ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ FRACTAL
ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ : ΛΕΩΝΗ ΕΥΑΓΓΕΛΑΤΟΥ - ΔΑΛΛΑ

ΘΕΜΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΤΑ FRACTAL ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΟΝΟΜΑΤΟΕΠΩΝΥΜΟ : ΜΑΡΙΑ ΑΘ. ΟΡΦΑΝΙΔΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ : 993302

Περιεχόμενα

σελίδα

πρόλογος 3

Ενότητα 1
Κατανόηση βασικών εννοιών των fractals από τους μαθητές. 4

Ενότητα 2
Τα fractals και το άπειρο. 8

Ενότητα 3
Μαθηματικό υπόβαθρο των fractals. 10

Βιβλιογραφία 12

Πρόλογος

Τα σύννεφα δεν είναι σφαιρικά,
τα βουνά δεν είναι κωνικά,
οι ακτές δεν είναι κυκλικές,
ο φλοιός δεν είναι λείος,
ούτε το φως ταξιδεύει ευθύγραμμα.
Mandelbrot

Τα γνωστά μαθηματικά αντικείμενα, ευθείες τρίγωνα, κύκλοι, στερεά πολύ λίγο μοιάζουν με το φυσικό κόσμο που μας περιβάλλει. Αδυνατούν να τον περιγράψουν. Την αδυναμία αυτή καλύπτει η γεωμετρία των fractals. Ασχολείται με τη δομημένη μη κανονικότητα του φυσικού κόσμου. Τα βουνά οι ακτές, τα σεληνιακά τοπία, ο πνεύμονας, τα φυτά κ. ά. προσεγγίζονται ικανοποιητικά από τα μαθηματικά fractals και με τη βοήθεια αυτών αναπαριστάνονται τεχνητά μέσω υπολογιστή. Τόσο τα φυσικά όσο και τα μαθηματικά fractals χαρακτηρίζονται από μία ακολουθία επαναλήψεων της ίδιας της δομής τους, φαινόμενο που ονομάστηκε αυτοομοιότητα, ενώ η διάσταση τους λόγω της μη κανονικότητας τους δεν είναι συνήθως ακέραιος αριθμός. Η γεωμετρία των fractals δεν περιγράφει μόνο αλλά συμβάλλει στη παραπέρα βαθύτερη γνώση της φύσης αλλά και στην πρόβλεψη φαινομένων. Με τη γεωμετρία αυτή αποκτάται μια άλλη αντίληψη του φυσικού κόσμου.

Κάτω από τη σκιά αυτής της οπτικής γεννάται το ερώτημα αν είναι επίκαιρη η συζήτηση για την εισαγωγή της συγκεκριμένης θεωρίας στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Μια συζήτηση που μέλλει να συνεχιστεί για τα επόμενα χρόνια καθώς θα πρέπει να αποσαφηνιστούν οι στόχοι ενός τέτοιου εγχειρήματος, ο τρόπος υλοποίησης , το υπόβαθρο γνώσεων των μαθητών και η ανταπόκριση τους στην νέα αυτή θεωρία.

Στην παρούσα εργασία τίθεται ο προβληματισμός σχετικά με την πιθανή υλοποίηση ενός τέτοιου εγχειρήματος.

- Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζζυται μια εργασία που αφορά την ανταπόκριση των μαθητών σε έννοιες, όπως η αυτοομοιότητα και η επαναληπτικότητα ενός κανόνα και ο βαθμός κατανόησης τους.
- Η δεύτερη ενότητα αφορά μια πρόταση συσχετισμού των γνώσεων του μαθητή από τα παραδοσιακά μαθηματικά με διαδικασίες που απαντώνται στη fractal θεωρία κια συγκεκριμένα του κανόνα της επαναληπτικότητας.
- Στην τρίτη ενότητα γίνονται αναφορές σχετικά με το μαθηματικό υπόβαθρο της νέας θεωρίας και τα πλαισία μέσα στα οποία μπορούν να εισαχθούν οι έννοιες αυτές.

Ενότητα 1
Κατανόηση βασικών εννοιών των fractals από τους μαθητές

Η παρακάτω έρευνα διεξήχθει από την Barbara Naujack, υποψήφια για τις εξετάσεις απόκτησης πτυχίου διδασκαλίας στο Γυμνάσιο. Ασχολήθηκε με την δυνατότητα των μαθητών κατανόησης αυτοόμοιων αντικειμένων και την διδασκαλία τους στο σχολείο (μεγαλύτερες τάξεις του Γυμνασίου).

Οι στόχοι της έρευνας επικεντρώθηκαν σε δύο σημεία. Κατά πρώτον αν μπορούσαν οι μαθητές να αναγνωρίσουν την ιδιότητα της αυτοομοιότητας τόσο σε πραγματικά όσο και σε μαθηματικά αντικείμενα είτε από μόνοι τους ή με τη βοήθεια του ερευνητών και ποιά ήταν τα στοιχεία τα οποία βοηθούσαν στην κατανόηση της έννοιας αυτής. Ο δεύτερος στόχος αφορούσε τη δυνατότητα κατανόησης της αυτοομοιότητας μέσω της Koch καμπύλης και την κατανόηση μιας επαναληπτικής εφαρμογής ενός απλού κανόνα που οδηγεί σε σύνθετα, πιο πολύπλοκα αντικείμενα.

Οργάνωση της έρευνας

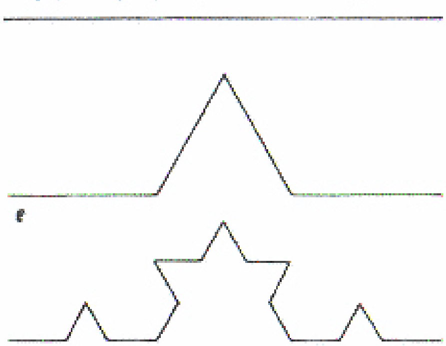
Τα ερωτήματα στα οποία η έρευνα θα έδινε απαντήσεις είναι τα παρακάτω:

1. Μπορούν οι μαθητές διαισθητικά να αναπτύξουν μια ιδέα για τα fractals αν τους δοθεί η δυνατότητα;
2. Μπορούν να κατανοήσουν την επιστημονική περιγραφή ενός fractals αντικειμένου και ποιές είναι οι διαδικασίες μάθησης;
   Η δεύτερη ερώτηση αναλύθηκε σε δύο υποερωτήσεις:
   α) Είναι δυνατή η μάθηση της έννοιας της αυτοομοιότητας και εφαρμογή της γνώσης αυτής;
   β) Είναι δυνατή η μάθηση απλών κανόνων για την περιγραφή σύνθετων αντικειμένων καθώς και εφαρμογή της γνώσης αυτής;

Η έρευνα έγινε σε 18 μαθητές της 10ης τάξης του γερμανικού Γυμνασίου, ηλικίας 15-16 ετών, οι οποίοι έλαβαν μέρος στην έρευνα, εξεταζόμενοι όπου χρειαζόταν σε ομάδες των δύο ή τριων ατόμων.Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε τρία στάδια.

Πρώτο στάδιο:
Δόθηκαν 14 φωτογραφίες (ακολουθούν στο τέλος)με διάφορα αντικείμενα φυσικά ή μαθηματικά Fractals. Οι φωτογραφίες έπρεπε να ταξινομηθούν με κριτήριο αν παρουσίαζαν ομοιότητα ως προς τη δομή τους . Γνώσεις των μαθητών για τη χρήση αυτών των αντικειμένων δεν έπρεπε να ληφθούν υπόψη. Οι επιλογές των μαθητών έπρεπε να δικαιολογηθούν και να κατονομαστούν τα κοινά σημεία.

Δεύτερο στάδιο:
Ανοίχθηκε ένα κουνουπίδι και ζητήθηκε από τους μαθητές να αναλυθεί γραπτώς η κατασκευή και η δομή του. Στη συνέχεια δόθηκε φύλλο εργασίας όπου υπήρχαν τα τρία βήματα της Koch καμπύλης και ζητήθηκε από τους μαθητές το τέταρτο βήμα της καμπύλης καθώς και ο κανόνας σχηματισμού.
Σε περίπτωση δυσκολίας συζητιούνταν οι αλλαγές με τη ερευνήτρια ή δίνονταν ο κανόνας σχηματισμού. Αφού γινόταν



κατανοητός ο τρόπος σχηματισμού δίνονταν τότε μια εικόνα του 16ου βήματος της καμπύλης Koch και οι μαθητές έπρεπε να βρουν μετά από πόσα βήματα κατασκευής σχηματιζόταν η καμπύλη.
Ακολουθούσε συζήτηση για τις ομοιότητες και διαφορές μεταξύ του κουνουπιδού και της Koch καμπύλης.

Τρίτο στάδιο:
Στο τρίτο μέρος της έρευνας οι μαθητές αξιολογούσαν τις φωτογραφίες του πρώτου μέρους με βάση τα κριτήρα ομοιότητας που έμαθαν. Τους δίνονταν ακόμα δύο εικόνες ενός πνεύμονα και ένα σύμπλοκο σωματιδίων DLA και ζητιόταν να εξετασθούν ως προς την αυτοομοιότητα.

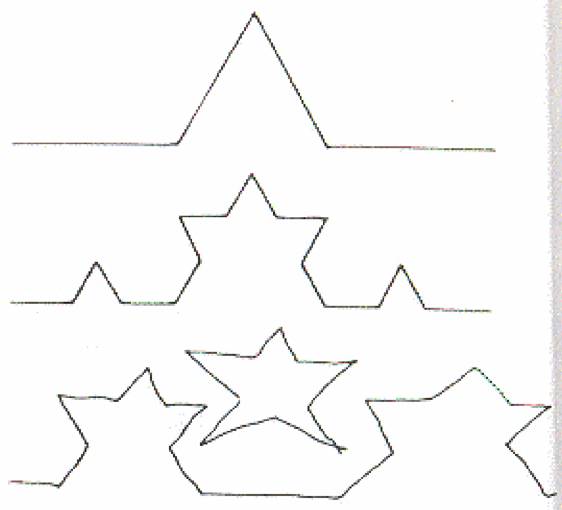
Αξιολόγηση των σταδίων της έρευνας.

Πρώτο στάδιο
Κατά την εργασία της ταξινόμησης οι μαθητές χρησιμοποιούσαν διάφορα κριτήρια κατάταξης, όπως του γεωμετρικού σχήματος, της κατηγορίας, και των ιδιοτήτων των αντικειμένων. Η ερευνήτρια θέλοντας να κατευθύνει την προσοχή τους στην δομή των αντικειμένων και όχι στο σχήμα και τις ιδιότητες τους διατύπωνε την ερώτηση της ως εξής : «ποια αντικείμενα μοιάζουν να είναι ίδια ως προς τη δομή;» Συνήθως η κατάταξη των φωτογραφιών γινόταν με βάση τα παρακάτω κριτήρια:

- τις 5 και 11 σύμφωνα με την ιδιότητα του σταυρού που παρουσιάζονταν στα δύο αντικείμενα.
- τις 3,4,9 και 10 σύμφωνα με το κριτήριο της διακλάδωσης, το οποίο δεν αναγνωρίζονταν αμέσως, αλλά μετά από συζήτηση και τότε κατατάσονταν και το 11.
- τις 6 και 7 ως μοτίβα ζώων
- τις 1,2 και 8 ως γεωμετρικές φιγούρες
- και τις 12 και 13 ως φιγούρες κυμάτων.

Δεύτερο στάδιο
α. Η πολυμερής διακλάδωση του κουνουπιδιου ήταν ένα χαρακτηριστικό που γρήγορα κατανοήθηκε είτε με την βοήθεια των ερευνητών είτε χρησιμοποιήθηκε από τα ίδια τα παιδιά για την περιγραφή του. Μερικά από τα παιδιά μπορούσαν να δώσουν και τον τρόπο κατασκευής του, ο χοντρός κορμός που διακλαδίζεται σε κοτσάνια, τα κοτσάνια σε κλαδιά, τα κλαδιά παραπέρα και ούτω καθεξής. Στα παιδιά ήταν κατανοητό πως από την εφαρμογή ενός κανόνα οδηγούμαστε σε πιο σύνθετη μορφή. Έκαναν σκέψεις και πόσα βήματα χρειάζονταν να εφαρμοστούν για να καταλήξουν στη μορφή αυτή, δεν αναφέρθηκε αριθμός, ήταν κατανοητό ότι η διαδικασία συνεχίζονταν χωρίς να είναι ορατή με γυμνό μάτι. Η αυτοομοιότητα δεν ήταν δυνατό να περιγραφεί ξεκάθαρα και δεν χρησιμοποιήθηκε ως κριτήριο στην περιγραφή.
β. Αρκετές δυσκολίες παρουσιάστηκαν με το φύλλο εργασίας της καμπύλης Koch. Μόνο δύο μαθητές έφτασαν στο σωστό σχήμα κατά το τέταρτο βήμα και ήταν σε θέση να περιγράψουν και την διαδικασία. Με τους υπόλοιπους μαθητές έγινε συζήτηση και εξηγήθηκε η διαδικασία των τριών πρώτων βημάτων. Τότε ήταν σε θέση να κάνουν την καμπύλη στο επόμενο βήμα.
Οι υποθέσεις για την αποτυχία των μαθητών στην κατασκευή της καμπύλης εστιάζονται σε δύο σημεία :

Πρώτον πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές την εικόνα που βλέπουν. Στα τρία πρώτα βήματα ήταν ξεκάθαρο ότι επρόκειτο για κορυφές που σχηματίζονταν από ευθείες γραμμές. Γι' αυτό η παρουσία των κορυφών αυτών ήταν ισχυρή.



Σ' άλλες περιπτώσεις ήταν διάχυτη η εντύπωση ότι έπρεπε να υπάρχει ένας σκοπός, δηλ. με την εφαρμογή της διαδικασίας να καταλήγουν σε κάτι συγκεκριμένο. Στη φωτογραφία φαίνεται η προσπάθεια μιας μαθήτριας, η οποία θεωρεί ότι κλείνει το μεσαίο μέρος της καμπύλης για να σχηματιστεί ένα αστέρι.

Στη συνέχεια της έρευνας ζητήθηκε από τα παιδιά να βρούν ποιο ήταν το βήμα του σχήματος 12. Μερικά από αυτά προσπαθούσαν να μετρήσουν τις κορυφές και να βρουν ένα μαθηματικό τύπο, χωρίς επιτυχία. Το ερώτημα αυτό δεν απαντήθηκε από κανέναν σωστά. Στην ερώτηση ποιό θα ήταν το σχήμα της καμπύλης αν θα εφαρμόζαμε πολλές φορές τον κανόνα πέντε από τους μαθητές κατάλαβαν ότι θα οδηγούσε σε ένα σχήμα όπου η καμπύλη θα εξομαλυνόταν, θα γινόταν λεία.

γ. Η ομοιότητα ανάμεσα στο κουνουπίδι και την καμπύλη Koch αναγνωρίστηκε από τους μαθητές, οι οποίοι είχαν περισσότερο προβλήματα στο να εκφραστούν. Έτσι το κουνουπίδι διακλαδιζόταν ενώ στην καμπύλη Koch προστίθονταν συνεχώς νέες κορυφές. Μόνο σε μία περίπτωση αναφέρθηκε ότι και τα δύο αντικείμενα δημιουργούνται με βάση ένα συγκεκριμένο κανόνα. Η αυτοομοιότητα εξηγήθηκε από τους ερωτηθέντες με βάση τη σύγκριση. Έπαιρναν κομμάτια από την καμπύλη και όλη την καμπύλη ή ένα κλαδί από το κουνουπίδι και το έβαζαν διπλά σε όλο το κουνουπίδι. Σε γενικές γραμμές ήταν δύσκολο να αναγνωριστεί η αυτοομοιότητα χωρίς την βοήθεια της ερευνήτριας.

Μια μαθήτρια παρατήρησε ότι ένα κομμάτι της καμπύλης περιέχει λιγότερες κορυφές απ' ότι όλη η καμπύλη. Άλλη μαθήτρια είχε όμως προβλήματα γιατί περίμενε να δει την εικόνα όλης της καμπύλης σε ένα κομμάτι της καμπύλης. Αξιοσημείωτο είναι ότι δεν αναφέρθηκε κάτι ανάλογο για το κουνουπίδι και ίσως αυτό δείχνει την καλύτερη αντίληψη των εννοιών αυτών σε φυσικά αντικείμενα.

Τρίτο στάδιο

Στο τρίτο μέρος οι μαθητές μπόρεσαν να ταξινομήσουν σωστά τις εικόνες. Σε μερικές περιπτώσεις υπήρχε σύγχυση ανάμεσα στην διακλάδωση και την αυτοομοιότητα. Έτσι η εικόνα 14 επειδή δεν παρουσίαζε διακλάδωση δεν χαρακτηριζόταν ως αυτοόμοιη.

Στη συνέχεια κατά την παρουσίαση δύο νέων εικόνων, ο πνεύμονας αναγνωρίστηκε ως αυτοόμοιος ενώ το σύμπλοκο σωματιδίων DLA όχι σαν σύνολο, μόνο στα κλαδιά του.

Συμπεράσματα

- Οι μαθητές δεν διαθέτουν μια διαισθητική ικανότητα αναγνώρισης των fractals αντικειμένων. Επικεντρώνουν την προσοχή τους κατά την ανάλυση της δομής σε άλλα χαρακτηριστικά των αντικειμένων.
- Η αυτοομοιότητα είναι μια έννοια που δύσκολα αναγνωρίζεται από τους μαθητές. Μπορούν να την κατανοήσουν και να την εφαρμόσουν αφού τους εξηγηθεί. Υπάρχουν όμως προβλήματα αναγνώρισης και επιλογής κάθε φορά του μέρους εκείνου που είναι αυτοόμοιο με το αρχικό αντικείμενο.
- Η επαναληπτική εφαρμογή ενός κανόνα και η δημιουργία κατά αυτό τον τρόπο πολύπλοκων αντικειμένων ήταν εύκολη εργασία για τους μαθητές. Προβλήματα κατά την εφαρμογή στην καμπύλη Koch μπορούν να ερμηνευθούν και να εξηγηθούν από τον τρόπο που οι μαθητές παρατηρούν τα αντικείμενα.

Κριτική

Ο βαθμός κατανόησης των δύο βασικών εννοιών των fractals της αυτοομοιότητας και της επαναληπτικότητας είναι διαφορετικός. Μαθητές κατανοούν ότι με την εφαρμογή ενός απλού κανόνα δημιουργούνται σύνθετα αντικείμενα. Η μη κατανόηση της αυτοομοιότητας στην συγκεκριμένη έρευνα μπορεί να οφείλεται αφενός στην επιλογή των αντικειμένων στις φωτογραφίες και αφετέρου στην ίδια την ερώτηση, το λεκτικό περιεχόμενο της, το οποίο δημιουργεί ασάφειες και δυσκολίες. Η προσοχή τους εστιάζεται σε άλλες ιδιότητες των αντικειμένων. Η σημασία της λέξης δομή στην ερώτηση της ερευνήτριας ίσως να μην είναι κατανοητή.

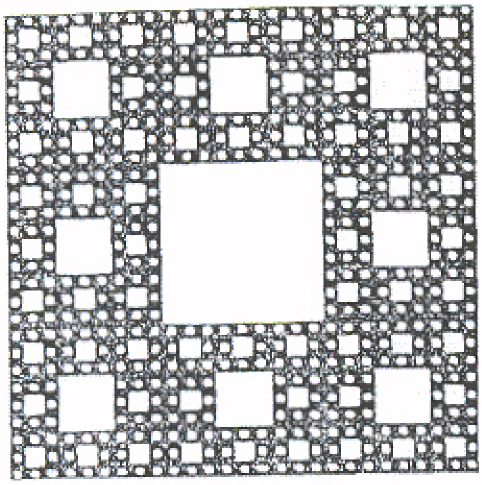


Abb. 1: Menger-Teppich

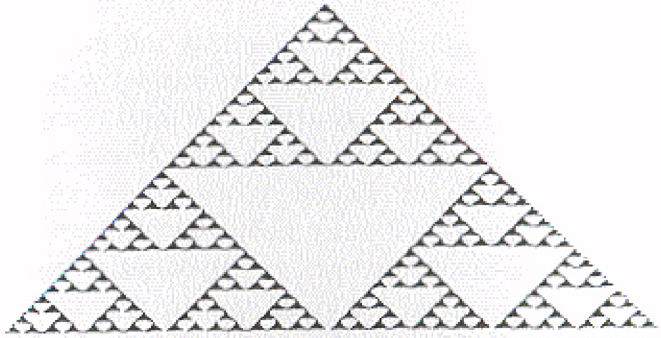


Abb. 2: Sierpinski-Dreieck

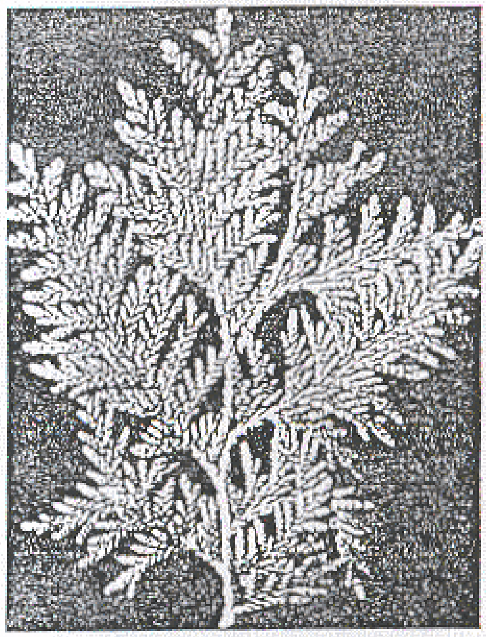


Abb. 3: Blatt eines Lebensbaumes

Abb. 4: Barnsley-Farn

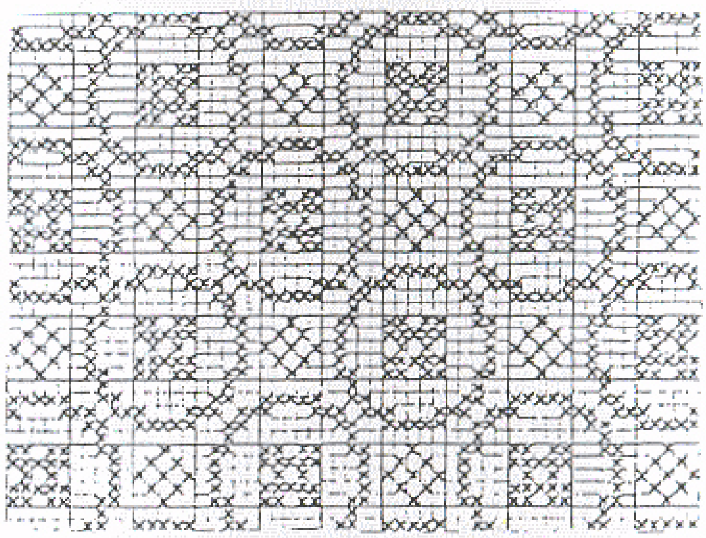


Abb. 5: Stickmuster

Abb. 6: Zeichnung von M. C. Escher

Abb. 7: Zeichnung von M. C. Escher

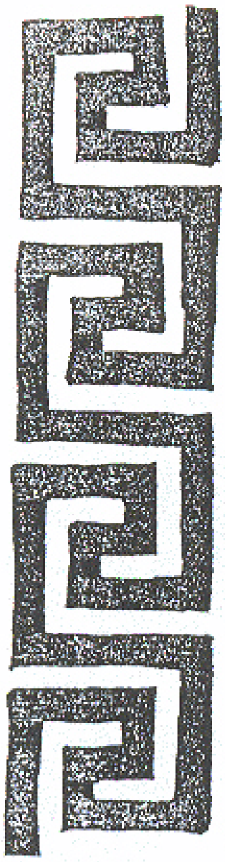


Abb. 8: Mäander-Muster

Abb. 9: Photographie eines Blumenkohls

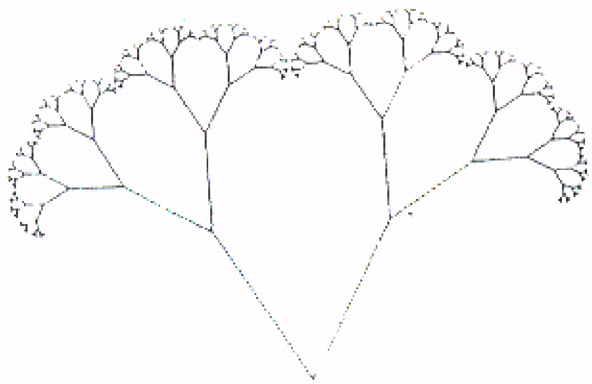


Abb. 10: Dentritische Baumkonstruktion

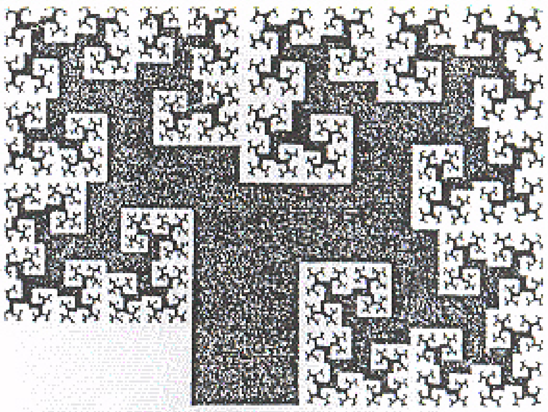


Abb. 11: Dendritische Baumkonstruktion

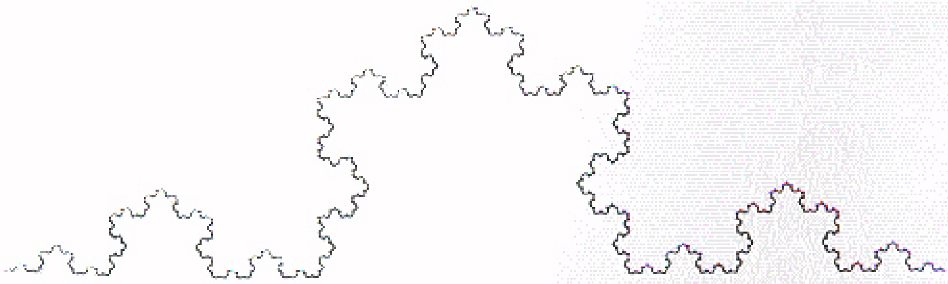


Abb. 12: Koch-Kurve

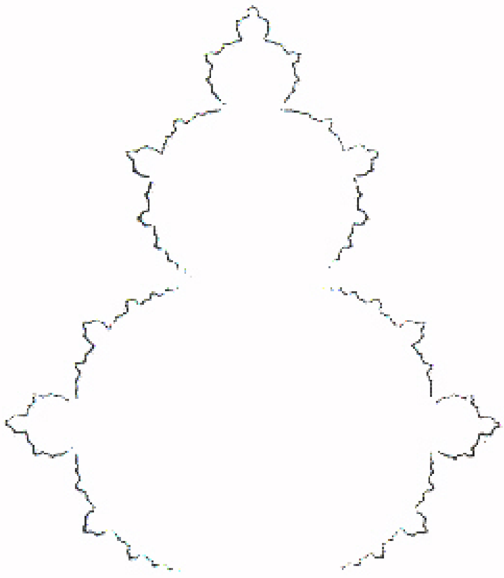


Abb. 13: Julia-Menge

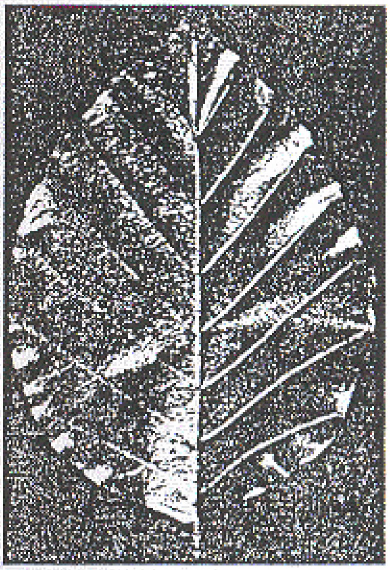


Abb. 14: Buchenblatt

Ενότητα 2
Τα fractals και το άπειρο.

Η κανονικότητα και η πολυπλοκοτητα ειναι τα βασικά χαρακτηριστικα των fractals. Η κανονικότητα στηρίζεται στην αυτοομοιότητα ενώ η πολυπλοκότητα τους στην επαναληπτική εφαρμογή του κανόνα κατασκευής τους.
Οι διαδικασίες που παράγουν τα fractals είναι κατά άπειρο τρόπο επαναληπτικές. Δηλ. θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι τα γεωμετρικά αυτά αντικείμενα είναι οι οριακές φιγούρες ενός άπειρα εφαρμόσιμου κανόνα. Αν κατανοηθεί αυτή η βασική ιδέα της ατέρμονης διαδικασίας στα fractals τότε είναι δυνατή και η κατανόηση της αυτοομοιότητας.

Ένας τρόπος σύνδεσης της πολυπλοκότητας των fractals με το άπειρο μπορεί να γίνει μέσω παραδειγμάτων που είναι γνωστά στους μαθητές. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί και η προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{2}$.

Ο αριθμός αυτός με τη βοήθεια μικρουπολογιστή είναι ο 1,414213562 και ορίζεται με την ιδιότητα ότι το τετράγωνο αυτού είναι ο αριθμός 2. Προσεκτικοί μαθητές παρατηρούν ότι το τετράγωνο ενός αριθμού με 9 δεκαδικά ψηφία θα έπρεπε να έχει 18 δεκαδικά ψηφία μετά τον τετραγωνισμό, ενώ θα έπρεπε το τελευταίο ψηφίο να είναι 4. Αυτό σημαίνει ότι κανένας δεκαδικός δεν προσεγγίζει ακριβώς την ιδιότητα, το τετράγωνο του $\sqrt{2}$ είναι 2. Η διαδικασία για την εύρεση του δεκαδικού δίνεται από τον τύπο Ήρωνα

$$\chi_n = \frac{1}{2}(\chi_n + \frac{2}{\chi_n}) .$$

Ο τύπος είναι αναδρομικός και αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση των άρρητων με ρητούς αριθμούς. Για τους μαθητές είναι κατανοητό ότι ο αριθμός προσεγγίζεται ικανοποιητικά και αποτελεί τη λύση της εξίσωσης $\chi^2 = \chi$.

Έτσι και για τα fractals αντικείμενα ορίζεται ένα επαναλαμβανόμενο σύστημα του οποίου η μορφή προσεγγίζει ικανοποιητικά μια σειρά από φυσικά αντικείμενα. Για το τρίγωνο του Sierpinski π.χ. το σύστημα αυτό δίνεται

$$X_{n+1} = W_1(X_n) \cup W_2(X_n) \cup W_3(Xn)$$

όπου X_n ένα σύνολο σημείων του χώρου. Το όριο της ακολουθίας αυτής είναι το τρίγωνο Sierpinski δηλ. είναι το σταθερό σημείο της εξίσωσης

$$X = W_1(X) \cup W_2(X) \cup W_3(X) .$$

Ακολουθεί ένας συγκεντρωτικός πίνακας των παραπάνω όπου φαίνεται η αντιστοιχία των διαφόρων εννοιών:

	fractals	**Γνωστές μαθηματικές έννοιες**
Παράδειγμα	τρίγωνο Sierpinski	$\sqrt{2}$
ιδιότητα	αυτοομοιότητα	$\chi^2 = \chi$
Αποτέλεσμα	εικόνα του τριγώνου	ρητή προσέγγιση ρίζας
μέθοδος	αναδρομική διαδικασία κατασκευής $X_{n+1} = W_1(X_n) \cup W_2(X_n) \cup W_3(Xn)$	μέθοδος του Ήρωνα $\chi_{n+1} = \frac{1}{2}(\chi_n + \frac{2}{\chi_n})$
εξίσωση σταθερού σημείου	$X = W_1(X) \cup W_2(X) \cup W_3(X)$	$\chi = \frac{1}{2}(\chi + \frac{2}{\chi})$

Συμπέρασμα

Είναι χρήσιμο να γίνεται αυτή η αντιπαραβολή, όπου φαίνεται καθαρά η αντιστοιχία ανάμεσα στις μεθόδους και τρόπους από γνωστές για τους μαθητές έννοιες και στα fractals. Πρέπει να βρεθούν τα παραδείγματα εκείνα, μέσα από την προϋπάρχουσα γνώση των παιδιών κατά την φοίτηση τους στο σχολείο και την εμπειρία των παιδιών μ' αυτά και να γίνει αντιπαραβολή των διαδικασιών είτε προς τη μία κατεύθυνση είτε προς την άλλη. Η μέθοδος αυτή αφενός συνεισφέρει στην χρησιμοποίηση της υπάρχουσας γνώσης και τη στερέωση της και αφετέρου συμβάλει στην κατανόηση της αυτοομοιότητας.

Ενότητα 3
Μαθηματικό υπόβαθρο των fractals

Οι βασικές μαθηματικές έννοιες που βρίσκονται στο θεωρητικό υπόβαθρο της διδασκαλίας των fractal επικεντρώνονται σε δύο σημεία, στη διδασκαλία της αυτοομοιότητας και της διάστασης.

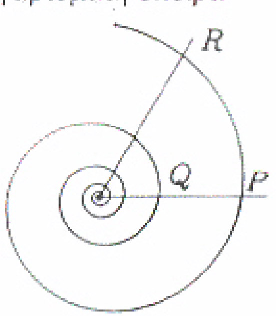
Αυτοομοιότητα

Ορισμός: Αυτοόμοια χαρακτηρίζονται τα αντικείμενα, των οποίων κάθε κομμάτι μιας μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης του ίδιου αντικειμένου είναι ίδιο με το αρχικό.
Ιδιότητες:
- Φαίνονται όμοια σε πολλές διαφορετικές κλίμακες.
- Παρουσιάζεται η ίδια δομή μέσω διαδοχικών επαναληπτικών μεγεθύνσεων.

Μπορούν να δοθούν κι άλλοι ορισμοί, οι οποίοι θα χρησιμοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες. Θα πρέπει να διατυπωθεί ο ορισμός έτσι ώστε να είναι κατά το μέγιστο κατανοητός από τους μαθητές. Ένα βασικό εργαλείο κατανόησης αποτελούν και τα παραδείγματα. Η επιλογή είναι αρκετά μεγάλη, μπορούν να επιλεγούν τόσο μαθηματικά όσο και φυσικά αντικείμενα. Στα μαθηματικά μοντέλα κρίνεται εύλογο να συσχετιστούν με φυσικά αντικείμενα που παρουσιάζουν ικανοποιητικά αυτή τη δομή του μαθηματικού αντικειμένου.

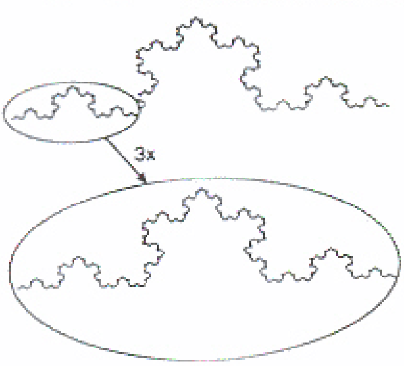
Παραδείγματα

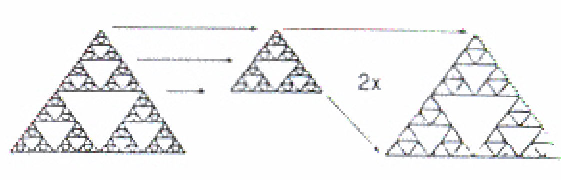
Λογαριθμική σπείρα

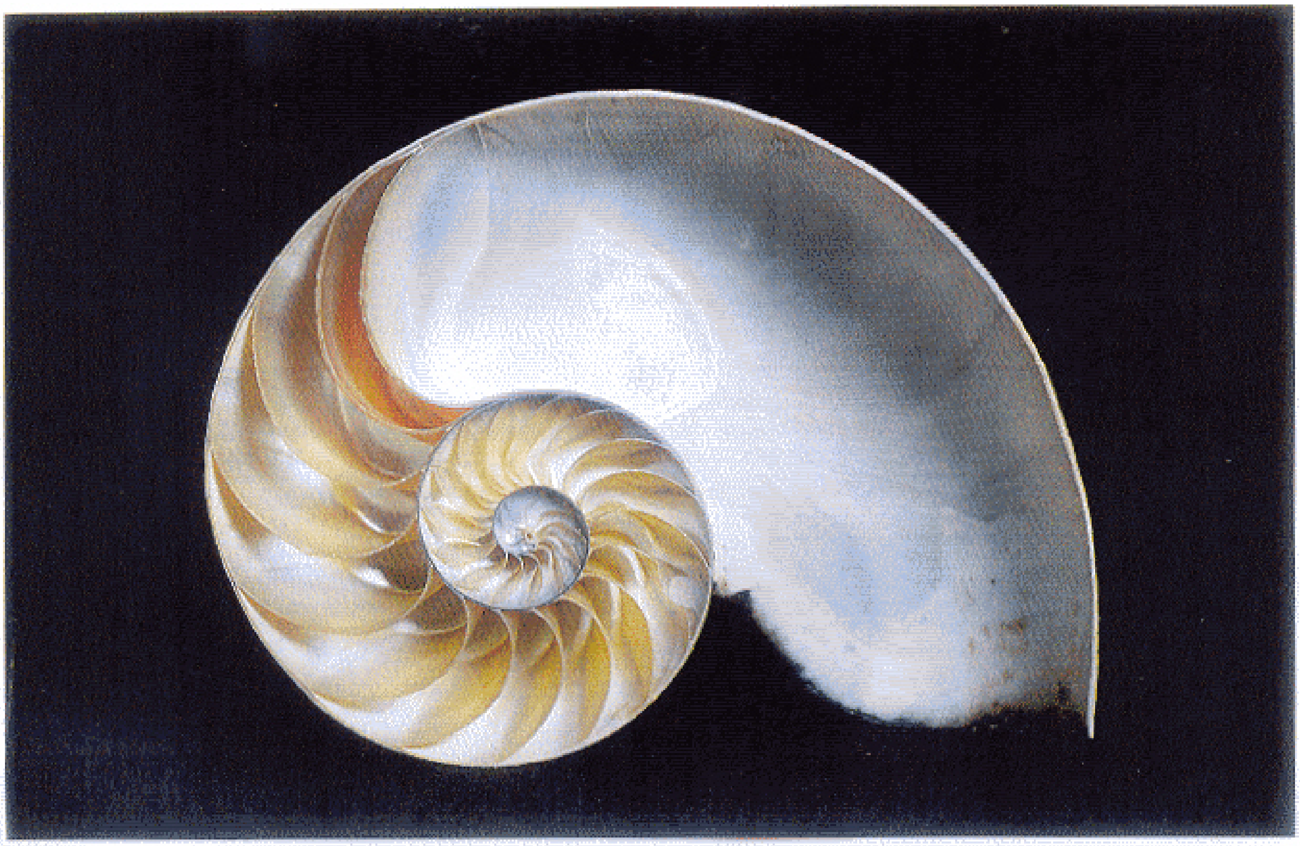


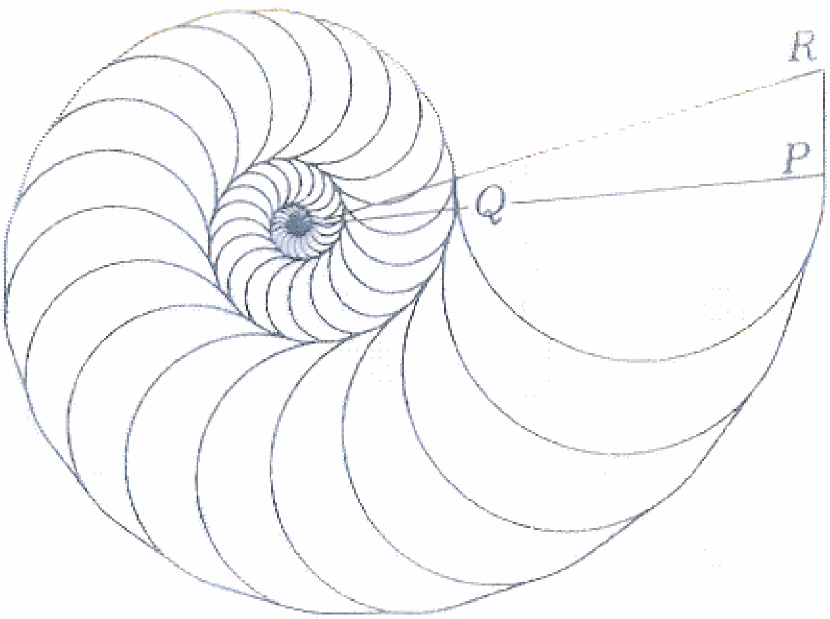
Κατασκευάζεται από την εξίσωση $r(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$ όπου $\varphi \in \Re$, $\alpha = \sigma\varphi\omega$. Ο λόγος των ακτίνων κάθε φορά των δακτυλίων είναι σταθερός, οι ακτίνες αποτελούν όρους Γ.Π.

Παραδείγματα λογαριθμικης σπείρας στη φύση συναντάμε στο κέλυφος συγκεκριμμένου είδους σαλιγκαριού ή στους σπόρους του φυτού ήλιος. (βλ. επόμενη σελίδα.)
Η αυτοομοιότητα είναι μια δύσκολη έννοια. Μαθητές έχουν δυσκολίες με την αναγνώρισης της ίδιας δομής κατά την μεγέθυνση ενός τμήματος του αντικειμένου, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα της καμπύλης Koch και του τριγώνου Sierpinski. Η αδυναμία του υπολογιστή να δείξει την ατέρμονη διαδικασία των επαναληπτικών διαδικασιών οδηγεί σ' αυτή την παρανόηση.








R
P
Q