνουν τις τιμές $S_n = \{0, 1, e^{\frac{2\phi ik}{n}}, k = 0, 1, ..., n-1\}$. Από το πόρισμα 1, ούτε η $g_n$ παίρνει τις τιμές $S_n$. Επιπλέον, από το Λήμμα 1, ισχύει $|g_n^\sharp(z)| \leq |g^\sharp(0)| = 1$.
Συμβολίζουμε με $T_n = S_{2^n}, G_n = g_{2^n}$ και εξεταζουμε την οικογένεια $\mathfrak{G} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$, που ορίζεται στο $\mathbb{C}$. Ισχύει $|G_n^\sharp(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{C}$, άρα από το θεώρημα του Marty, (Θεώρημα 9), η $\mathfrak{G}$ είναι κανονική στο $\mathbb{C}$. Άρα έχουμε χορδικά συγκλίνουσα υπακολουθία σε μια οριακή συνάρτηση G. Αφού $|G_n^\sharp(0)| = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|G^\sharp(0)| = 1$ και η G δεν είναι σταθερή. Η ακολουθία συνόλων $T_n$ είναι αύξουσα, άρα η $G_m$ δεν παίρνει τιμές από το $T_n$ αν $m \geq n$. Από το Πόρισμα 1 και πάλι, έχουμε ότι η G δεν πρέπει να παίρνει τιμές από το $T_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Αφού το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ είναι πυκνό στο μοναδιαίο κύκλο, και το σύνολο $G(\mathbb{C})$ είναι ανοικτό και συνεκτικό, συμπεραίνουμε ότι $G(\mathbb{C}) \subset S(0,1)$ ή $G(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} - S(0,1)$. Και στις δυο περιπτώσεις έχουμε άτοπο, από το Θεώρημα του Liouville (Θεώρημα 1).

# 6 Βιβλιογραφία


1. Fisher, Stephen D., *Complex Variables*, Dover puplications, New York (1986).
2. Ευαγγελάτου - Δάλλα, Λεώνη, *Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών (2000).
3. Schiff, Joel L., *Normal Families*, Springer - Verlag (1993).
4. Γκραικιώτη, Αναστασία, *Το θεώρημα του Montel*, Εργασία για το μάθημα Γεωμετρία των Fractal (2004-2005).
5. L. Zalcman, *Normal families: new perspectives*, Bull. Amer. Math. Soc., 35 (1998), 215-230.