

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΡΜΙΤΙΑΝΕΣ FRACTAL ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

ΚΑΙ IFS ΣΕ ΣΥΝΟΛΑ, ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ.

ΜΑΡΙΑ ΚΩΣΤΑΚΗ-ΚΩΣΤΑ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
2007

Περιεχόμενα

1	Κατασκευή Fractal συνόλων	7
1.1	Fractal Σύνολα	7
1.2	Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (Σ.Ε.Σ.)	9
1.2.1	Αλγόριθμοι Κατασκευής Ελκυστών ΣΕΣ	10
1.3	Περιοδικά Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΠΣΕΣ)	13
1.3.1	Ύπαρξη Ελκυστή ΠΣΕΣ	15
2	Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής	19
2.1	Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής με Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων	19
2.1.1	Αυτοσυσχετισμένες Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής με ΣΕΣ	21
2.1.2	Box Διάσταση	21
2.2	Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής με Περιοδικά Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων	23
2.2.1	Κατά τμήματα Αυτοσυσχετισμένες Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής με ΠΣΕΣ	25
2.2.2	Στοχαστικός Πίνακας, Πίνακας και Διάνυσμα Σύνδεσης	27
2.3	Διαφορίσιμες Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής	30
2.4	Ερμιτιανά Πολύωνυμα	33
2.5	Περιοδικές Ερμιτιανές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής (Hermite Recurrent Fractal Interpolation Functions, HRFIF)	34
2.5.1	Κυβικές Περιοδικές Ερμιτιανές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής	35
3	FRACTAL ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ	39
3.1	Bivariate Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής σε Ορθογώνιο Πλέγμα με Χρήση ΠΣΕΣ	40
3.2	Κατασκευή Fractal Επιφανειών Παρεμβολής με την χρήση Περιοδικών Fractal Συναρτήσεων Παρεμβολής	45

3.3	Κατασκευή Hermite Fractal Επιφανειών Παρεμβολής με την χρήση Fractal Συναρτήσεων Παρεμβολής	49
4	Προγράμματα σε Matlab	53
4.1	Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων	53
4.2	Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων	54
4.3	Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων για ΠΣΕΣ	55
4.4	Κατασκευή αυτοσυσχετισμένης FΣΠ	56
4.5	Κατασκευή κατά τμήματα συσχετισμένης FΣΠ	57
4.6	Κατασκευή κατά τμήματα συσχετισμένης Hermite FΣΠ	58
4.7	Bivariate Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής σε Ορθογώνιο Πλέγμα	60
4.8	Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής από Περιοδικές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής	61
4.9	Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής από Περιοδικές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής	62
4.10	C^1 Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής από Ερμιτιανές-Περιοδικές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής	63
	Ξένη Βιβλιογραφία	67
	Ελληνική Βιβλιογραφία	69

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών μου για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά κατά τη διάρκεια των ακαδημαϊκών ετών 2006-2007. Υπεύθυνη για την επίβλεψη της εργασίας αυτής ήταν η αναπληρώτρια καθηγήτρια κα Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα.

Η διαδικασία της έρευνας είναι πολύτιμη δεδομένου ότι προϋποθέτει και συγχρόνως εξελίσσει την γνώση. Θα ήταν, γι'αυτό, αδύνατο να ανταποκριθώ στις απαιτήσεις της παρούσας διπλωματικής εργασίας χωρίς την πολύτιμη βοήθεια και συμπαράσταση της επιβλέπουσας καθηγήτριας, την οποία και ευχαριστώ θερμά γιατί με την διδασκαλία της έστρεψε το ενδιαφέρον μου στο πεδίο των fractals. Ταυτόχρονα, θα ήθελα ιδιαίτερα να ευχαριστήσω τον Δρ. Παντελή Μπουμπούλη γιατί σε συνεργασία με την κα Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα, σε αντίξοες συνθήκες, υπομονετικά διόρθωσε και έκανε ουσιώδεις παρατηρήσεις, οι οποίες με οδήγησαν στην σωστή κατεύθυνση.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Βασίλη Δουγαλή για την συμπαράσταση και την ενθάρρυνση που μου παρείχε κατά την διάρκεια των σπουδών μου, τόσο σε προπτυχιακό όσο και σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον λέκτορα Μιχάλη Δρακόπουλο ο οποίος συμπληρώνει την τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω αυτούς που με την αμέριστη συμπαράσταση και κατανόηση με βοήθησαν να φτάσω μέχρι εδώ.

Κεφάλαιο 1

Κατασκευή Fractal συνόλων

“Τα σύννεφα δεν είναι σφαιρικά,
τα βουνά δεν είναι κωνικά,
οι ακτές δεν είναι κυκλικές,
ο φλοιός των δέντρων δεν είναι λειός,
και η τροχιά του κεραυνού δεν είναι ευθεία.”

Benoit Mandelbrot

1.1 Fractal Σύνολα

Οι χώροι μέσα στους οποίους κατασκευάζουμε τα Fractal σύνολα και τις Fractal συναρτήσεις είναι οι συνήθεις Ευκλείδειοι χώροι \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 . Βέβαια, κάθε υποσύνολο ενός Ευκλείδειου χώρου δεν είναι Fractal σύνολο. Σαφής ορισμός των Fractal συνόλων δεν υπάρχει, παρ'όλα αυτά θα δώσουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά τους. Ο Kenneth Falconer έδωσε σ'ένα Fractal σύνολο F τις εξής ιδιότητες:

1. Το F έχει άριστη δομή. Όσο και να μεγεθυνθεί δεν μπορεί να έχει ομαλά τμήματα.
2. Το F δεν δύναται να περιγραφεί με γεωμετρικές μεθόδους.
3. Πολλές φορές το F αποτελείται από κομμάτια που μοιάζουν μεταξύ τους.
4. Συνήθως η Fractal διάστασή του F είναι μεγαλύτερη από την τοπολογική του διάσταση.
5. Συχνά το F μπορεί να οριστεί απλά (π.χ. αναδρομικά).

ΣΧΟΛΙΟ: Τις ιδιότητες αυτές δεν τις πληρούν κατ'ανάγκη όλα τα Fractal σύνολα. Όπως θα δούμε, τα Fractal σύνολα που θα κατασκευαστούν είναι ελκυστές κατάλληλων συναρτήσεων.

Θα χρειαστούμε μερικές βασικές έννοιες της ανάλυσης, όπως των μετρικών χώρων, των ισοδύναμων μετρικών χώρων, της πληρότητας, της συμπαγείας κ.λπ. που θα χρησιμοποιήσουμε στην μελέτη μας και θα τις θεωρήσουμε γνωστές. Περισσότερες λεπτομέρειες για τις έννοιες αυτές βλέπε [1], [3].

Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 *Ελκυστής συνάρτησης.*

Το σύνολο $A \neq \emptyset, A \subseteq X$ καλείται σταθερό σύνολο ή ελκυστής για την $f : X \rightarrow X$, αν $f(A) = A$. Εάν το σταθερό σύνολο είναι μονοσύνολο, δηλ. $A = \{x_0\}$, τότε το x_0 καλείται σταθερό σημείο.

Γενικά μια συνάρτηση f δεν έχει σταθερό σύνολο. Σε ειδικές περιπτώσεις εξασφαλίζεται η ύπαρξη. Θα συμβολίζουμε με

$$f^1 = f$$

και

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η συνεχής επανάληψη της σύνθεσης θα χρησιμοποιηθεί πολύ παρακάτω.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1 *Έστω $f : X \rightarrow X$ συνεχής συνάρτηση, όπου (X, d) είναι συμπαγής μ.χ. Τότε υπάρχει συμπαγές σύνολο $A \neq \emptyset$ έτσι ώστε $f(A) = A$. (Το A δεν είναι κατ'ανάγκη μοναδικό.)*

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 *Έστω $f : X \rightarrow X$. Η f καλείται συνάρτηση συστολής αν υπάρχει $0 < c < 1$ με $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. Τον αριθμό*

$$s = \inf \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$$

καλούμε συντελεστή συστολής της f .

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 *(Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach).*

Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ συνάρτηση συστολής, με συντελεστή συστολής s . Τότε :

1. Υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο x_0 της f (δηλ. $f(x_0) = x_0$).

2. $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y)$, για κάθε $y \in X$.

3. Για κάθε $y \in X$ ισχύει ότι $|f^n(y) - x_0| \leq \frac{s^n}{1-s} |f(y) - y|$, $n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε ως $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X)$ το σύνολο όλων των μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του X .

Η διαδικασία που ακολουθείται για την κατασκευή Fractal συνόλων βασίζεται στην πληρότητα του χώρου $\mathcal{H}(X)$ ως προς την μετρική Hausdorff εφόσον ο (X, d) είναι πλήρης. Θεωρούμε κατάλληλες συναρτήσεις συστολής (στον $\mathcal{H}(X)$) και κατασκευάζουμε τα σύνολα μέσω επαναληπτικών διαδικασιών ως σταθερά σημεία. Το θεώρημα του σταθερού σημείου του Banach (θεώρημα 1.1) εξασφαλίζει την ύπαρξη τέτοιων συνόλων. Υπάρχουν όμως σύνολα που θεωρούνται Fractals αλλά δεν μπορούν να κατασκευαστούν με αυτό τον τρόπο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 Hausdorff Μετρική.

Έστω $A, B \in \mathcal{H}$. Αν $d(x, B) = \min\{d(x, b) : b \in B\}$ είναι η απόσταση του σημείου $x \in X$ από το B , τότε ορίζουμε ως

$\tilde{d}(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}$ την απόσταση του A από το B και ως

$\tilde{d}(B, A) = \max\{d(b, A) : b \in B\}$ την απόσταση του B από το A .

Η Hausdorff μετρική μεταξύ των A, B ορίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\} \\ &= \max\{\max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b)\}. \end{aligned}$$

Εφόσον τα A, B είναι συμπαγή υπάρχουν $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ ώστε $h(A, B) = d(a_0, b_0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 Αν ο (X, d) είναι πλήρης, τότε ο μετρικός χώρος $(\mathcal{H}(X), h)$ είναι πλήρης.

Για απόδειξη βλέπε [1], [Bar93].

1.2 Συστήματα Επαναλαμβανόμεων Συναρτήσεων (Σ.Ε.Σ.)

Ένα Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων ή Iterated Function System (Σ.Ε.Σ. ή I.F.S.) αποτελείται από έναν πλήρη μετρικό χώρο (X, d) μαζί με ένα σύνολο συναρτήσεων $\{w_i : X \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, N\}$. Για συντομία θα το συμβολίζουμε ως $\{X, w_{1-N}\}$. Αν οι απεικονίσεις w_i είναι $i = 0, 1, \dots, N$ συστολές, το ΣΕΣ καλείται υπερβολικό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2 Έστω ότι οι απεικονίσεις $\{w_i : X \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, N\}$ είναι συναρτήσεις συστολής στο μετρικό χώρο (X, d) . Τότε η απεικόνιση $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ με $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A)$ είναι συνάρτηση συστολής. Ακόμα αν θεωρήσουμε $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ τους συντελεστές συστολής των απεικονίσεων $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$, τότε η W έχει συντελεστή συστολής $s = \max\{s_i : i = 1, 2, \dots, N\}$.

Επομένως, αν ο (X, d) είναι πλήρης, από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, θεώρημα (1.1), έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 Έστω ο πλήρης μ.χ. (X, d) και το ΣΕΣ $\{X, w_{1-N}\}$ που αποτελείται από τις συστολές $w_i : X \rightarrow X, i = 1, \dots, N$. Τότε για την συνάρτηση συστολής W ισχύουν τα ακόλουθα :

1. Υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο $A \in \mathcal{H}(X)$ το οποίο είναι σταθερό σημείο της W .
2. Το $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$, για κάθε αρχικό σύνολο $B \in \mathcal{H}(X)$.

Το σύνολο A ονομάζεται ελκυστής του ΣΕΣ.

1.2.1 Αλγόριθμοι Κατασκευής Ελκυστών ΣΕΣ

Αν επιλέξουμε κατάλληλες απεικονίσεις w_i μπορούμε να κατασκευάσουμε ΣΕΣ με ελκυστές διάφορα γνωστά Fractal σύνολα. Υπάρχουν δύο γνωστοί αλγόριθμοι που επιτυγχάνουν την κατασκευή του ελκυστή ενός οποιουδήποτε ΣΕΣ ορισμένου στον χώρο X (όπου ο X συνήθως είναι ο πλήρης Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^k , $k = 1, 2, 3$). Ο πρώτος είναι γνωστός ως **Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων - ΑΑΕ** και ο δεύτερος ως **Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων - ΑΤΕ**.

Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων

Έστω $\{\mathbb{R}^k, w_{1-N}\}$ ένα υπερβολικό ΣΕΣ. Επιλέγουμε ένα τυχαίο αρχικό συμπαγές σύνολο $A_0 \subset \mathbb{R}^k$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το σύνολο $A_1 = W(A_0) = \bigcup_{i=1}^N w_i(A_0)$, το σύνολο $A_2 = W(A_1)$ κ.ο.κ. Ακολουθούμε την αναδρομική σχέση $A_n = W(A_{n-1})$, για $i = 1, 2, \dots$. Σύμφωνα με το θεώρημα του σταθερού σημείου του Banach (θεωρήματα 1.1 και 1.3) η ακολουθία $\{A_0, A_1, \dots, A_n, \dots\}$ συγγλίνει με την μετρική Hausdorff σε ένα συμπαγές σύνολο A , τον ελκυστή του ΣΕΣ.

Πρέπει να τονίσουμε ότι ο αλγόριθμος δίνει σωστά αποτελέσματα για κάθε τυχαία επιλογή του αρχικού συνόλου A_0 . Όμως αν το A_0 απέχει πολύ από τον ελκυστή του ΣΕΣ, θα χρειαστούν πολλές επαναλήψεις ώστε να πάρουμε ως αποτέλεσμα ένα σύνολο αρκετά κοντά στον ελκυστή (θεώρημα 1.1- σχέση 3). Αυτό συνεπάγεται μεγάλο υπολογιστικό χρόνο και μεγάλη χωρητικότητα μνήμης. Είναι, επομένως αναγκαίο να επιλέξουμε το αρχικό μας σύνολο όσο το δυνατόν πιο κοντά στον ελκυστή. Για αυτόν

το λόγο, αν γνωρίζουμε μερικά από τα σημεία του ελκυστή, επιλέγουμε αυτά ως αρχικό σύνολο.

Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων

Θεωρούμε ένα υπερβολικό ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^k, w_{1-N}\}$ μαζί με ένα σύνολο πιθανοτήτων $p_i, i = 1, 2, \dots, N$, τέτοιο ώστε $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$ (συνήθως επιλέγουμε ίσες πιθανότητες). Αντιστοιχούμε κάθε πιθανότητα p_i με την απεικόνιση w_i και επιλέγουμε ένα τυχαίο αρχικό σημείο x_0 . Στη συνέχεια, επιλέγουμε ως w_{i_1} μια από τις απεικονίσεις $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$, όπου η πιθανότητα επιλογής της w_{i_1} είναι p_{i_1} . Μετά υπολογίζουμε το σημείο $x_1 = w_{i_1}(x_0)$. Συνεχίζουμε επιλέγοντας μια νέα απεικόνιση w_{i_2} και υπολογίζουμε το σημείο $x_2 = w_{i_2}(x_1)$ κ.ο.κ. Αν σχεδιάσουμε όλα τα σημεία $\{x_0, x_1, \dots\}$ θα προκύψει ένα σχέδιο του ελκυστή του ΣΕΣ. Ο αλγόριθμος αυτός δεν υπολογίζει τον ελκυστή του ΣΕΣ, αλλά δημιουργεί σημεία που συνεχώς πλησιάζουν τα σημεία του ελκυστή. Ο αλγόριθμος αυτός πλεονεχτεί γιατί έχει πολύ μικρότερες απαιτήσεις μνήμης από τον ΑΑΕ. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε βήμα του αλγορίθμου παράγει ένα σημείο, ενώ στον ΑΑΕ ο αριθμός των παραγόμενων σημείων σε κάθε βήμα αυξάνεται γεωμετρικά. Επιπλέον, επιλέγοντας διαφορετικές πιθανότητες για κάθε απεικόνιση, συχνά έχουμε την δυνατότητα να δούμε καθαρότερα τον ελκυστή χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό σημείων με τον ΑΑΕ.

Η υλοποίηση αυτών των αλγορίθμων σε matlab υπάρχει στο παράρτημα.

Παρακάτω δίνονται μερικά γνωστά Fractal σύνολα εφαρμόζοντας τους παραπάνω αλγορίθμους σε κατάλληλα ΣΕΣ. Σημειώνουμε ότι όλα τα σχήματα που προκύπτουν από την χρήση ΣΕΣ έχουν το χαρακτηριστικό της αυτοομοιότητας, δηλαδή μεγενθύνοντας κάποιο κομμάτι τους βρίσκουμε σχήμα όμοιο με το ολικό σχήμα.

Παράδειγμα 1 (Σύνολο Cantor)

Το τριαδικό σύνολο του Cantor είναι ένα από τα πιο γνώστα Fractal σύνολα. Θεωρούμε το μετρικό χώρο \mathbb{R} με την Ευκλείδεια μετρική και τις συστολές

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Το τριαδικό σύνολο του Cantor είναι ο ελκυστής του ΣΕΣ $\{\mathbb{R}, w_1, w_2\}$. Ως γνωστόν, η διαδικασία κατασκευής του τριαδικού συνόλου του Cantor μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Παίρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $A_0 = [0, 1]$ και το σπάμε σε τρία ίσα τμήματα. Αφαιρούμε το μεσαίο οπότε παίρνουμε το $A_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα δύο ακριανά ευθύγραμμα τμήματα κ.ο.κ. Η ίδια διαδικασία πραγματοποιείται μέσω του ΣΕΣ με τον εξής τρόπο:

Θεωρούμε αρχικό σύνολο $A_0 = [0, 1]$. Τότε

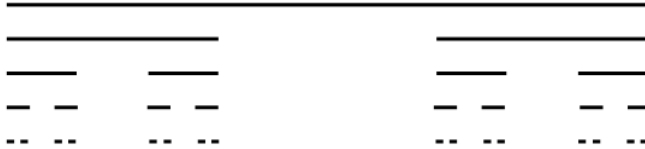
$$W([0, 1]) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1],$$

$$W^2([0, 1]) = W([0, 1/3] \cup [2/3, 1]) = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

κ.ο.κ. Άρα το σταθερό σημείο της W μέσω του ΣΕΣ είναι το

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n([0, 1]).$$

Στο σχήμα 1.1 φαίνεται η κατασκευή του συνόλου αυτού μέσω του ΣΕΣ, χρησιμοποιώντας τον ΑΑΕ με αρχικό σύνολο το $A_0 = [0, 1]$ μέχρι και την τέταρτη επανάληψη.



Σχήμα 1.1: Το σύνολο Cantor

Παράδειγμα 2 (Το πλατανόφυλλο ή maple leaf)

Το πλατανόφυλλο κατασκευάζεται στον \mathbb{R}^2 . Έστω (\mathbb{R}^2, d) όπου d η Ευκλείδεια μετρική. Θα χρειαστούμε τις συστολές:

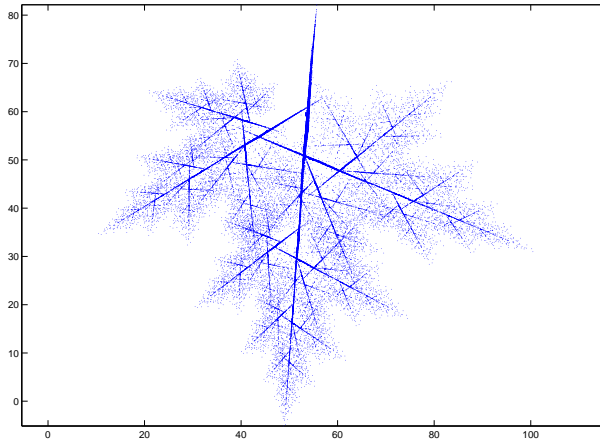
$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.01 \\ 0 & 0.62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.27 & 0.52 \\ 0.40 & 0.36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 & -0.73 \\ 0.50 & 0.26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 88 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 & -0.01 \\ 0.50 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 52 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Το σταθερό σημείο του ΣΕΣ φαίνεται στο σχήμα 1.2 μετά από 8 επαναλήψεις του Α.Α.Ε.



Σχήμα 1.2: Το πλατανόφυλλο

1.3 Περιοδικά Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΠΣΕΣ)

Τα σχήματα που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι αυτοόμοια. Εδώ θα περιγράψουμε τρόπους ώστε να κατασκευάσουμε Fractal σύνολα που να μην έχουν αυτή την ιδιότητα.

Ένα Περιοδικό ΣΕΣ (ΠΣΕΣ) ή Recurrent Iterated Function System (RFIS) αποτελείται από ένα ΣΕΣ $\{X, w_{1-N}\}$ και από έναν πίνακα $P = (p_{ij})$ ο οποίος έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $p_{ij} \in [0, 1]$ για $i, j = 1, 2, \dots, N$,
2. $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ για $i = 1, 2, \dots, N$.
3. ο πίνακας P είναι irreducible.

Ο P αναπαριστά μία μαρκοβιανή αλυσίδα με N καταστάσεις. Ας δούμε αναλυτικότερα πως λειτουργεί ένα ΠΣΕΣ.

Έστω ότι έχουμε ένα αρχικό σύνολο A_0 στο οποίο εφαρμόζουμε αρχικά την απεικόνιση w_i . Τότε λέμε ότι η αλυσίδα μετέβη στην κατάσταση i . Η πιθανότητα p_{ij} εκφράζει την πιθανότητα να μεταβεί η αλυσίδα από την κατάσταση i στην κατάσταση j , δηλαδή να επιλεγεί η απεικόνιση w_j δεδομένου ότι στο προηγούμενο βήμα είχε επιλεγεί η απεικόνιση

w_i . Για αυτόν ακριβώς το λόγο και ο πίνακας P έχει τις 3 παραπάνω ιδιότητες. Πρώτον οι πιθανότητες πρέπει να ανήκουν στο $[0,1]$, δεύτερον η αλυσίδα να είναι στοχαστική, που σημαίνει ότι σε κάθε κατάσταση το άθροισμα των πιθανοτήτων μετάβασης είναι 1 και τρίτον από κάθε κατάσταση i πρέπει να μπορούμε να μεταβούμε σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση j . Δεν υπάρχουν δηλαδή, κλειστοί κύκλοι, κάτι που θα μας εγκλώβιζε σε ένα συγκεκριμένο μονοπάτι και θα αδυνατούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις απεικονίσεις που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες καταστάσεις. Έτσι είμαστε σίγουροι ότι ο ΑΤΕ θα χρησιμοποιήσει όλες τις απεικονίσεις του ΣΕΣ. Στην περίπτωση όμως που έχουμε αναγωγίμο πίνακα, θα εγκλωβιστούμε σε ένα μονοπάτι και δεν θα χρησιμοποιήσουμε ποτέ τις απεικονίσεις που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες καταστάσεις. Εάν $P = (p_{ij})$ με $p_{ii} = p_i$ και $p_{ij} = 0$ για $i \neq j$ τότε έχουμε την περίπτωση που περιγράψαμε ως ΑΤΕ.

Το ακόλουθο παράδειγμα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε καλύτερα όσα αναφέραμε. Ας θεωρήσουμε ένα ΠΣΕΣ του \mathbb{R}^2 με τις απεικονίσεις:

$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

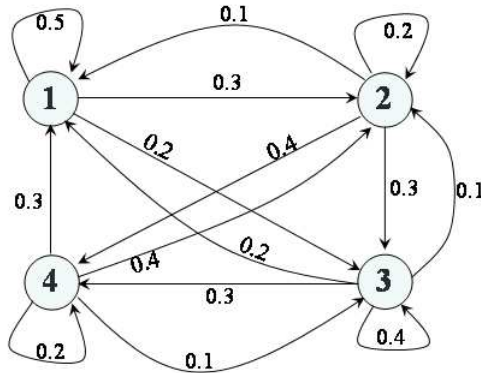
Για διαφορετικούς αναγωγίμους πίνακες P προκύπτουν διαφορετικά σχήματα. Το σχήμα 1.4-(a) προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τον

$$P_1 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

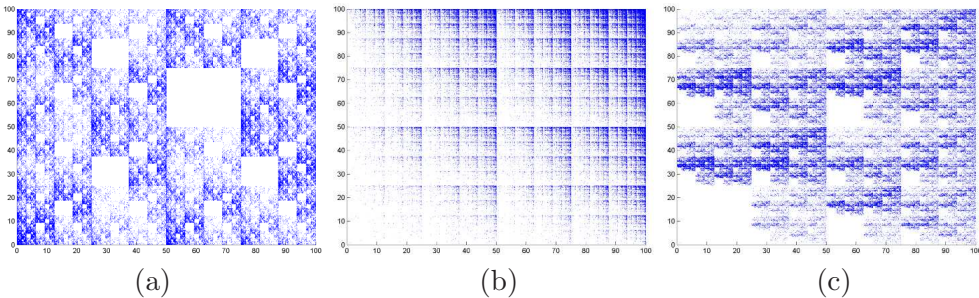
με πιθανότητες μετάβασης από την μία κατάσταση στην άλλη όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3 που αποτελεί το κατευθυνόμενο γράφημα της μαρκοβιανής αλυσίδας του ΠΣΕΣ.

Τα σχήματα 1.4-(b), 1.4-(c) προκύπτουν αν χρησιμοποιήσουμε τους

$$P_2 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 12 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 1.3: Το κατευθυνόμενο γράφημα της μαρκοβιανής αλυσίδας ενός ΠΣΕΣ με πίνακα P_1 .



Σχήμα 1.4: Οι ελκυστές του Περιοδικού Επαναλαμβανόμενου Σύστημα Συναρτήσεων που προκύπτουν χρησιμοποιώντας διαφορετικούς πίνακες μετάβασης, λόγω των P_1, P_2, P_3 αντίστοιχα.

αντίστοιχα. Και στις τρεις περιπτώσεις έχει χρησιμοποιηθεί το ίδιο αρχικό σύνολο.

1.3.1 Ύπαρξη Ελκυστή ΠΣΕΣ

Θεωρούμε ένα ΠΣΕΣ ορισμένο στον μετρικό χώρο (X, d) που αποτελείται από τις απεικονίσεις $w_i : X \rightarrow X$ και τον πίνακα $P = (p_{ij})$. Ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$W_{ij} : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) : W_{ij}(B) = \begin{cases} w_i(B), & p_{ji} > 0 \\ \emptyset, & p_{ji} = 0 \end{cases}$$

και τον μετρικό χώρο

$$\tilde{\mathcal{H}}(X) = \mathcal{H}(X)^N = \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \times \dots \times \mathcal{H}(X),$$

εφοδιασμένο με την μετρική \tilde{h} :

$$\tilde{h} \left(\left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{array} \right) \right) = \max\{h(A_i, B_i) : i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Εαν ο (X, d) είναι πλήρης μ.χ. τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι και ο $(\tilde{\mathcal{H}}(X), \tilde{h})$ είναι πλήρης μ.χ.

Στην συνέχεια ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} W : \tilde{\mathcal{H}}(X) &\rightarrow \tilde{\mathcal{H}}(X) : W \left(\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{array} \right) &= \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{N1} & W_{N2} & \dots & W_{NN} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_{11}(A_1) \cup W_{12}(A_2) \cup \dots \cup W_{1N}(A_N) \\ W_{21}(A_1) \cup W_{22}(A_2) \cup \dots \cup W_{2N}(A_N) \\ \vdots \\ W_{N1}(A_1) \cup W_{N2}(A_2) \cup \dots \cup W_{NN}(A_N) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bigcup_{j \in I(1)} w_1(A_j) \\ \bigcup_{j \in I(2)} w_2(A_j) \\ \vdots \\ \bigcup_{j \in I(N)} w_N(A_j) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

όπου $I(i) = \{j : p_{ij} > 0\}$, για $i = 1, 2, \dots, N$.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε το ΠΣΕΣ στον \mathbb{R}^2 που ορίζεται από τις τέσσερις απεικονίσεις $w_i, i = 1, 2, 3, 4$ που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω και τον στοχαστικό πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

τότε η απεικόνιση W θα είναι:

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & \emptyset & w_1 & w_1 \\ w_2 & w_2 & \emptyset & w_2 \\ w_3 & \emptyset & w_3 & \emptyset \\ \emptyset & w_4 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}.$$

Αν θεωρήσουμε ένα αρχικό σημείο $(A_1, A_2, A_3, A_4)^t$ του χώρου $\mathcal{H}(R^2)^4$, τότε το $W(A)$ θα είναι:

$$W \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(A_1) \cup w_1(A_3) \cup w_1(A_4) \\ w_2(A_1) \cup w_2(A_2) \cup w_2(A_4) \\ w_3(A_1) \cup w_3(A_2) \\ w_4(A_2) \end{pmatrix},$$

δηλαδή σε κάθε σύνολο A_i μπορούν να εφαρμοστούν συγκεκριμένες απεικονίσεις w_i (με βάση τον πίνακα P), παραδείγματος χάριν στο A_1 εφαρμόζονται μόνο οι w_1, w_2, w_3 και όχι η w_4 .

Αν οι απεικονίσεις $w_i : X \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, N$ ενός ΠΣΕΣ ορισμένου στον πλήρη μ.χ. (\tilde{X}, d) είναι συστολές με συντελεστές s_i αντίστοιχα, τότε η απεικόνιση $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, όπως την ορίσαμε παραπάνω

$$W \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcup_{j \in I(1)} w_1(A_j) \\ \bigcup_{j \in I(2)} w_2(A_j) \\ \vdots \\ \bigcup_{j \in I(N)} w_N(A_j) \end{pmatrix}$$

είναι επίσης συστολή στον πλήρη μ.χ. $(\mathcal{H}(\tilde{X}), \tilde{h})$ με συντελεστή συστολής

$$s = \max\{s_i : i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Έτσι από το θεώρημα του σταθερού σημείου του Banach, αφού ο $\tilde{\mathcal{H}}(X)$ είναι πλήρης, υπάρχει ένα σύνολο $E = (E_1, E_2, \dots, E_N)^t$ για το οποίο ισχύει: $W(E) = E$ και

$$E_i = \bigcup_{j \in I(i)} w_i(E_j),$$

για $i = 1, 2, \dots, N$. Το στοιχείο E ονομάζεται ελκυστής του ΠΣΕΣ. Συχνά για λόγους ευκολίας ονομάζουμε ελκυστή του ΠΣΕΣ την ένωση όλων των E_i , δηλαδή το σύνολο

$$\bigcup_{i=1}^N E_i.$$

Κεφάλαιο 2

Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μεθόδους κατασκευής Fractal συναρτήσεων παρεμβολής και θα δώσουμε αλγορίθμους για την κατασκευή τους μέσω του Η/Υ. Θα δούμε ότι χρησιμοποιώντας ακόμα και 4 ή 5 σημεία παρεμβολής μόνο, μπορούν να προκύψουν Fractal συναρτήσεις αρκετά πολύπλοκες. Επιπλέον, διατηρώντας τα ίδια σημεία, αλλά αλλάζοντας τις υπόλοιπες παραμέτρους κατασκευής, προκύπτουν διαφορετικές συναρτήσεις. Ο M.Barnsley, βλέπε [Bar86], ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τις Fractal Interpolation Functions (FIFs) ή Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής οι οποίες προκύπτουν ως ελκυστές κατάλληλων ΣΕΣ ή ΠΣΕΣ και παρεμβάλουν δοσμένα αρχικά σημεία. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στις παραγράφους 2.1, 2.2, για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [Bar86], [BEH89].

2.1 Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής με Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων

Έστω ότι έχουμε ένα δοσμένο σύνολο σημείων παρεμβολής $\Delta = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2$, $N \geq 2$, $N \in \mathbb{N}$. Θα εξηγήσουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ΣΕΣ ή ένα ΠΣΕΣ, ο ελκυστής του οποίου θα είναι το γράφημα μίας συνεχούς συνάρτησης που θα παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ . Έστω ένα ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^2, w_{1-N}\}$, με τις w_i της μορφής:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ F_i(x, y) \end{pmatrix}, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

όπου,

$$L_i(x) = a_i x + b_i \quad (2.2)$$

$$F_i(x, y) = s_i y + q_i(x), \quad (2.3)$$

με τα $q_i(x)$ να είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Ο συντελεστής s_i ονομάζεται *συντελεστής κατακόρυφης αναλογίας (contraction factor)* και θεωρούμε $|s_i| < 1$.

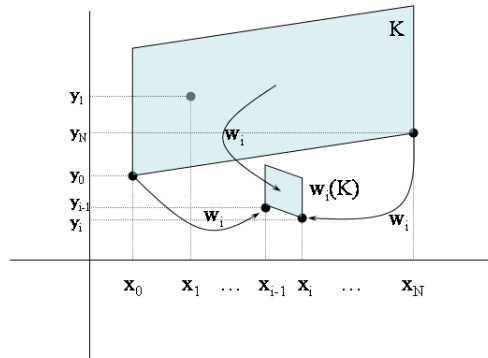
Επιλέγουμε την w_i ώστε να απεικονίζει τα ακραία σημεία του Δ (x_0, y_0) και (x_N, y_N) στα σημεία (x_{i-1}, y_{i-1}) και (x_i, y_i) αντίστοιχα (βλέπε σχήμα 2.1), δηλαδή,

$$w_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$w_i \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

για $i = 1, 2, \dots, N$.

Σε αυτή την περίπτωση ο ελκυστής του ΣΕΣ είναι το γράφημα μίας συνάρτησης.



Σχήμα 2.1: Η απεικόνιση w_i

Συγκεκριμένα ισχύουν τα παρακάτω.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1 Έστω ένα ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^2, w_{1-N}\}$ όπως αυτό που ορίστηκε παραπάνω. Αν $|s_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, N$ τότε υπάρχει μετρική d ισοδύναμη της Ευκλείδειας, ως προς την οποία το ΣΕΣ είναι υπερβολικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 Έστω $\Delta = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\}$ ένα σύνολο σημείων του \mathbb{R}^2 . Αν για κάποιο ΣΕΣ ισχύουν οι σχέσεις (2.4), (2.5) τότε το ΣΕΣ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $G \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ το οποίο αποτελεί το γράφημα μίας συνεχούς συναρτησης f , η οποία παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ . Επιπλέον η f ικανοποιεί την συναρτησιακή σχέση $f(L_i(t)) = s_i f(t) + q_i(t)$ για $t \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$.

2.1.1 Αυτοσυσχετισμένες Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής με ΣΕΣ

Στην περίπτωση όπου τα $p_i(x)$ είναι πολώνυμα πρώτου βαθμού, δηλαδή της μορφής $q_i(x) = c_i x + d_i$ παίρνουμε τις Αυτοσυσχετισμένες Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής (Affine Fractal Interpolation Functions-AFIF).

Η σχέση (2.1) γίνεται

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \end{pmatrix}, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

Οι παράμετροι a_i, b_i, c_i, d_i υπολογίζονται με βάση τα σημεία του Δ , μέσω του ακόλουθου γραμμικού συστήματος που προκύπτει από τις σχέσεις (2.4), (2.5) :

$$\begin{aligned} a_i x_0 + b_i &= x_{i-1}, \\ a_i x_N + b_i &= x_i, \\ c_i x_0 + s_i y_0 + d_i &= y_{i-1}, \\ c_i x_N + s_i y_N + d_i &= y_i. \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε τους συντελεστές s_i ως ελεύθερες παραμέτρους, έχουμε μοναδική λύση του παραπάνου συστήματος, για κάθε δεδομένη επιλογή των σημείων παρεμβολής:

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0} \quad (2.7)$$

$$b_i = \frac{x_N x_{i-1} - x_0 x_i}{x_N - x_0} \quad (2.8)$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_N - x_0} - s_i \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0} \quad (2.9)$$

$$d_i = \frac{x_N y_{i-1} - x_0 y_i}{x_N - x_0} - s_i \frac{x_N y_0 - x_0 y_N}{x_N - x_0}. \quad (2.10)$$

2.1.2 Βox Διάσταση

Σύμφωνα με όσα ξέρουμε από την κλασσική Γεωμετρία τα ευθύγραμμα τμήματα και οι ευθείες έχουν διάσταση 1, τα πολύγωνα και οι κύκλοι έχουν διάσταση 2, ενώ οι

πυραμίδες, οι σφαίρες και τα πολύεδρα έχουν διάσταση 3. Εδώ θα εισαγάγουμε την έννοια της Box Διάστασης. Θα αντιστοιχήσουμε δηλαδή σε μία Fractal συνάρτηση παρεμβολής μία “κλασματική” διάσταση, την Box Διάσταση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 Αν $F \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι φραγμένο σύνολο, ορίζουμε ως Box διάσταση του, τον αριθμό

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

(εφόσον υπάρχει το όριο), όπου $N_\delta(F)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός κύβων του \mathbb{R}^d , πλευράς δ που καλύπτουν το F .

Περισσότερες λεπτομέρειες για τον ορισμό και την Box διάστασή γενικότερα βλέπε [1].

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2 Έστω $\Delta = \{(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, N\}$ ένα σύνολο σημείων του \mathbb{R}^2 . Έστω G το γράφημα της Αυτοσυσχετισμένης Fractal Συνάρτησης Παρεμβολής που προκύπτει από ένα υπερβολικό ΣΕΣ συνδεδεμένο με τα σημεία του Δ . Αν τα σημεία παρεμβολής του Δ δεν είναι συνευθειακά και

$$\sum_{i=1}^N |s_i| > 1,$$

τότε η Box διάσταση του G είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\sum_{i=1}^N |s_i| a_i^{D-1} = 1.$$

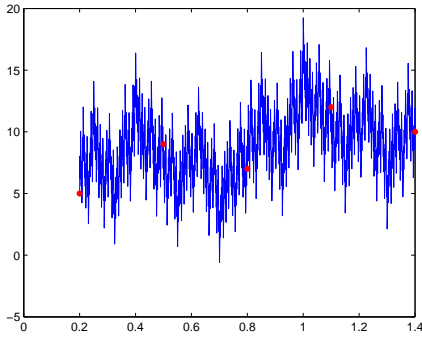
Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η Box διάσταση του G είναι 1.

Για την πλήρη απόδειξη βλέπε [BEHM89] και για γενικές γραμμές αυτής βλέπε [Bar93].

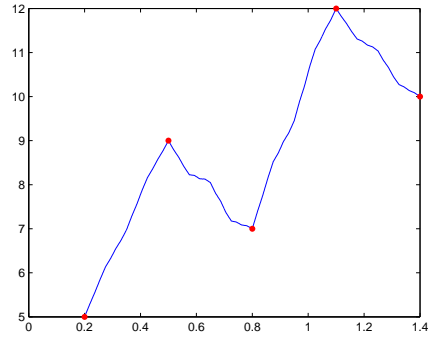
Παρατήρηση: Στην περίπτωση όπου τα σημεία παρεμβολής ισαπέχουν (δηλαδή $x_i = x_0 + \frac{i}{N}(x_N - x_0)$, για $i = 1, 2, \dots, N$) προκύπτει ότι $a_i = \frac{1}{N}$, για $i = 1, 2, \dots, N$. Αν τα σημεία παρεμβολής δεν είναι συνευθειακά και $\sum_{i=1}^N |s_i| > 1$, εύκολα προκύπτει ότι η Box διάσταση του γραφήματος της Αυτοσυσχετισμένης Fractal Συνάρτησης Παρεμβολής θα δίνεται από τον τύπο

$$D = 1 + \frac{\log \sum_{i=1}^N |s_i|}{\log N}. \quad (2.11)$$

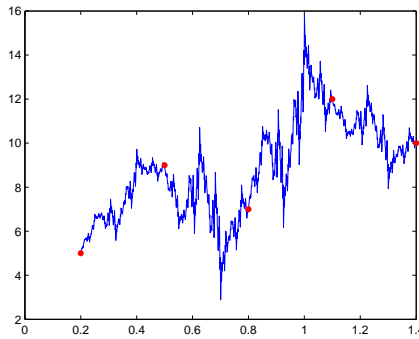
Στα σχήματα 2.2(a)-(b)-(c) φαίνονται τρεις διαφορετικές AFIF για το ίδιο σύνολο Δ σημείων παρεμβολής.



(a)



(b)



(c)

Σχήμα 2.2: Με κόκκινο χρώμα φαίνονται τα σημεία παρεμβολής $\Delta = \{(0.2, 5), (0.5, 9), (0.8, 7), (1.1, 12), (1.4, 10)\}$.

(a) Οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας είναι $S = \{0.95, -0.9, 0.97, -0.93\}$. Η FΣΠ, σύμφωνα με το θεώρημα 2.2, θα έχει διάσταση λίγο μικρότερη από 2.

(b) Οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας είναι $S = \{0.05, -0.1, 0.1, -0.07\}$. Η FΣΠ, σύμφωνα με το θεώρημα 2.2, θα έχει διάσταση ίση με 1.

(c) Οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας είναι $S = \{0.3, -0.7, 0.8, -0.4\}$. Η FΣΠ, σύμφωνα με τον το θεώρημα 2.2, θα έχει διάσταση περίπου 1,5.

2.2 Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής με Περιοδικά Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή θα κατασκευάσουμε FIF χρησιμοποιώντας Περιοδικά Συστήματα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΠΣΕΣ, RIFS). Έστω ότι έχουμε ένα δοσμένο

σύνολο σημείων παρεμβολής

$$\Delta = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2, N \in \mathbb{N}, N \geq 2$$

με $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ και ένα υποσύνολό του

$$\hat{\Delta} = \{(\hat{x}_j, \hat{y}_j) : j = 0, 1, \dots, M\} \subset \Delta, M \geq 2,$$

με $\hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_M$, τέτοιο ώστε $\hat{x}_0 = x_0$ και $\hat{x}_M = x_N$. Τα σημεία παρεμβολής χωρίζουν το διάστημα $[x_0, x_N]$ σε N διαστήματα $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ που ονομάζονται *τομείς (regions)*, ενώ τα σημεία του $\hat{\Delta}$ χωρίζουν το $[x_0, x_N]$ σε M διαστήματα $J_j = [\hat{x}_{j-1}, \hat{x}_j]$, $j = 1, 2, \dots, M$ που ονομάζονται *περιοχές (domains)*. Είναι προφανές ότι κάθε περιοχή έχει κάποιους τομείς που είναι υποσύνολά της.

Θεωρούμε, επίσης, μία απεικόνιση $\mathbb{J} : \{0, 1, \dots, N\} \rightarrow \{0, 1, \dots, M\}$, $\mathbb{J}(i) = j$ και affine απεικονίσεις w_i , $i = 1, 2, \dots, N$ της μορφής (2.1), τέτοιες ώστε

$$w_i \begin{pmatrix} \hat{x}_{j-1} \\ \hat{y}_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$w_i \begin{pmatrix} \hat{x}_j \\ \hat{y}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Ο στοχαστικός πίνακας P είναι:

$$p_{nm} = \begin{cases} > 0, & \text{αν } I_n \subseteq J_{\mathbb{J}(m)} \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

Δηλαδή το στοιχείο p_{nm} είναι θετικό αν ο τομέας I_n είναι υποσύνολο της περιοχής $J_{\mathbb{J}(m)}$ (η οποία μέσω της L_m απεικονίζεται στον τομέα I_m).

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2 Έστω ένα ΠΣΕΣ $\{\mathbb{R}^2, w_{1-N}\}$ όπως αυτό που ορίστηκε παραπάνω, δηλ. να ισχύουν οι (2.12)-(2.13). Αν $|s_i| < 1$, $n = 1, 2, \dots, N$ τότε υπάρχει μετρική d ισοδύναμη της Ευκλείδειας, ως προς την οποία το ΠΣΕΣ είναι υπερβολικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 Έστω $\Delta = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\}$ ένα σύνολο σημείων του \mathbb{R}^2 και $\hat{\Delta}$ ένα υποσύνολό του. Αν για το ΠΣΕΣ ισχύουν οι σχέσεις (2.12)-(2.13) τότε το ΠΣΕΣ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $G \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ το οποίο αποτελεί το γράφημα μίας συνεχούς συνάρτησης f , η οποία παρεμβάλλεται στα σημεία του Δ . Επιπλέον η f ικανοποιεί την συναρτησιακή σχέση $f(L_i(t)) = s_i f(t) + q_i(t)$ για $t \in [\hat{x}_{j-1}, \hat{x}_j]$.

Εαν θεωρήσουμε ως

$$\hat{\Delta} = \{(x_0, y_0), (x_N, y_N)\}$$

τότε η κατασκευή συμπίπτει με αυτήν της παραγράφου 2.1.

Ο παρακάτω αλγόριθμος βασίζεται στον ΑΤΕ και κατασκευάζει την αντίστοιχη Fractal συνάρτηση παρεμβολής:

Ξεκινάμε από ένα τυχαίο αρχικό σημείο (x^*, y^*) του $[x_0, x_N] \times \mathbb{R}$,

1. Η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση n , αν το σημείο (x^*, y^*) ανήκει στο $I_n \times \mathbb{R}$.
2. Επιλέγουμε με βάση τις πιθανότητες $p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nN}$ μια από τις απεικονίσεις w_1, w_2, \dots, w_N αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας την απεικόνιση w_m , προκύπτει ένα νέο σημείο το οποίο ανήκει στο $I_m \times \mathbb{R}$ και η αλυσίδα μεταβαίνει στην κατάσταση m . Βέβαια, για να επιλεγεί η απεικόνιση w_m , θα πρέπει $p_{nm} > 0$, δηλαδή θα πρέπει το αρχικό σημείο να ανήκει στην περιοχή $J_{\mathbb{J}(m)}$, η οποία μέσω της L_m απεικονίζεται στον τομέα I_m .
3. Θεωρούμε το σημείο που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα ως το αρχικό σημείο (x^*, y^*) και εφαρμόζουμε ξανά τα προηγούμενα βήματα μέχρι να δημιουργηθούν “αρκητά” σημεία.

2.2.1 Κατά τμήματα Αυτοσυσχετισμένες Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής με ΠΣΕΣ

Στην περίπτωση όπου τα $q_i(x)$ είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού, δηλαδή της μορφής $q_i(x) = c_i x + d_i$ τότε έχουμε κατά τμήματα Αυτοσυσχετισμένες Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής (Piece-wise Self-Affine FIF).

Η σχέση (2.1) γίνεται

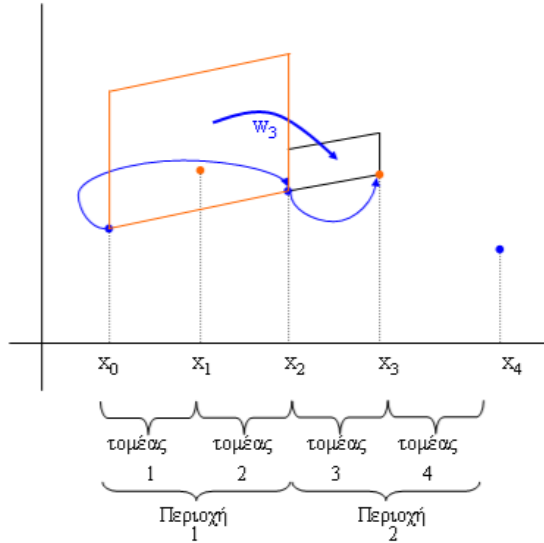
$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \end{pmatrix},$$

για $i = 1, 2, \dots, N$. Υποθέτουμε ότι οι απεικονίσεις ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις, όπως ορίστηκαν και πιο πάνω

$$w_i \begin{pmatrix} \hat{x}_{j-1} \\ \hat{y}_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$w_i \begin{pmatrix} \hat{x}_j \\ \hat{y}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Δηλαδή οι w_i απεικονίζουν δεδομένα στα άκρα της περιοχής $J_j \equiv J_{\mathbb{J}(i)}$ στα άκρα του τομέα I_i , κάτι που φαίνεται στο σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Έχουμε 5 σημεία παρεμβολής, εκ των οποίων 3 από τα σημεία αυτά ανήκουν στο σύνολο $\hat{\Delta}$. Δημιουργούνται 4 τομείς και 2 περιοχές. Στο σχήμα βλέπουμε τον τρόπο δράσης της w_3 στα ακραία σημεία.

Παρατηρούμε ότι $L_i(J_j) = I_i$. Αν θεωρήσουμε τους συντελεστές s_i ως ελεύθερες παραμέτρους έχουμε την εξής μοναδική λύση του συστήματος που προκύπτει από τις σχέσεις (2.14), (2.15)

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}} \quad (2.16)$$

$$b_i = \frac{\hat{x}_j x_{i-1} - \hat{x}_{j-1} x_i}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}} \quad (2.17)$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}} - s_i \frac{\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}}{\hat{x}_j - \hat{x}_j} \quad (2.18)$$

$$d_i = \frac{\hat{x}_j y_{i-1} - \hat{x}_{j-1} y_i}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}} - s_i \frac{\hat{x}_j \hat{y}_{j-1} - \hat{x}_{j-1} \hat{y}_j}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}} \quad (2.19)$$

Στο παράρτημα δίνεται ο αλγόριθμος σε matlab για την κατασκευή μιας κατά τμήματα Συσχετισμένης Fractal Συνάρτησης Παρεμβολής.

2.2.2 Στοχαστικός Πίνακας, Πίνακας και Διάνυσμα Σύνδεσης

Ο πίνακας σύνδεσης, που συμβολίζεται με C , έχει διαστάσεις $N \times N$ και προκύπτει από τον στοχαστικό πίνακα P ως εξής: στον ανάστροφο του στοχαστικού πίνακα βάζουμε 1 στα μη-μηδενικά στοιχεία και αφήνουμε τα μηδέν όπου υπήρχαν από πριν. Αναφέραμε πιο πάνω ότι τα στοιχεία του P εκφράζουν πιθανότητες και επομένως παίρνουν τιμές ανάμεσα στο 0 και το 1.

Ορίζουμε το διάνυσμα σύνδεσης (*connection vector*) $V = (\mathbb{J}(1), \mathbb{J}(2), \dots, \mathbb{J}(N))$. Το διάνυσμα αυτό δείχνει ότι οι γραμμές του P που αντιστοιχούν σε τομείς οι οποίοι ανήκουν στην ίδια περιοχή, είναι ίδιες.

Παράδειγμα 1

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα σημεία παρεμβολής

$$\Delta = \{(0, 8), (0.20, 12), (0.40, 10), (0.60, 13), (0.80, 9), (1, 7)\},$$

και

$$\hat{\Delta} = \{(0, 8), (0.60, 13), (1, 7)\}.$$

Έχουμε 6 σημεία παρεμβολής και παίρνουμε 3 από αυτά στο $\hat{\Delta}$, οπότε δημιουργούνται 5 τομείς, οι $I_1 = [0, 0.2]$, $I_2 = [0.2, 0.4]$, $I_3 = [0.4, 0.6]$, $I_4 = [0.6, 0.8]$, $I_5 = [0.8, 1]$ και 2 ξένες περιοχές, οι $J_1 = [0, 0.60]$, $J_2 = [0.60, 1]$.

Παράδειγμα 2

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα σημεία παρεμβολής

$$\Delta = \{(0, 9), (0.25, 11), (0.5, 10), (0.75, 11), (1, 8)\},$$

χωρίζουμε το διάστημα $[0, 1]$ σε 4 τομείς, τους $I_1 = [0, 0.25]$, $I_2 = [0.25, 0.5]$, $I_3 = [0.5, 0.75]$, $I_4 = [0.75, 1]$, και

$$\hat{\Delta} = \{(0, 9), (0.5, 10), (1, 8)\}$$

οπότε έχουμε δύο ξένες περιοχές, τις $J_1 = [0, 0.5]$, $J_2 = [0.5, 1]$.

Επιλέγουμε ως πίνακα πιθανοτήτων τον

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

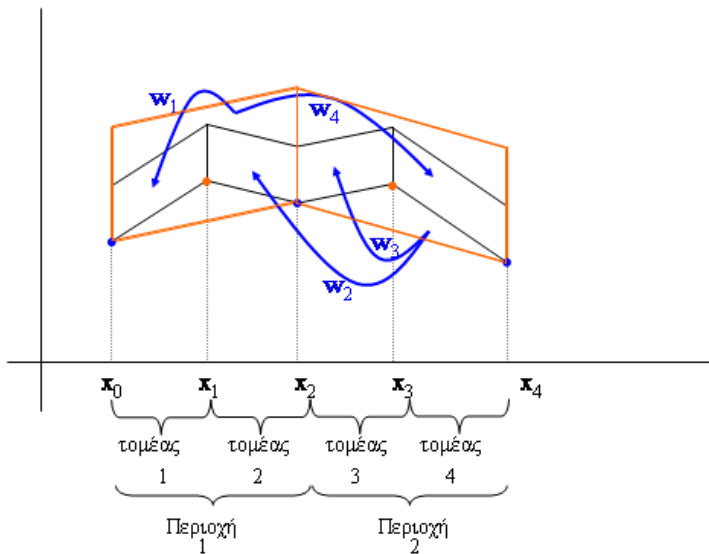
Άρα ο πίνακας συνδέσεων και το διάνυσμα σύνδεσης θα είναι (βλέπε σχήμα 2.4)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = (1, 2, 2, 1).$$

Δηλαδή η περιοχή J_1 απεικονίζεται στους τομείς I_1, I_3, I_4 , ενώ η περιοχή J_2 στους τομείς I_2, I_5 .

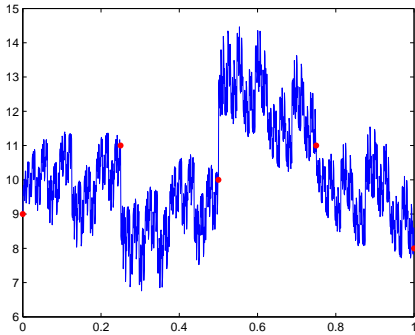
Για δεδομένα σύνολα Δ , $\hat{\Delta}$ και χρησιμοποιώντας τον παραπάνω πίνακα P, στην συνέχεια θα δούμε, πώς αλλάζει το σχήμα αν αλλάξουν οι συντελεστές κατακόρυφης συστολής.

Στα σχήματα 2.5–(a), (b), (c) βλέπουμε αντίστοιχα τα γραφήματα με συντελεστές κατακόρυφης συστολής, κατα απόλυτη τιμή κοντά στο 1, κοντά στο 0 και τυχαίους (δηλ. κατ' απόλυτη τιμή ανάμεσα στο 0 και το 1). Διακρίνουμε ότι κάθε γράφημα έχει και διαφορετική διάσταση (λίγο μικρότερη από 2, ίση με 1 και περίπου 1.5 αντίστοιχα). Κάτι που προκύπτει και θεωρητικά αν χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της Box διάστασης, βλέπε [BEH89].

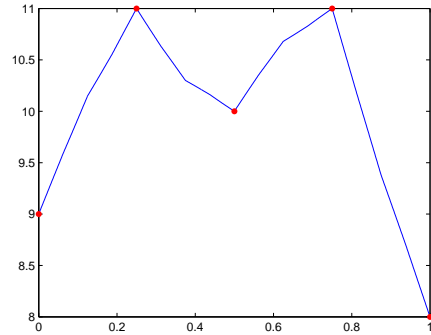


Σχήμα 2.4: Έχουμε 5 σημεία παρεμβολής και παίρνουμε 3 από αυτά στο $\hat{\Delta}$, οπότε δημιουργούνται 4 τομείς και 2 περιοχές.

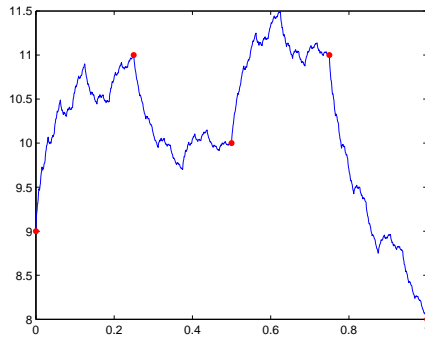
2.2. FRACTAL ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



(a)



(b)



(c)

Σχήμα 2.5: Με κόκκινο χρώμα φαίνονται τα σημεία παρεμβολής

$$\Delta = \{(0, 9), (0.25, 11), (0.5, 10), (0.75, 11), (1, 8)\},$$

$$\hat{\Delta} = \{(0, 9), (0.5, 10), (1, 8)\}.$$

Οι συντελεστές κατακόρυφης συστολής που χρησιμοποιήθηκαν σε κάθε γράφημα δίνονται παρακάτω.

$$(a) \quad 0.8 \quad -0.9 \quad 0.95 \quad -0.85$$

$$(b) \quad 0.1 \quad -0.1 \quad 0.09 \quad -0.08$$

$$(c) \quad 0.6 \quad -0.4 \quad 0.5 \quad -0.5.$$

Είδαμε ως τώρα ότι τόσο στην FIF όσο και στην RFIF το IFS που χρησιμοποιήσαμε αποτελείται από απεικονίσεις της μορφής

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ F_i(x, y) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

όπου

$$L_i(x) = a_i x + b_i \quad (2.21)$$

και

$$F_i(x, y) = s_i y + q_i(x), \quad (2.22)$$

με $q_i(x) = c_i x + d_i$. Δηλαδή, το $q_i(x)$ ήταν γραμμικό (πρώτου βαθμού) πολυώνυμο, εν γένει όμως όπως ήδη αναφέραμε, μπορεί να είναι και μεγαλύτερου βαθμού. Παρακάτω θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου το $q_i(x)$ να είναι πολυώνυμο μεγαλύτερου βαθμού.

2.3 Διαφορίσιμες Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής

Θα αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα μιας RFIF της μορφής 2.1 είναι επίσης της ίδιας μορφής. Το θεώρημα που αποδεικνύεται σε αυτή την παράγραφο είναι γενίκευση αντίστοιχου θεωρήματος για FIF, βλέπε [BH89].

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4 Έστω ότι η f είναι μία RFIF που προκύπτει από το RIFS $\{\mathbb{R}^2, w_{1-N}, P\}$ όπου

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ F_i(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x + b_i \\ s_i y + q_i(x) \end{pmatrix},$$

με $|s_i| < a_i$, $i = 0, 1, \dots, N$ και σχετίζεται με τα σημεία παρεμβολής των συνόλων

$$\Delta = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2, \quad N \in \mathbb{N}, \quad N \geq 2$$

$$\hat{\Delta} = \{(\hat{x}_j, \hat{y}_j) : j = 0, 1, \dots, M\} \subset \mathbb{R}^2, \quad M \in \mathbb{N}, \quad M \geq 2$$

και την απεικόνιση \mathbb{J} όπως την ορίσαμε.

Αν

$$\tilde{f}(x) = \tilde{y}_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad (2.23)$$

τότε η συνάρτηση \tilde{f} είναι η RFIF που προκύπτει από το RIFS $\{\mathbb{R}^2, \tilde{w}_i, P\}$, με

$$\tilde{w}_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x + b_i \\ \tilde{s}_i y + \tilde{q}_i(x) \end{pmatrix}$$

όπου $\tilde{s}_i = a_i \cdot s_i$,

$$\tilde{q}_i(x) = \tilde{y}_{i-1} - a_i s_i \hat{y}_{j-1} + a_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^x q_i(t) dt,$$

για $i = 0, 1, \dots, N$, $j = \mathbb{J}(i)$ και $\hat{y}_j = \tilde{y}_{\mathbb{I}(j)}$, όπου $\mathbb{I}(j) = i$ αν $x_i = \hat{x}_j$.

Η συνάρτηση \tilde{f} σχετίζεται με τα σημεία παρεμβολής

$$\Delta = \{(x_i, \tilde{y}_i) : i = 0, 1, \dots, N\}, \quad \hat{\Delta} = \{(\hat{x}_j, \hat{y}_j) : j = 0, 1, \dots, M\}$$

και την απεικόνιση \mathbb{J} .

Το σημείο \tilde{y}_0 είναι αυθαίρετο ενώ τα σημεία $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N$ υπολογίζονται από το σύστημα $\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + a_i s_i (\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}) + a_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^{\hat{x}_j} q_i(t) dt$, για $i = 1, 2, \dots, N$, $j = \mathbb{J}(i)$.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \tilde{f}(L_i(x)) &= \tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{L_i(x)} f(t) dt = \tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x_{i-1}} f(t) dt + \int_{x_{i-1}}^{L_i(x)} f(t) dt = \\ &= \tilde{y}_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{L_i(x)} f(t) dt, \end{aligned}$$

χρησιμοποιήσαμε την (2.23) για $x = x_{i-1}$.

Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = L_i(u)$, $dt = a_i du$ τότε

$$\tilde{f}(L_i(x)) = \tilde{y}_{i-1} + a_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^x f(L_i(u)) du,$$

όπου $j = \mathbb{J}(i)$.

Χρησιμοποιώντας την σχέση $f(L_i(t)) = s_i f(t) + q_i(t)$ για $t \in [\hat{x}_{j-1}, \hat{x}_j]$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{f}(L_i(x)) &= \tilde{y}_{i-1} + a_i s_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^x f(t) dt + a_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^x q_i(t) dt \\ &= \tilde{y}_{i-1} + a_i s_i \int_{x_0}^x f(t) dt - a_i s_i \int_{x_0}^{\hat{x}_{j-1}} f(t) dt + a_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^x q_i(t) dt \\ &= \tilde{y}_{i-1} + a_i s_i (\tilde{f}(x) - \tilde{y}_0) - a_i s_i (\hat{y}_{j-1} - \tilde{y}_0) + a_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^x q_i(t) dt. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(L_i(x)) &= \tilde{y}_{i-1} + a_i s_i (\tilde{f}(x) - \hat{y}_{j-1}) + a_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^x q_i(t) dt \\ &= \tilde{s}_i \tilde{f}(x) + \tilde{q}_i(x). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Έτσι η \tilde{f} είναι μία RFIF όπως περιγράφεται στο θεώρημα. Θέτοντας στην (2.24) $x = \hat{x}_j$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = \mathbb{J}(i)$ παίρνουμε το σύστημα

$$\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + a_i s_i (\hat{y}_j - \hat{y}_{j-1}) + a_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^{\hat{x}_j} q_i(t) dt,$$

για $i = 1, 2, \dots, N$, $j = \mathbb{J}(i)$.

Άρα η RFIF \tilde{f} παρεμβάλλεται στα σημεία $\{(x_1, \tilde{y}_1), (x_2, \tilde{y}_2), \dots, (x_N, \tilde{y}_N)\}$. \square

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.1 Έστω f, \tilde{f} δύο RFIF που προκύπτουν από τα RIFS

$$\{\mathbb{R}^2, w_{1-N}, P\}, \quad \{\mathbb{R}^2, \tilde{w}_{1-N}, P\}$$

αντίστοιχα όπου

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ s_i y + q_i(x) \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ \tilde{s}_i y + \tilde{q}_i(x) \end{pmatrix},$$

με $|s_i| < 1$, $|\tilde{s}_i| < 1$, για $i = 1, 2, \dots, N$. Οι f, \tilde{f} παρεμβάλλονται στα σημεία

$$\Delta = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, N\}, \quad \hat{\Delta} = \{(\hat{x}_i, \hat{y}_i) : i = 0, 1, \dots, M\}$$

και

$$\tilde{\Delta} = \{(x_i, \tilde{y}_i) : i = 0, 1, \dots, N\}, \quad \hat{\tilde{\Delta}} = \{(\hat{x}_i, \hat{\tilde{y}}_i) : i = 0, 1, \dots, M\},$$

αντίστοιχα.

Έχουμε ότι $\tilde{f}' = f$, αν και μόνο αν

$$\tilde{s}_i = a_i s_i \quad \text{και} \quad \tilde{q}'_i(x) = a_i q_i(x), \quad \text{για} \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.25)$$

Απόδειξη.

Λόγω του θεωρήματος 2.4 προκύπτει το “ευθύ” του συγκεκριμένου πορίσματος.

Αντίστροφα:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_i) - \tilde{f}(x_{i-1}) &= \tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1} \\ &= \tilde{F}_i(\hat{x}_j, \hat{\tilde{y}}_j) - F_i(\hat{x}_{j-1}, \hat{y}_{j-1}) \\ &= a_i s_i \hat{\tilde{y}}_j + \tilde{q}_i(\hat{x}_j) - a_i s_i \hat{y}_{j-1} - \tilde{q}_i(\hat{x}_{j-1}) \\ &= a_i s_i (\hat{\tilde{y}}_j - \hat{y}_{j-1}) + a_i \int_{\hat{x}_{j-1}}^{\hat{x}_j} q_i(t) dt. \end{aligned}$$

Άρα τα $\tilde{y}_i, \tilde{y}_{i-1}$ πληρούν την σχέση του θεωρήματος 2.4. Δηλαδή η \tilde{f}' είναι η RFIF που κατασκευάζεται από $\{\mathbb{R}^2, \tilde{w}_{1-N}, P\}$ και λόγω των 2.25 προκύπτει ότι $\tilde{f}' = f$. \square

Είναι εύκολο να αποδείξουμε, με ανάλογο τρόπο το Θεώρημα 2.4 ότι ισχύει το ε-ξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5 Έστω το RIFS $\{\mathbb{R}^2, w_{1-N}, P\}$ με ελκυστή το γράφημα μιας RFIF που αντιστοιχεί στα σημεία των συνόλων $\Delta, \hat{\Delta}$, όπου

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ F_i(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x + b_i \\ s_i y + q_i(x) \end{pmatrix}$$

με

$$|s_i| < a_i^n, \quad q_i \in C^n([x_0, x_N]).$$

Έστω

$$F_{k,i}(x, y) = \frac{s_i y + q_i^{(k)}(x)}{s_i^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

και οι αριθμοί $y_{k,i}$ να είναι λύσεις του συστήματος

$$y_{k,i-1} = F_{k,i}(\hat{x}_{j-1}, \hat{y}_{k,j-1}) = \frac{a_i \hat{y}_{k,j-1} + q_i^{(k)}(\hat{x}_{j-1})}{s_i^k}$$

$$y_{k,i} = F_{k,i}(\hat{x}_j, \hat{y}_{k,j}) = \frac{a_i \hat{y}_{k,j} + q_i^{(k)}(\hat{x}_j)}{s_i^k}$$

για $k = 1, 2, \dots, n$, όπου $y_{0,i} = y_i$, $\hat{y}_{0,j} = \hat{y}_j$, $F_{0,i} = F_i$ και $\hat{y}_{k,j} = y_{k,\mathbb{I}(j)}$.

Αν $y_i = F_i(\hat{x}_{\mathbb{I}(i)}, \hat{y}_{\mathbb{I}(i)})$, $y_{i-1} = F_i(\hat{x}_{\mathbb{I}(i)-1}, \hat{y}_{\mathbb{I}(i)-1})$ και $F_{k,i-1}(\hat{x}_{\mathbb{I}(i)-1}, \hat{y}_{k,\mathbb{I}(i)-1}) = F_{k,i}(\hat{x}_{\mathbb{I}(i)-1}, \hat{y}_{k,\mathbb{I}(i)-1})$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ και $i = 1, 2, \dots, N$, τότε το RIFS $\{\mathbb{R}^2, w_{1-N}, P\}$ προσδιορίζει μία RFIF $f \in C^n([x_0, x_N])$ και η $f^{(k)}$ είναι η RFIF που προσδιορίζεται από το RIFS $\{\mathbb{R}^2, w_{k,1-N}, P\}$ με

$$w_{k,i} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ F_{k,i}(x, y) \end{pmatrix}$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ και $i = 1, 2, \dots, N$, και σχετίζεται με τα σημεία των συνόλων $\Delta_k = \{(x_i, y_{k,i}) : i = 0, 1, \dots, N\}$, $\hat{\Delta}_k = \{(\hat{x}_j, \hat{y}_{k,j}) : j = 0, 1, \dots, M\}$.

2.4 Ερμιτιανά Πολυώνυμα

Έστω ένα διάστημα $[a, b]$. Θέλουμε να βρούμε ένα πολυώνυμο P βαθμού $2p+1$ για το οποίο να ισχύει

$$P^{(k)}(a) = a_k, \quad P^{(k)}(b) = \beta_k,$$

όπου a_k, β_k δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί, για $k = 0, 1, \dots, p$. Αποδεικνύεται ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται Ερμιτιανό Πολυώνυμο. Μια γενικότερη έννοια είναι αυτή της Ερμιτιανής Συνάρτησης.

Έστω μια δοσμένη διαμέριση $D : x_0 < x_1 < \dots < x_N$ ενός διαστήματος $[x_0, x_N]$, και $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Τότε ο χώρος των ερμιτιανών συναρτήσεων τάξης p , \mathcal{H}_D^{p+1} ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{H}_D^{p+1} = \{\phi : [x_0, x_N] \rightarrow \mathbb{R}; \phi \in C^p[x_0, x_N], \phi|_{I_i} \in P_{2p+1}, i = 1, 2, \dots, N\}$$

όπου ο χώρος P_{2p+1} αποτελείται από τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ $2p + 1$. Για να προσεγγίσουμε μία δοσμένη συνάρτηση $y \in C^p[x_0, x_N]$ με μία ερμιτιανή συνάρτηση $\phi \in \mathcal{H}_D^{p+1}$ αρκεί τα πολυώνυμα $Q_i = \phi|_{I_i}$ να επιλεγούν έτσι ώστε

$$Q_i^{(k)}(x_{i-1}) = y^{(k)}(x_{i-1}), \quad Q_i^{(k)}(x_i) = y^{(k)}(x_i), \quad \text{για } k = 0, 1, \dots, p.$$

Έχει αποδειχθεί ότι η λύση σε αυτό το πρόβλημα υπάρχει και είναι μοναδική. Περισσότερες πληροφορίες για όσα αναφέρονται παραπάνω βλέπε [4].

2.5 Περιοδικές Ερμιτιανές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής (Hermite Recurrent Fractal Interpolation Functions, HRFIF)

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσεγγίσουμε το Ερμιτιανό Fractal πρόβλημα παρεμβολής χρησιμοποιώντας περιοδικές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής. Οι M.A. Navascues, M.V. Sebastian, βλέπε [NS04a], ασχολήθηκαν με τα Ερμιτιανά Fractal προβλήματα παρεμβολής χρησιμοποιώντας Fractal συναρτήσεις παρεμβολής, που κατασκευάζονται μέσω IFS. Εμείς θα ασχοληθούμε με το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας Fractal συναρτήσεις παρεμβολής που προέρχονται από περιοδικές IFS.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6 Έστω $D_x : x_0 < x_1 < \dots < x_N$ μία διαμέριση του $[x_0, x_N]$, ($N \geq 2$) και $\hat{D}_x : \hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_M$, ($M \geq 2$) ένα υποσύνολό της, τέτοιο ώστε $\hat{x}_0 = x_0$, $\hat{x}_M = x_N$, όπου $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ και $J_j = [\hat{x}_{j-1}, \hat{x}_j]$. Επίσης, θεωρούμε ένα σύνολο σημείων $D_y = \{y_{k,i}, k = 0, 1, \dots, p, i = 0, 1, \dots, N\}$.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς s_1, s_2, \dots, s_N ισχύει $|s_i| < |a_i|^p$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$, όπου $a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}}$ τότε υπάρχει μία μοναδική FIF $f \in C^p$ για την οποία $f^{(k)}(x_i) = y_{k,i}$, $k = 0, 1, \dots, p$, $i = 0, 1, \dots, N$. Η f κατασκευάζεται από το RIFS $\{\mathbb{R}^2, w_{1-N}, P\}$ με

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x + b_i \\ s_i y + q_i(x) \end{pmatrix},$$

όπου $q_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ $2p + 1$, P ο στοχαστικός πίνακας όπως έχει οριστεί πιο πάνω.

Απόδειξη.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\mathbb{I} : \{0, 1, \dots, M\} \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}$ ως εξής: $\mathbb{I}(j) = i$ αν $\hat{x}_j = x_i$. Έτσι κατασκευάζουμε το σύνολο $\hat{D}_y = \{\hat{y}_{k,j} k = 0, 1, \dots, p, i = 0, 1, \dots, N\} \subseteq D_y$ με $\hat{y}_{k,j} = y_{k,\mathbb{I}(j)}$. Οι συντελεστές του πολυωνύμου $q_i(x)$ υπολογίζονται μέσω του

συστήματος εξισώσεων:

$$F_{k,i}(\hat{x}_{j-1}, \hat{y}_{k,j-1}) = \frac{s_i \hat{y}_{k,j-1} + q_i^{(k)}(\hat{x}_{j-1})}{a_i^k} = y_{k,i-1} \quad (2.26)$$

$$F_{k,i}(\hat{x}_j, \hat{y}_{k,j}) = \frac{s_i \hat{y}_{k,j} + q_i^{(k)}(\hat{x}_j)}{a_i^k} = y_{k,i} \quad (2.27)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις προσδιορίζουν ένα σύστημα $2p + 2$ εξισώσεων με $2p + 2$ αγνώστους το οποίο μπορεί να γραφεί απλούστερα ως εξής:

$$(q_i \circ L_i^{-1})^{(k)}(x_{i-1}) = x_{k,i-1} - \frac{s_i \hat{y}_{k,j-1}}{a_i^k}$$

$$(q_i \circ L_i^{-1})^{(k)}(x_i) = x_{k,i} - \frac{s_i \hat{y}_{k,j}}{a_i^k}.$$

Δηλαδή το $q_i \circ L_i^{-1}$ είναι ένα ερμιτιανό πολυώνυμο βαθμού p , $i = 1, 2, \dots, N$. Άρα λόγω της ύπαρξης και της μοναδικότητας της λύσης των ερμιτιανών πολυωνύμων το παραπάνω γραμμικό σύστημα έχει ακριβώς μία λύση. Εξ'αλλου ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 2.5, δηλαδή

$$F_{k,i-1}(\hat{x}_{\mathbb{J}(i-1)}, \hat{y}_{k,\mathbb{J}(i-1)}) = F_{k,i}(\hat{x}_{\mathbb{J}(i)}, \hat{y}_{k,\mathbb{J}(i)}) = y_{k,i-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Άρα υπάρχει $f \in C^p([x_0, x_N])$ η οποία προέρχεται από το εν λόγω RIFS. \square

2.5.1 Κυβικές Περιοδικές Ερμιτιανές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής

Θα ασχοληθούμε με Κυβικές Περιοδικές Ερμιτιανές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής (HRFIF), δηλαδή το πολυώνυμο $q(x)$ είναι τρίτου βαθμού. Στην περίπτωση αυτή σε κάθε σημείο παρεμβολής (x_i, y_i) χρειαζόμαστε επιπλέον και την παράγωγο του q στη θέση αυτή. Δηλαδή κάθε σημείο παρεμβολής πλέον καθορίζεται ως (x_i, y_i, y'_i) . Οπότε τα σύνολα ανάλογα με πριν γίνονται :

$$D = \{(x_0, y_0, y'_0), (x_1, y_1, y'_1), \dots, (x_N, y_N, y'_N)\},$$

$$\hat{D} = \{(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{y}'_0), (\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{y}'_1), \dots, (\hat{x}_N, \hat{y}_N, \hat{y}'_N)\}.$$

Οι απεικονίσεις w_i θα έχουν την μορφή

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ F_i(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x + b_i \\ s_i y + q_i(x) \end{pmatrix}$$

όπου το πολυώνυμο $q_i(x)$ είναι της μορφής $q_i(x) = A_i x^3 + B_i x^2 + C_i x + D_i$.

Οι συντελεστές του πολυωνύμου υπολογίζονται από το σύστημα που προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2.26)-(2.27).

Έχουμε δηλαδή τις σχέσεις :

$$q_i(\hat{x}_{j-1}) = y_{i-1} - s_i \hat{y}_{j-1} \quad (2.28)$$

$$q_i(\hat{x}_j) = y_i - s_i \hat{y}_j \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{a_i} q'_i(\hat{x}_{j-1}) = y'_{i-1} - \frac{s_i \hat{y}'_{j-1}}{a_i} \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{a_i} q'_i(\hat{x}_j) = y'_i - \frac{s_i \hat{y}'_j}{a_i}. \quad (2.31)$$

Και έτσι καταλήγουμε στο σύστημα

$$A_i \hat{x}_{j-1}^3 + B_i \hat{x}_{j-1}^2 + C_i \hat{x}_{j-1} + D_i = y_{i-1} - s_i \hat{y}_{j-1} \quad (2.32)$$

$$A_i \hat{x}_j^3 + B_i \hat{x}_j^2 + C_i \hat{x}_j + D_i = y_i - s_i \hat{y}_j \quad (2.33)$$

$$3A_i \hat{x}_{j-1}^2 + 2B_i \hat{x}_{j-1} + C_i = a_i y'_{i-1} - s_i \hat{y}'_{j-1} \quad (2.34)$$

$$3A_i \hat{x}_j^2 + 2B_i \hat{x}_j + C_i = a_i y'_i - s_i \hat{y}'_j. \quad (2.35)$$

Το σύστημα αυτό λύνεται πολύ εύκολα με την χρήση της matlab, αν θεωρήσουμε ως πίνακα G τους συντελεστές των A_i, B_i, C_i, D_i και ως πίνακα στήλη g_0 τους σταθερούς όρους του δεύτερου μέλους. Έχουμε δηλαδή

$$G \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{pmatrix} = g_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{pmatrix} = G^{-1} g_0. \quad (2.36)$$

Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τα παραπάνω προκύπτει ο αλγόριθμος σε matlab που υπάρχει στο παράρτημα. Παρακάτω υπάρχει εφαρμογή του.

Αν χρησιμοποιήσουμε τα σύνολα

$$D = \{(0 \ 11 \ 0.8), (0.2 \ 9 \ 0.1), (0.5 \ 10 \ -0.3), (0.7 \ 12 \ 0.2), (0.85 \ 9 \ -0.9), (1.0 \ 10 \ 0.4)\}$$

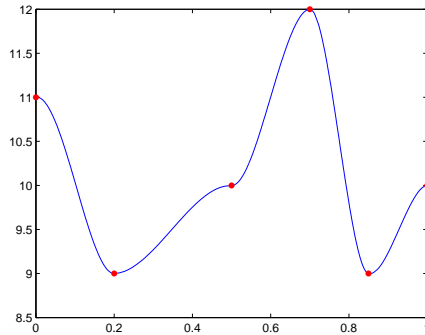
και

$$\hat{D} = \{(0 \ 11 \ 0.8), (0.2 \ 9 \ 0.1), (0.7 \ 12 \ 0.2), (1.0 \ 10 \ 0.4)\}$$

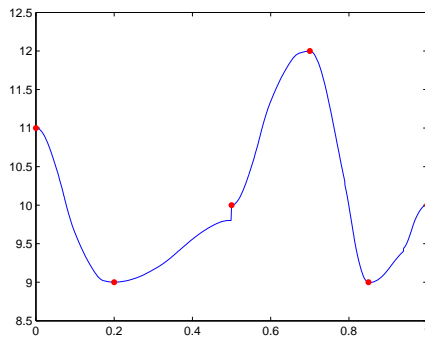
παίρνουμε τα σχήματα 2.6, 2.7 , 2.8 με διαφορετικά σύνολα συντελεστών συστολής.

Παρατήρηση: Εάν λάβουμε $\hat{\Delta} = \{(x_0, y_0), (x_N, y_N)\}$ λαμβάνουμε την κατασκευή των Navascues, Sebastian. Εάν, επιπλέον επιλέξουμε $s_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$ τότε η συνάρτηση παρεμβολής λύνει το γνωστό πρόβλημα παρεμβολής με Ερμιτιανή συνάρτηση.

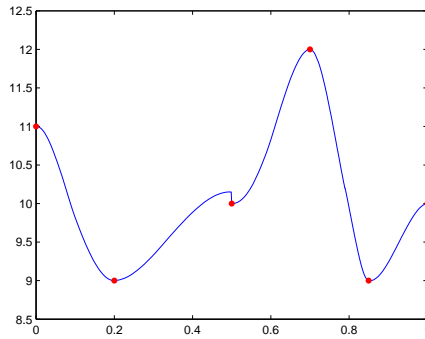
2.5. ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΕΡΜΙΤΙΑΝΕΣ FRACTAL ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ
(HERMITE RECURRENT FRACTAL INTERPOLATION FUNCTIONS, HRFIF)



Σχήμα 2.6: Στο παραπάνω σχήμα χρησιμοποιήσαμε τους συντελεστές συστολής $S = \{-0.01, 0.005, -0.008, -0.003, 0.007\}$. Με κόκκινο χρώμα φαίνονται τα σημεία παρεμβολής.



Σχήμα 2.7: Στο παραπάνω σχήμα χρησιμοποιήσαμε τους συντελεστές συστολής $S = \{0.19, 0.199, -0.18, -0.193, 0.197\}$. Με κόκκινο χρώμα φαίνονται τα σημεία παρεμβολής.



Σχήμα 2.8: Στο παραπάνω σχήμα χρησιμοποιήσαμε τους συντελεστές συστολής $S = \{0.1 - 0.15 \ 0.08 - 0.13 \ 0.07\}$. Με κόκκινο χρώμα φαίνονται τα σημεία παρεμβολής.

Κεφάλαιο 3

FRACTAL ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Ο Peter Massopust ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε Fractal επιφάνειες παρεμβολής όπου τα σημεία των δεδομένων βρίσκονταν σε κορυφές τριγώνου, βλέπε [Mas90], [Mas94]. Η κατασκευή τους δεν επιτρέπει τυχαίες τιμές στα δεδομένα. Μετά οι Gerónimo και Hardin γενίκευσαν την κατασκευή του Massopust, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε γενικότερα σύνολα δεδομένων, πάντοτε σε τριγωνικά χωρία, βλέπε [GH93].

Ο Nailiang Zhao έδωσε μία ακόμη πιο γενική κατασκευή χρησιμοποιώντας affine αλλά και μη affine απεικονίσεις με αυθαίρετα επιλεγμένους συντελεστές συστολής επίσης σε τριγωνικά χωρία. Για να αποφύγει τη χρήση συνευθειακών σημείων παρεμβολής στα σύνορα του χωρίου, χρησιμοποίησε την έννοια της “Περιστροφικής Τριγωνοποίησης” (Consistent Triangulation), βλέπε [Zha96].

Στην συνέχεια, οι H.Xie και H.Sun χρησιμοποίησαν Bivariate απεικονίσεις σε δεδομένα που είναι τοποθετημένα σε ορθογώνιο πλέγμα, με αυθαίρετους συντελεστές συστολής και χωρίς καμία συνθήκη για συνοριακά δεδομένα, βλέπε [XS97]. Η κατασκευή τους οδηγεί σε ελκυστές που δεν είναι γενικά γραφήματα συνεχών συναρτήσεων, όπως έδειξε η Δάλλα, βλέπε [Dal02]. Η κατασκευή της είχε περιορισμούς στα δεδομένα ώστε να επιτευχθεί ομαλότητα στην επιφάνεια. Τέλος ο Robert Malysz έδωσε μία παρόμοια κατασκευή, χρησιμοποιώντας αυθαίρετα συνοριακά σημεία παρεμβολής, άλλα τους ίδιους συντελεστές συστολής για όλες τις απεικονίσεις, βλέπε [Mal06].

3.1 Bivariate Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής σε Ορθογώνιο Πλέγμα με Χρήση ΠΣΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την μέθοδο κατασκευής Fractal επιφανειών που χρησιμοποιεί Περιοδικά ΣΕΣ, ειδικότερα την κατασκευή Bivariate Fractal Επιφανειών Παρεμβολής σε Ορθογώνιο Πλέγμα με χρήση ΠΣΕΣ. Η μέθοδος αυτή έγινε από τους Μπουμπούλη-Δάλλα-Δρακόπουλο, βλέπε [BDD], και φαίνεται να είναι μέχρι τώρα το καλύτερο αποτέλεσμα στην Fractal παρεμβολή όταν τα δεδομένα είναι σε πλέγμα. Θα περιγράψουμε τα βασικά βήματα της κατασκευής.
Έστω ότι

$$\Delta = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, N ; j = 0, 1, \dots, M\}$$

είναι ένα σύνολο $(N + 1) \times (M + 1)$ σημείων παρεμβολής του $X = [0, 1] \times [0, p] \times \mathbb{R}$, τέτοιων ώστε $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ και $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = p$. Επιπλέον, έστω ότι

$$\hat{\Delta} = \{(\hat{x}_k, \hat{y}_l, \hat{z}_{kl}) : k = 0, 1, \dots, K ; l = 0, 1, \dots, L\}$$

είναι ένα υποσύνολο του Δ αποτελούμενο από $(K + 1) \times (L + 1)$ σημεία, τέτοια ώστε $0 = \hat{x}_0 < \hat{x}_1 < \dots < \hat{x}_K = 1$ και $0 = \hat{y}_0 < \hat{y}_1 < \dots < \hat{y}_L = p$. Τα σημεία παρεμβολής χωρίζουν το $[0, 1] \times [0, p]$ σε $N \times M$ ορθογώνια $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 0, 1, \dots, N ; j = 0, 1, \dots, M$, τα οποία καλούμε *τομείς*, ενώ τα σημεία του $\hat{\Delta}$ χωρίζουν το $[0, 1] \times [0, p]$ σε $K \times L$ ορθογώνια $J_{kl} = [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k] \times [\hat{y}_{l-1}, \hat{y}_l]$, $k = 0, 1, \dots, K ; l = 0, 1, \dots, L$, τα οποία καλούμε *περιοχές*. Σημειώνουμε, επίσης, ότι τα σημεία του $\hat{\Delta}$ επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε περιοχή J_{kl} να περιέχει περισσότερους από έναν τομείς.

Επίσης θεωρούμε μία απεικόνιση

$$\mathbb{J} : \{1, 2, \dots, N\} \times \{1, 2, \dots, M\} \rightarrow \{1, 2, \dots, K\} \times \{1, 2, \dots, L\}$$

με $\mathbb{J}(i, j) = (\mathbb{K}(i, j), \mathbb{L}(i, j)) = (k, l)$ και συστολές w_{ij} τέτοιες ώστε

$$w_{ij} \begin{pmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{y}_{l-1} \\ \hat{z}_{k-1, l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{j-1} \\ z_{i-1, j-1} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$w_{ij} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_{l-1} \\ \hat{z}_{k, l-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_{j-1} \\ z_{i, j-1} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$w_{ij} \begin{pmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{y}_l \\ \hat{z}_{k-1, l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_j \\ z_{i-1, j} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$w_{ij} \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_l \\ \hat{z}_{k, l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \\ z_{i, j} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

για $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, 1, \dots, M$. Οι συστολές w_{ij} απεικονίζουν τις κορυφές της περιοχής J_{kl} στις κορυφές του τομέα I_{ij} . Τέλος ορίζουμε μία 1-1 απεικόνιση

$$\Phi : \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} \rightarrow \{1, \dots, NM\},$$

με $\Phi(i, j) = (i - 1)M + j$. Ένα ΠΣΕΣ, που συνδέεται με τα δεδομένα του συνόλου Δ , αποτελείται από το ΣΕΣ $\{X; w_{1-N, 1-M}, P\}$ όπου $P = (p_{nm})^{NM}$ ο στοχαστικός πίνακας όπως περιγράφηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Ένα υπερβολικό ΠΣΕΣ έχει πάντα ένα μοναδικό ελκυστή, ο οποίος δεν είναι, εν γένει, το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης, αλλά απλώς ένα συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^3 . Εδώ θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση όπου οι w_{ij} είναι απεικονίσεις της μορφής

$$w_{ij} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ij}x + b_{ij} \\ c_{ij}y + d_{ij} \\ e_{ij}x + f_{ij}y + g_{ij}xy + s_{ij}z + k_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{ij}(x) \\ \psi_{ij}(y) \\ F_{ij}(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Απεικονίσεις αυτής της μορφής ονομάζονται Bivariate απεικονίσεις. Από τις εξισώσεις (3.1)-(3.4) προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα 8 εξισώσεων 9 αγνώστων, το οποίο μπορεί να επιλυθεί ως προς a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , g_{ij} , e_{ij} , f_{ij} , k_{ij} , σε σχέση με τα σημεία παρεμβολής και τους συντελεστές s_{ij} , που θεωρούνται ως ελεύθεροι παράμετροι. Έτσι, η

λύση του συστήματος είναι:

$$a_{ij} = \frac{x_i - x_{i-1}}{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}} \quad (3.5)$$

$$b_{ij} = \frac{\hat{x}_k x_{i-1} - \hat{x}_{k-1} x_i}{\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}} \quad (3.6)$$

$$c_{ij} = \frac{y_j - y_{j-1}}{\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}} \quad (3.7)$$

$$d_{ij} = \frac{\hat{y}_l y_{j-1} - \hat{y}_{l-1} y_j}{\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1}} \quad (3.8)$$

$$g_{ij} = \frac{z_{ij} + z_{i-1,j-1} - z_{i-1,j} - z_{i,j-1}}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} - \frac{s_{ij}(\hat{z}_{kl} + \hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k-1,l} - \hat{z}_{k,l-1})}{(\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1})(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1})} \quad (3.9)$$

$$e_{ij} = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - s_{ij}(\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k,l-1}) - g_{ij}\hat{y}_{l-1}(\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k)}{\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_k} \quad (3.10)$$

$$f_{ij} = \frac{z_{i-1,j-1} - z_{i,j-1} - s_{ij}(\hat{z}_{k-1,l-1} - \hat{z}_{k-1,l}) - g_{ij}\hat{x}_{k-1}(\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l)}{\hat{y}_{l-1} - \hat{y}_l} \quad (3.11)$$

$$k_{ij} = z_{ij} - e_{ij}\hat{x}_k - f_{ij}\hat{y}_l - s_{ij}\hat{z}_{kl} - g_{ij}\hat{x}_k\hat{y}_l. \quad (3.12)$$

Η παρακάτω πρόταση μας παρέχει μια ικανή συνθήκη ώστε το ΠΣΕΣ που ορίσαμε παραπάνω να είναι υπερβολικό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1 Θεωρούμε ένα ΠΣΕΣ, όπως αυτό που ορίσαμε παραπάνω, που να συνδέεται με τα δεδομένα του συνόλου Δ . Αν για τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας ισχύει ότι

$$0 < |s_{ij}| < 1, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M,$$

τότε υπάρχει μια μετρική ορισμένη στον χώρο $[0, 1] \times [0, p] \times \mathbb{R}$, η οποία είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια μετρική, τέτοια ώστε το ΠΣΕΣ να είναι υπερβολικό.

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου οι τομείς είναι τετράγωνα πλευράς $\delta = 1/N$, οι περιοχές τετράγωνα πλευράς $\psi = 1/K$ και ο αριθμός

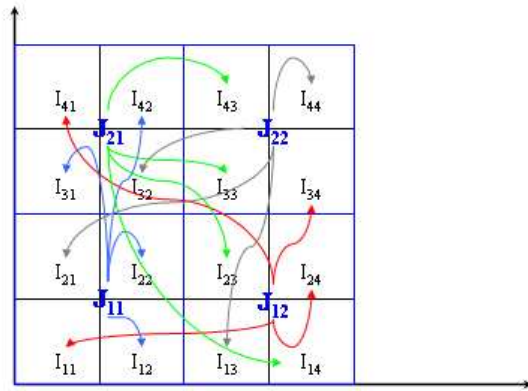
$$\alpha = \frac{\psi}{\delta} = \frac{N}{K}$$

είναι ακέραιος. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός α^2 εκφράζει το πλήθος τομέων που περιέχει κάθε περιοχή. Σε κάθε τομέα αντιστοιχούμε ένα μοναδικό ακέραιο αριθμό, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $\Phi(i, j) = (i - 1)M + j$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$.

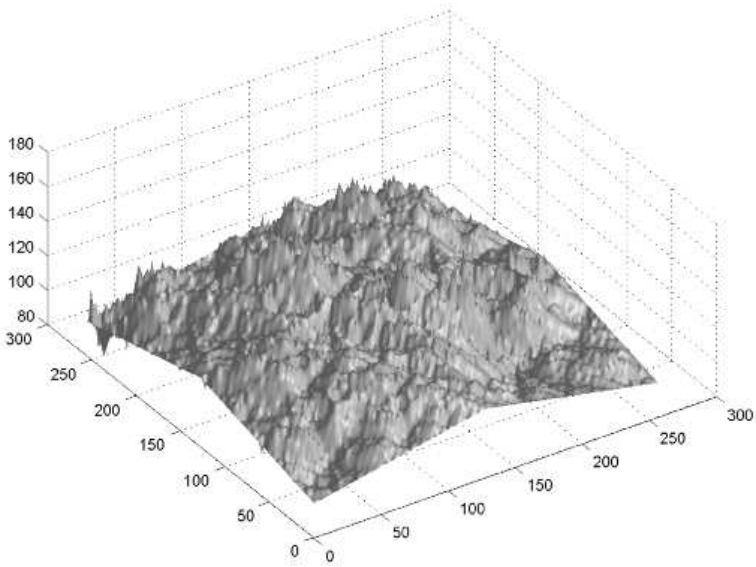
Έστω ο $NM \times NM$ πίνακας πιθανοτήτων P . Το στοιχείο p_{nm} είναι θετικό αν και μόνο αν υπάρχει μια απεικόνιση T_{ij} , η οποία απεικονίζει την περιοχή που περιέχει το n -οστό τομέα στον m -οστό τομέα. Ο πίνακας σύνδεσης C προκύπτει όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο από τον στοχαστικό πίνακα P . Αν πάρουμε ένα σημείο του συνόλου $I_{ij} \times \mathbb{R}$ με $n = \Phi(i, j)$, λέμε ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση n . Το στοιχείο p_{nm} του πίνακα πιθανοτήτων δείχνει την πιθανότητα εφαρμογής της απεικόνισης $w_{\Phi^{-1}(m)}$ σε αυτό το σημείο ώστε το σύστημα να μεταβεί στην κατάσταση m . Τονίζουμε ότι ο ελκυστής ενός ΠΣΕΣ όπως αυτό που περιγράψαμε πιο πάνω δεν είναι εν γένει το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης. Στο [2] δίνονται κατάλληλες συνθήκες ώστε αυτό να συμβαίνει. Παρακάτω δίνουμε ένα παράδειγμα μιας συνεχούς επιφάνειας που κατασκευάστηκε σύμφωνα με την μεθοδολογία που περιγράφεται στο [2].

Παραδειγμα

Έστω $M = N = 4$ και $K = L = 2$, οπότε $\alpha = 2$ (τα σημεία παρεμβολής για τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας που χρησιμοποιήσαμε βλέπε [2] σελ.119-120). Στο σχήμα 3.1 φαίνεται σε ποιούς τομείς μπορεί να μεταφερθεί η κάθε περιοχή. Στο σχήμα 3.2 φαίνεται η Bivariate Fractal Επιφάνεια Παρεμβολής που κατασκευάζεται με βάση αυτά τα δεδομένα.



Σχήμα 3.1: Τα σημεία παρεμβολής ορίζουν 16 τομείς και 4 περιοχές. Το διάνυσμα σύνδεσης είναι $V = (2, 1, 4, 3, 4, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 3, 4)$.



Σχήμα 3.2: Ο ελκυστής του παραδείγματος.

3.2 Κατασκευή Fractal Επιφανειών Παρεμβολής με την χρήση Περιοδικών Fractal Συναρτήσεων Παρεμβολής

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε μια νέα κατασκευή Fractal επιφανειών παρεμβολής σε ορθογώνιο πλέγμα τυχαίων σημείων παρεμβολής με τη βοήθεια των οποίων κατασκευάζεται η ζητούμενη επιφάνεια. Η μέθοδος αυτή οφείλεται στους Μπουμπούλη και Δάλλα, βλέπε [BD]

Θεωρούμε τα σημεία παρεμβολής $\Delta = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\} \subseteq [0, 1] \times [0, p] \times \mathbb{R}$ με $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$, $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = p$ και $x_i - x_{i-1} = \delta_i$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$, $y_j - y_{j-1} = \tilde{\delta}_j$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$. Έστω $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, $\tilde{S} = \{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_M\}$ δύο σύνολα συντελεστών συστολής και έστω $P = (p_{nm})^N$, $\tilde{P} = (\tilde{p}_{nm})^M$ δύο στοχαστικοί πίνακες με διαστάσεις $N \times N$ και $M \times M$, αντίστοιχα. Επίσης, έστω $\hat{\Delta} = \{(\hat{x}_k, \hat{y}_l, \hat{z}_{kl}) : k = 0, 1, \dots, K; l = 0, 1, \dots, L\}$ να είναι ένα υποσύνολο του Δ τέτοιο ώστε $\hat{x}_0 = 0$, $\hat{x}_K = 1$, $\hat{y}_0 = 0$, $\hat{y}_L = p$ και $\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1} = \psi_k$, $\hat{y}_l - \hat{y}_{l-1} = \tilde{\psi}_l$, $k = 0, 1, \dots, K$, $l = 0, 1, \dots, L$.

Ακόμα θεωρούμε τις απεικονίσεις \mathbb{J} και $\tilde{\mathbb{J}}$, όπως τις είχαμε ορίσει πιο πίσω, που συνδέονται με τους πίνακες P και \tilde{P} , αντίστοιχα, με $\mathbb{J}(i) = k$ και $\tilde{\mathbb{J}}(j) = l$. Τα $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ χωρίζουν το $[0, 1]$ σε N τομείς, τους I_1, I_2, \dots, I_N , ενώ τα $\{y_0, y_1, \dots, y_M\}$ χωρίζουν το $[0, p]$ σε M τόμεις, τους $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots, \tilde{I}_M$. Επιπλέον τα $\{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_K\}$ χωρίζουν το $[0, 1]$ σε K περιοχές, τις J_1, J_2, \dots, J_K , ενώ τα $\{\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_L\}$ χωρίζουν το $[0, p]$ σε L περιοχές, τις $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \dots, \tilde{J}_L$. Επιπρόσθετα ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\mathbb{I} : \{0, 1, \dots, K\} \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}$$

$$\tilde{\mathbb{I}} : \{0, 1, \dots, L\} \rightarrow \{0, 1, \dots, M\}$$

τέτοιες ώστε $\hat{x}_k = x_{\mathbb{I}(k)}$, $\hat{y}_l = y_{\tilde{\mathbb{I}}(l)}$.

Σταθεροποιούμε το x_i , για $i = 0, 1, \dots, N$, και κατασκευάζουμε affine Fractal συνάρτηση παρεμβολής u_i , η οποία παρεμβάλεται στα σημεία του συνόλου $\tilde{\Delta}_{x_i} = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : j = 0, 1, \dots, M\}$. Στην συνέχεια, για $y \in [0, p]$, κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σύστημα επαναλαμβανόμενων συναρτήσεων που σχετίζεται με τα σημεία παρεμβολής $\Delta_y = \{(x_i, y, u_i(y)) : i = 0, 1, \dots, N\}$, $\hat{\Delta}_y = \{(\hat{x}_k, y, u_{\mathbb{I}(k)}(y)) : k = 0, 1, \dots, K\}$, το σύνολο των συντελεστών συστολής S μαζί με τον πίνακα P και έτσι δημιουργείται η Fractal συνάρτηση παρεμβολής $f_y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$F : [0, 1] \times [0, p] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{έτσι ώστε } F(x, y) = f_y(x).$$

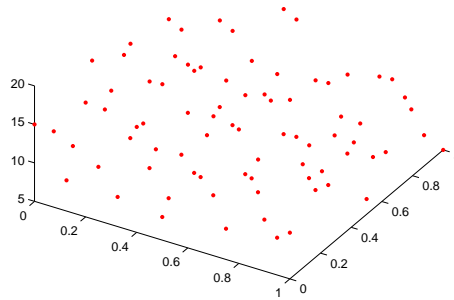
Παρόμοια, θεωρούμε τις affine Fractal συναρτήσεις παρεμβολής v_j , οι οποίες παρεμβάλλουν τα σύνολα $\Delta_{y_j} = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, N\}$, για $j = 0, 1, \dots, M$. Όπως

και πριν, για $x \in [0, 1]$ κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σύστημα επαναλαμβανόμενων συναρτήσεων που σχετίζεται με τα σημεία παρεμβολής $\tilde{\Delta}_x = \{(x, y_j, v_j(x)) : j = 0, 1, \dots, M\}$, $\tilde{\Delta}_x = \{(x, \hat{y}_l, v_{\tilde{l}(l)}(x)) : l = 0, 1, \dots, L\}$, το σύνολο των συντελεστών συστολής \tilde{S} μαζί με τον πίνακα \tilde{P} , και έτσι δημιουργείται η Fractal συνάρτηση παρεμβολής $\tilde{f}_x : [0, p] \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε την συνάρτηση

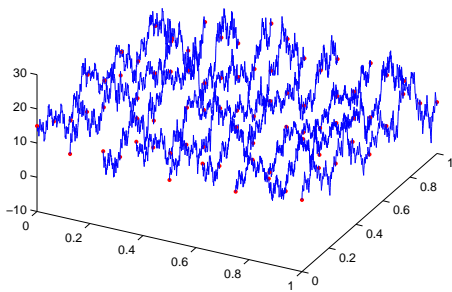
$$\tilde{F} : [0, 1] \times [0, p] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{έτσι ώστε} \quad \tilde{F}(x, y) = \tilde{f}_x(y).$$

Οι συναρτήσεις F, \tilde{F} είναι συνεχείς συναρτήσεις παρεμβολής και $F = \tilde{F}$, βλέπε [BD]. Χρησιμοποιώντας τον κώδικα σε matlab, που βρίσκεται στο παράρτημα, παίρνουμε διαδοχικά τα σχήματα 3.3 και 3.4, είτε έχοντας αρχικά σταθεροποιήσει το x_i οπότε δημιουργούνται οι u_i κ.ο.κ., είτε το y_j οπότε δημιουργούνται οι v_j κ.ο.κ.

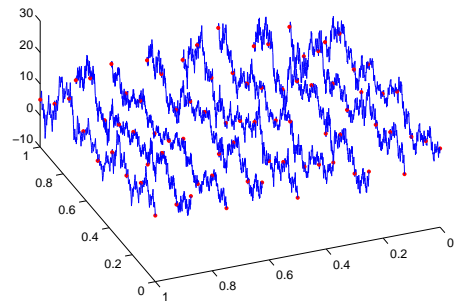
3.2. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ FRACTAL ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ FRACTAL ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ



(a)

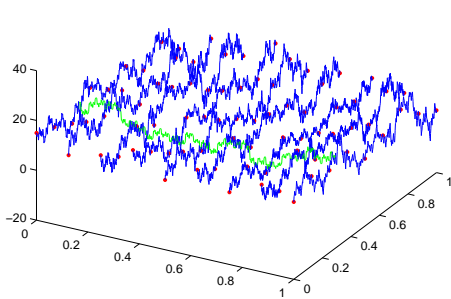


(b)

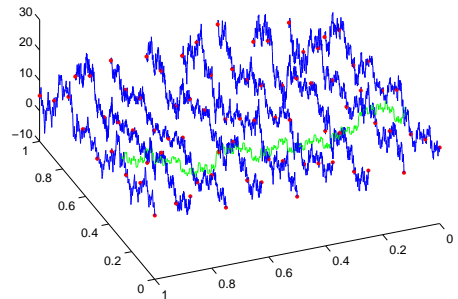


(c)

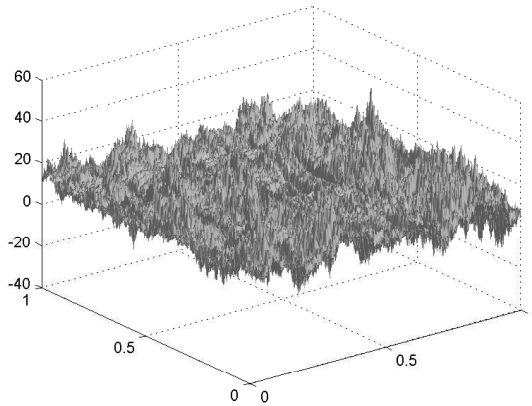
Σχήμα 3.3: Ένα παράδειγμα στο οποίο κατασκευάζονται διαδοχικά οι συναρτήσεις F και \tilde{F} . (a) Έχουμε το σύνολο Δ των σημείων παρεμβολής, όπου $N = M = 8$, $p = 1$. (b) Οι 9 συναρτήσεις παρεμβολής u_0, u_1, \dots, u_8 . (c) Οι 9 συναρτήσεις παρεμβολής v_0, v_1, \dots, v_8 .



(a)



(b)



(c)

Σχήμα 3.4: Συνέχεια του σχήματος 3.3

(a) Μια από τις FIFs f_y (πράσινη γραμμή). (b) Μια από τις FIFs f_x (πράσινη γραμμή). (c) Το γράφημα των συναρτήσεων F και \tilde{F} το οποίο είναι το ίδιο και στις 2 περιπτώσεις.

3.3 Κατασκευή Hermite Fractal Επιφανειών Παρεμβολής με την χρήση Fractal Συναρτήσεων Παρεμβολής

Χρησιμοποιώντας παρόμοια μέθοδο με την παραπάνω, μπορούμε να κατασκευάσουμε Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής τάξης C^1 , βλέπε [BDK].

Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε C^1 συναρτήσεις u_i , οι οποίες παρεμβάλουν τα σύνολα $\tilde{\Delta}_{x_i} = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : j = 0, 1, \dots, M\}$, για $i = 0, 1, \dots, N$. Επίσης θεωρούμε κάποιες άλλες τυχαίες συνεχείς συναρτήσεις u_i^* ορισμένες στο $[0, 1]$ έτσι ώστε να ικανοποιούν την συνθήκη του Lipschitz. Αυτές οι συναρτήσεις θα χρησιμοποιηθούν ως οι x -μερικές παράγωγοι της επιφάνειας που κατασκευάσαμε. Στην συνέχεια, για $y \in [0, 1]$, κατασκευάζουμε Ερμιτιανή Περιοδική Fractal Συνάρτηση Παρεμβολής f τάξης 1, όπως έχει κατασκευαστεί στην παράγραφο 2.5.1, που σχετίζεται με τα σημεία παρεμβολής $\Delta_y = \{(x_i, y, u_i(y), u_i^*(y)) : i = 0, 1, \dots, N\}$, $\Delta_y = \{(\hat{x}_k, y, u_{\mathbb{I}(k)}(y), u_{\mathbb{I}(k)}^*(y)) : k = 0, 1, \dots, K\}$ και το σύνολο των συντελεστών συστολής S μαζί με τον στοχαστικό πίνακα P . Η αντίστοιχη RIFS είναι η $\{\mathbb{R}^2; w_{y,1-N}, P\}$, όπου $w_{y,j}$ είναι της μορφής

$$w_{y,j} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x + b_i \\ s_i z + q_{y,i}(x) \end{pmatrix},$$

για $i = 1, 2, \dots, N$, όπως ορίστηκε στην παράγραφο 2.5.

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ τέτοια ώστε } F(x, y) = f_y(x).$$

Θα αποδείξουμε ότι η F είναι C^1 συνάρτηση. Θα κατασκευάσουμε μια RIFS της οποίας ο ελκυστής είναι ταυτόσημος με της F .

Ξεκινάμε με το σύνολο $\Delta = \{(x_i, y_j, z_{ij}) : i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\} \subseteq [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ με $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$, $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = 1$. Ορίζουμε $\hat{\Delta}' = \{(\hat{x}_k, y_j, z_{\mathbb{I}(k),j}) : k = 0, 1, \dots, K; j = 0, 1, \dots, M\}$ υποσύνολο του Δ . Οι αντίστοιχοι τομείς είναι οι $D_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_0, y_M]$, $i = 1, 2, \dots, N$ και οι περιοχές είναι οι $R_k = [\hat{x}_{k-1}, \hat{x}_k] \times [y_0, y_M]$. Οι απεικονίσεις w'_i κατασκευάζονται ως εξής

$$w'_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x + b_i \\ y \\ s_i z + Q_i(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(x) \\ y \\ s_i z + Q_i(x, y) \end{pmatrix},$$

για $i = 1, 2, \dots, N$, $(x, y) \in D_i$ τέτοιες ώστε $Q_i(x, y) = q_{y,i}(x)$, όπου $q_{y,i}$ είναι πολυώνυμο που χρησιμοποιούνται στην RIFS της οποίας ο ελκυστής είναι η Hermite RFIF

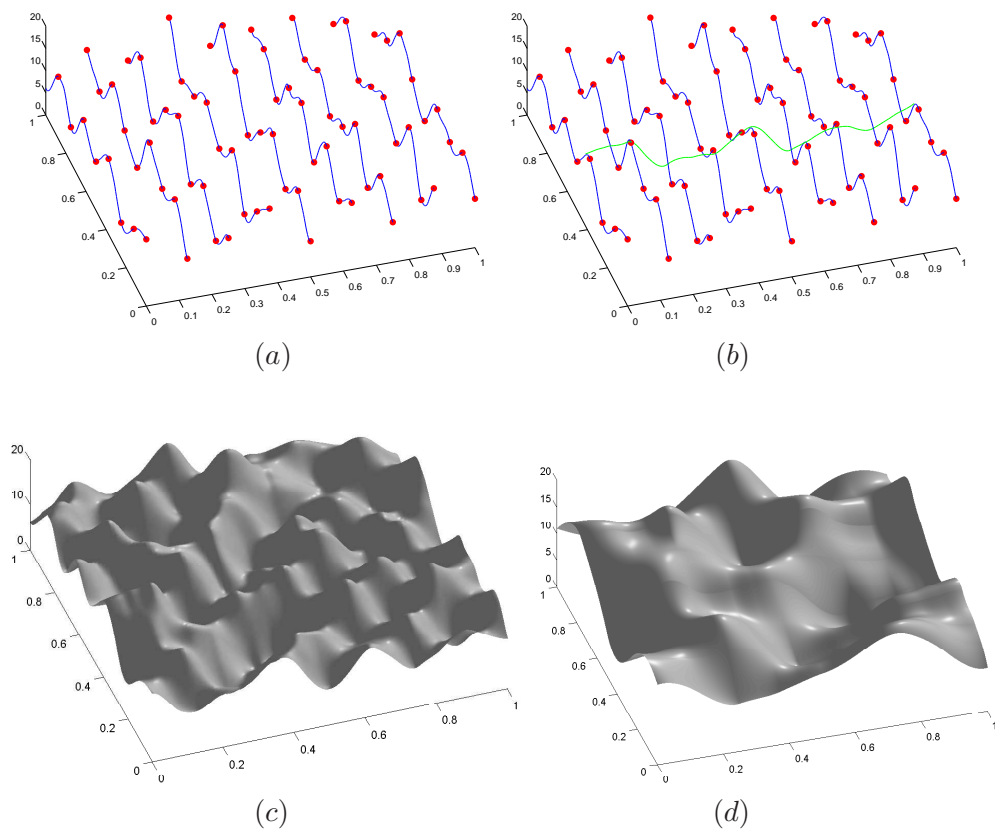
f_y . Το γεγονός ότι τα $q_{y,i}$ είναι Ερμιτιανού τύπου πολυώνυμα τάξης 3, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} q_{y,i}(x_{i-1}) &= u_{i-1}(y) - s_i u_{k-1}(y), \\ q_{y,i}(x_i) &= u_i(y) - s_i u_k(y), \\ q'_{y,i}(x_{i-1}) &= u_{i-1}^*(y) - \frac{s_i u_{k-1}^*(y)}{a_i}, \\ q'_{y,i}(x_i) &= u_i^*(y) - \frac{s_i u_k^*(y)}{a_i}, \end{aligned}$$

όπου $k = \mathbb{J}(i)$, για όλα τα $y \in [0, 1]$, εξασφαλίζει ότι το Q_i είναι μια C^1 συνάρτηση για όλα τα $i = 1, 2, \dots, N$. Θεωρούμε τον χώρο $C^1([0, 1]^2)$ εφοδιασμένο με τη συνήθη νόρμα $\|g\|_1 = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty$, $g \in C^1([0, 1]^2)$ και το σύνολο $\mathcal{F} = \{f \in C^1([0, 1]^2) : f|_{x_i \times [0, 1]} = u_i, \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_i \times [0, 1]} = u_i^*, i = 0, 1, \dots, N\}$ που είναι κλειστό υποσύνολο του $(C^1([0, 1]^2), \|\cdot\|_1)$. Ορίζουμε τον τελεστή $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $Tf(x, y) = s_i f(L_i^{-1}(x), y) + Q_i(L_i^{-1}(x), y)$, για όλα τα $(x, y) \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, ο οποίος αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι καλά ορισμένος (βασίζεται στον τρόπο που κατασκευάζεται η f_y και στο γεγονός ότι τα Q_i είναι C^1) και ότι είναι συστολή. Γι'αυτό, έχει μοναδικό σταθερό σημείο το οποίο ταυτίζεται με την F . Έτσι η F είναι μια C^1 συνάρτηση.

Στο σχήμα 3.5 χρησιμοποιήσαμε σύνολα της μορφής $\Delta = \{(x_i, y_j, z_{i,j}, z_{i,j}^*, z_{i,j}^{**}) : i = 0, 1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}$, όπου $z_{i,j}^*, z_{i,j}^{**}$ είναι οι τιμές των μερικών παραγώγων στο (x_i, y_j) ως προς x και y αντίστοιχα. Κατασκευάσαμε τις συναρτήσεις u_i ως Ερμιτιανές Περιοδικές FIF τρίτου βαθμού που σχετίζονται με τα δεδομένα των συνόλων $\{(x_i, y_j, z_{i,j}, z_{i,j}^{**}) : j = 0, 1, \dots, M\}$, για $i = 0, 1, \dots, N$. Οι συναρτήσεις u_i^* κατασκευάστηκαν ως γραμμικές συναρτήσεις παρεμβολής που διέρχονται από τα σημεία $\{(x_i, y_j, z_{i,j}^*) : j = 0, 1, \dots, M\}$, για $i = 0, 1, \dots, N$.

3.3. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ HERMITE FRACTAL ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ FRACTAL ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ



Σχήμα 3.5: Ένα παράδειγμα κατασκευής μιας C^1 συνάρτησης F . (a) Οι εννέα συναρτήσεις παρεμβολής u_0, u_1, \dots, u_8 , (b) Μια από τις FIFs f_y (η πράσινη γραμμή), (c) Το γράφημα της C^1 επιφάνειας, (d) Άλλο παράδειγμα μιας C^1 επιφάνειας χρησιμοποιώντας διαφορετικό σύνολο δεδομένων.

Κεφάλαιο 4

Προγράμματα σε Matlab

4.1 Αλγόριθμος Αιτιοκρατικών Επαναλήψεων

Το πρόγραμμα είναι υλοποιημένο σε μορφή υποπρογράμματος - συνάρτησης και χρησιμοποιεί affine απεικονίσεις στον χώρο \mathbb{R}^2 . Η συνάρτηση δέχεται ως εισόδους το αρχικό σύνολο A_0 (ένας πίνακας με τις συντεταγμένες των M αρχικών σημείων), έναν αριθμό N που εκφράζει το πλήθος των απεικονίσεων w_i , έναν αριθμό K που εκφράζει το πλήθος των επιθυμητών επαναλήψεων και έναν πίνακα W που περιέχει τους συντελεστές των affine απεικονίσεων. Ως έξοδος επιστρέφεται ένα σύνολο σημείων που προσεγγίζει τον ελκυστή.

```
%A0 is the initial set representing a Mx2 matrix
%N is the number of the mappings
%K is the number of iterations
%W is the matrix Nx6 containing the parameters of the mappings
%Each row (i) contains the 6 coefficients of the map w_i. a,b,c,s,d,e
% /      \  /  \
% |a    b|  | d |
%w=|      | + |   |
% |c    s|  | e |
% \      /  \  /
%The function returns the matrix FP  $N^K \times 2!!!$ 
```

```
function B=MYDIA_R2(A0,W,N,K) A=A0; [M,1]=size(A0); points=M; for
(i=1:K)
    for j=1:points %for every point
        x=A(j,1);
        y=A(j,2);
        for r=1:N %map the point through each map
            B(points*(r-1)+j,1)=W(r,1)*x+W(r,2)*y+W(r,5);
```

```

        B(points*(r-1)+j,2)=W(r,3)*x+W(r,4)*y+W(r,6);
    end;
end;
points=M*N^i;
A=B;
end; end;

```

4.2 Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων

Το πρόγραμμα αυτό δέχεται τις ίδιες εισόδους με το προηγούμενο πρόγραμμα, με την προσθήκη ενός πίνακα πιθανοτήτων. Δεν δίνει έξοδο, όπως το προηγούμενο πρόγραμμα, αλλά σχεδιάζει τον ελκυστή στην οθόνη.

```

%A0 is the initial point represented by a 1x2 matrix
%P is the matrix Nx1 containing the probabilities
%N is the number of the mappings
%K is the number of iterations
%W is the matrix Nx6 containing the parameters of the mappings
%Each row (i) contains the 6 coefficients of the map w_i. a,b,c,s,d,e
% /      \ /      \
% |a      b| | d |
%w=|      | + |   |
% |c      s| | e |
% \      / \      /
%The function plots the attractor!!!

```

```

function MYRIA_R2(A0,W,P,N,K) figure(1); hold on; SP(1)=P(1);
hist(1)=0; for i=2:N
    SP(i)=SP(i-1)+P(i);
    hist(i)=0;
end; X=A0(1,1); Y=A0(1,2); plot(X, Y , 'b.' , 'MarkerSize' , 2); for
(i=1:K)
    what=rand(1);
    for j=1:N
        if what<SP(j)
            r=j;
            hist(r)=hist(r)+1;
            break;
        end;
    end;
end;
nX=W(r,1)*X+W(r,2)*Y+W(r,5);
nY=W(r,3)*X+W(r,4)*Y+W(r,6);
X=nX;
Y=nY;

```

```

    plot(X, Y , 'b.' , 'MarkerSize' , 2);
end; end;

```

4.3 Αλγόριθμος Τυχαίων Επαναλήψεων για ΠΣΕΣ

```

%A0 is the initial point represented by a 1x2 matrix
%P is the matrix NxN containing the probabilities
%N is the number of the mappings
%K is the number of iterations
%W is the matrix Nx6 containing the parameters of the mappings
%first_map is the number of the first map w_i, that it is applied to A0
%Each row (i) contains the 6 coefficients of the map w_i. a,b,c,s,d,e
% /      \  /  \
% |a    b|  | d |
%w=|      | + |   |
% |c    s|  | e |
% \      /  \  /
%The function plots the attractor!!!

```

```

function B=MYRRIA_R2(A0,W,P,N,K,first_map) figure(1); hold on;

```

```

for i=1:N
    SP(i,1)=P(i,1);
    for j=2:N
        SP(i,j)=SP(i,j-1)+P(i,j);
    end;
end;

```

```

X=A0(1,1); Y=A0(1,2); plot(X, Y , 'b.' , 'MarkerSize' , 2);
r=first_map; for (i=1:K)
    nX=W(r,1)*X+W(r,2)*Y+W(r,5);
    nY=W(r,3)*X+W(r,4)*Y+W(r,6);
    X=nX;
    Y=nY
    plot(X, Y , 'b.' , 'MarkerSize' , 2);
    what=rand(1);
    for j=1:N
        if what<SP(r,j)
            r=j;
            break;
        end;
    end;
end; hold off; end;

```

4.4 Κατασκευή αυτοσυσχετισμένης FΣΠ

Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στον αλγόριθμο αιτιοκρατικών επαναλήψεων που δώσαμε στην παράγραφο 4.1 και δέχεται ως εισόδους τα σημεία παρεμβολής, τους συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας, τον αριθμό των σημείων παρεμβολής και των αριθμό των επαναληπτικών βημάτων. Τα σημεία παρεμβολής δίνονται μέσω ενός πίνακα $(N + 1) \times 2$ με το όνομα IP και οι συντελεστές κατακόρυφης αναλογίας μέσω ενός μονοδιάστατου πίνακα N στοιχείων με το όνομα S.

```
%IP is a N+1x2 matrix representing the interpolation points
%N is the number of mappings and N+1 the number of points
%S is a Nx1 matrix representing the contraction factors
%steps: is the number of iterations
%The algorithm computes and returns  $N^{(steps+1)+1}$  points
%representing the attractor of the FIF.

function P=myFIF(IP,S,N,steps)
%Here are the map parameters.
for i=1:N
    a(i)=(IP(i+1,1)-IP(i,1))/(IP(N+1,1)-IP(1,1));
    e(i)=(IP(N+1,1)*IP(i,1)-IP(1,1)*IP(i+1,1))/(IP(N+1,1)-IP(1,1));
    c(i)=(IP(i+1,2)-IP(i,2))/(IP(N+1,1)-IP(1,1))-S(i)*(IP(N+1,2)-IP(1,2))
        /(IP(N+1,1)-IP(1,1));
    f(i)=(IP(N+1,1)*IP(i,2)-IP(1,1)*IP(i+1,2))/(IP(N+1,1)-IP(1,1))
        -S(i)*(IP(N+1,1)*IP(1,2)-IP(1,1)*IP(N+1,2))/(IP(N+1,1)-IP(1,1));
end;

A_0=IP; points=N+1; for i=1:steps
    %for each section
    l=1;
    for j=1:N
        %map all the points to the section j
        for k=1:points-1
            P(l,1)=a(j)*A_0(k,1)+e(j);
            P(l,2)=c(j)*A_0(k,1)+S(j)*A_0(k,2)+f(j);
            l=l+1;
        end;
    end;
    P(l,1)=A_0(points,1);
    P(l,2)=A_0(points,2)
    points=l;
    A_0=P;
end;
```


4.5 Κατασκευή κατά τμήματα συσχετισμένης ΦΣΠ

Το πρόγραμμα αυτό είναι μια παραλλαγή του αλγορίθμου αιτιοκρατικών επαναλήψεων. Δέχεται τις ίδιες παραμέτρους με τον αλγόριθμο κατασκευής αυτοσυσχετισμένων ΦΣΠ με την εξαίρεση του πίνακα AD, ο οποίος περιγράφει τις περιοχές που απεικονίζονται σε κάθε τομέα. Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι στον τομέα $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ απεικονίζεται η περιοχή $[AD[i,1], AD[i,2]]$. Το πρόγραμμα επιστρέφει ένα σύνολο σημείων που προσεγγίζουν το γράφημα της κατά τμήματα αυτοόμοιας ΦΣΠ.

```
%IP is a N+1x2 matrix representing the interpolation points
%N is the number of mappings and N+1 is the number of points
%S is a Nx1 matrix representing the contraction factors
%AD: is a Nx4 matrix representing the interval that is mapped to each section.
%i.e. if [...] then the [...] is the interval.
%steps: is the number of iterations
%The algorithm computes and returns N^(steps+1)+1 points
%representing the attractor of the FIF.

function P=myRFIF(IP,AD,S,N,steps)
%Here are the map parameters.
for i=1:N
    a(i)=(IP(i+1,1)-IP(i,1))/(AD(i,2)-AD(i,1));
    e(i)=(AD(i,2)*IP(i,1)-AD(i,1)*IP(i+1,1))/(AD(i,2)-AD(i,1));
    c(i)=(IP(i+1,2)-IP(i,2))/(AD(i,2)-AD(i,1))-S(i)*(AD(i,4)-AD(i,3))/(AD(i,2)-AD(i,1));
    f(i)=(AD(i,2)*IP(i,2)-AD(i,1)*IP(i+1,2))/(AD(i,2)-AD(i,1))-S(i)*(AD(i,2)*AD(i,3)-
        AD(i,1)*AD(i,4))/(AD(i,2)-AD(i,1));
end;

A_0=IP; points=N+1; E=10^-14; for i=1:steps
    %for each section
    l=1;
    for j=1:N
        %find the start of the respective interval
        for start=1:points
            if abs(A_0(start,1)-AD(j,1))<E
                break;
            end;
        end;
        %find the end of the respective interval
        for end_=start+1:points
            if abs(A_0(end_,1)-AD(j,2))<E
                break;
            end;
        end;
        %map all the points to the section j
```

```

    for k=start:end-1
        P(1,1)=a(j)*A_0(k,1)+e(j);
        P(1,2)=c(j)*A_0(k,1)+S(j)*A_0(k,2)+f(j);
        l=l+1;
    end;
end;
P(1,1)=A_0(points,1);
P(1,2)=A_0(points,2);
points=l;
A_0=P;
end;

```

4.6 Κατασκευή κατά τμήματα συσχετισμένης Hermite FΣΠ

Το πρόγραμμα αυτό είναι μια παραλλαγή του παραπάνω αλγορίθμου, μόνο που σε κάθε σημείο παρεμβολής (x_i, y_i) χρειαζόμαστε επιπλέον και την παράγωγό του στη θέση αυτή. Δηλαδή κάθε σημείο παρεμβολής πλέον καθορίζεται ως (x_i, y_i, y'_i) . Το πρόγραμμα επιστρέφει ένα σύνολο σημείων που προσεγγίζουν το γράφημα της κατά τμήματα αυτοόμοιας HFΣΠ.

```

%IP is a N+1x2 matrix representing the interpolation points
%N is the number of mappings and N+1 is the number of points
%S is a Nx1 matrix representing the contraction factors
%AD: is a Nx6 matrix representing the interval that is mapped to each section.
%i.e. if [...;x_0,x_1,y_0,y_1;...] then the [x_0,x_1] is the interval.
%steps: is the number of iterations
%The algorithm computes and returns N^(steps+1)+1 points
%representing the attractor of the HRFIF.

```

```

function P=dipmyRFIF(IP,AD,S,N,steps)
%Here are the map parameters.
for i=1:N
    a(i)=(IP(i+1,1)-IP(i,1))/(AD(i,2)-AD(i,1));
    b(i)=(AD(i,2)*IP(i,1)-AD(i,1)*IP(i+1,1))/(AD(i,2)-AD(i,1));

    B=[AD(i,1)^3      AD(i,1)^2  AD(i,1)  1;
        AD(i,2)^3      AD(i,2)^2  AD(i,2)  1;
        3*(AD(i,1)^2)  2*AD(i,1)  1        0;
        3*(AD(i,2)^2)  2*AD(i,2)  1        0];

```

```

D=[IP(i,2)-S(i)*AD(i,3);
   IP(i+1,2)-S(i)*AD(i,4);
   a(i)*IP(i,3)-S(i)*AD(i,5);
   a(i)*IP(i+1,3)-S(i)*AD(i,6)] ;

Q=(inv(B))*D;

q1(i)=Q(1);
q2(i)=Q(2);
q3(i)=Q(3);
q4(i)=Q(4);

end;

A_0=IP; points=N+1; E=10^-14; for i=1:steps
    %for each section
    l=1;
    for j=1:N
        %find the start of the respective interval
        for start=1:points
            if abs(A_0(start,1)-AD(j,1))<E
                break;
            end;
        end;
        %find the end of the respective interval
        for end_=start+1:points
            if abs(A_0(end_,1)-AD(j,2))<E
                break;
            end;
        end;
        %map all the points to the section j
        for k=start:end_-1
            P(1,1)=a(j)*A_0(k,1)+b(j);
            P(1,2)=S(j)*A_0(k,2)+q1(j)*(A_0(k,1)^3)+q2(j)*(A_0(k,1)^2)+q3(j)*A_0(k,1)+q4(j);
            l=l+1;
        end;
    end;
    P(1,1)=A_0(points,1);
    P(1,2)=A_0(points,2);
    points=l;
    A_0=P;
end;

```

4.7 Bivariate Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής σε Ορθογώνιο Πλέγμα

Το πρόγραμμα αυτό παίρνει τις παραμέτρους ενός ΠΣΕΣ όπως αυτό ορίστηκε στην παράγραφο 3.1 και υπολογίζει τον ελκυστή του.

```
% This program takes a Bivariate RIFS on [0,1]x[0,p]xR and some points and produces
% after (steps) steps using DIA.
%a,b,c,d,e,f,g,s,k: the coefficients of w-map
%a: matrix 1xNO
%b: matrix 1xNO
%c: matrix 1xMO
%d: matrix 1xMO
%g,e,f,k: matrix NOxMO
%P: matrix (NO+1)x(MO+1) contains the interpolation points
%nP: matrix (NO+1)steps x (MO+1)steps contains the new points after applying the w
%(steps) times
%C: matrix 1xNOM0 shows which interval is mapped onto which section. (C~v)
%NO: how many sections per line
%M0: how many sections per column
%K0: how many intervals per line
%L0 how many intervals per column

function
nP=RIFS(a,b,c,d,e,f,g,s,k,C,P,NO,M0,K0,L0,steps,alpha,delta,R,U)

oP=P; interval_distance=delta;
section_distance=interval_distance/alpha; for r=1:steps
    [N,M]=size(oP);
    N=N-1;
    M=M-1;
    %for every section
    deiktisx=1;
    for i=1:NO
        deiktisy=1;
        for j=1:M0
            section=(i-1)*M0+j;
            interval=C(section);
            intervalcol=floor((interval-1)/ L0)+1;
```

```

intervalline=mod(interval-1, L0) +1;
intervalx=0+(intervalcol-1)*R/L0;
intervaly=0+(intervalline-1)*U/L0;
for m=1:alpha^r+1
    for n=1:alpha^r+1
        nP(deiktisx+m-1,deiktisy+n-1)=
            e(i,j)*(intervalx+(m-1)*interval_distance)
            +f(i,j)*(intervaly+(n-1)*interval_distance)
            +g(i,j)*(intervalx+(m-1)*interval_distance)
                *(intervaly+(n-1)*interval_distance)
            +s(i,j)*oP((intervalcol-1)*alpha^r+m,
                (intervalline-1)*alpha^r+n)+k(i,j);
    end;
end;
deiktisy=deiktisy+alpha^r;
end;
deiktisx=deiktisx+alpha^r;
end;
interval_distance=interval_distance/alpha;
oP=nP;
end;

```

4.8 Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής από Περιοδικές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής

Το πρόγραμμα RIFS.m παίρνει τις παραμέτρους ενός ΠΣΕΣ όπως αυτό ορίστηκε στην παράγραφο 3.2 και υπολογίζει τον ελκυστή του.

```

%FIS from RFIF
function P=myRFISF(X,Y,IP,ADx,ADy,Sx,Sy,M,N,steps)

for i=1:N+1
    for j=1:M
        ADR(j,1)=X(ADx(j,1));
        ADR(j,2)=X(ADx(j,2));
        ADR(j,3)=IP(i,ADx(j,1));
        ADR(j,4)=IP(i,ADx(j,2));
        IPoints(j,1)=X(j);
        IPoints(j,2)=IP(i,j);
    end;
    IPoints(M+1,1)=X(M+1);
    IPoints(M+1,2)=IP(i,M+1);
    temp=myRFIF(IPoints,ADR,Sx,M,steps);

```

```

    [pointsx,t]=size(temp);
    for k=1:pointsx
        f(i,k)=temp(k,2);
    end;
    clear temp,IPoints;
end;

for j=1:pointsx;
    for i=1:N
        ADR(i,1)=Y(ADy(i,1));
        ADR(i,2)=Y(ADy(i,2));
        ADR(i,3)=f(ADy(i,1),j);
        ADR(i,4)=f(ADy(i,2),j);
        IPoints2(i,1)=Y(i);
        IPoints2(i,2)=f(i,j);
    end;
    IPoints2(N+1,1)=Y(N+1);
    IPoints2(N+1,2)=f(N+1,j);
    temp2=myRFIF(IPoints2,ADR,Sy,N,steps);
    [pointsy,t]=size(temp2);
    for l=1:pointsy
        P(1,j)=temp2(1,2);
    end;
    clear temp2,IPoints2;
end;

```

4.9 Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής από Περιοδικές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής

Το πρόγραμμα myRIFS.m παίρνει τις παραμέτρους ενός ΠΣΕΣ όπως αυτό ορίσθηκε στην παράγραφο 3.2 και υπολογίζει τον ελκυστή του.

```

%FIS from RFIF
function P=myRFIS(X,Y,IP,ADx,ADy,Sx,Sy,M,N,steps)

for i=1:N+1
    for j=1:M
        ADR(j,1)=X(ADx(j,1));
        ADR(j,2)=X(ADx(j,2));
        ADR(j,3)=IP(i,ADx(j,1));
        ADR(j,4)=IP(i,ADx(j,2));
        IPoints(j,1)=X(j);
    end;
end;

```

```

        IPoints(j,2)=IP(i,j);
    end;
    IPoints(M+1,1)=X(M+1);
    IPoints(M+1,2)=IP(i,M+1);
    temp=myRFIF(IPoints,ADR,Sx,M,steps);
    [pointsx,t]=size(temp);
    for k=1:pointsx
        f(i,k)=temp(k,2);
    end;
    clear temp,IPoints;
end;

for j=1:pointsx;
    for i=1:N
        ADR(i,1)=Y(ADy(i,1));
        ADR(i,2)=Y(ADy(i,2));
        ADR(i,3)=f(ADy(i,1),j);
        ADR(i,4)=f(ADy(i,2),j);
        IPoints2(i,1)=Y(i);
        IPoints2(i,2)=f(i,j);
    end;
    IPoints2(N+1,1)=Y(N+1);
    IPoints2(N+1,2)=f(N+1,j);
    temp2=myRFIF(IPoints2,ADR,Sy,N,steps);
    [pointsy,t]=size(temp2);
    for l=1:pointsy
        P(l,j)=temp2(l,2);
    end;
    clear temp2,IPoints2;
end;
end;

```

4.10 C^1 Fractal Επιφάνειες Παρεμβολής από Ερμιτιανές-Περιοδικές Fractal Συναρτήσεις Παρεμβολής

Το πρόγραμμα RIFS.m παίρνει τις παραμέτρους ενός ΠΣΕΣ όπως αυτό ορίστηκε στην παράγραφο 3.3 και υπολογίζει τον ελκυστή του.

%HFIS from RFIF-HRFIF

```

%first step
function P=dipmyRFIS(X,Y,IP,ADx,ADy,Sx,Sy,S,M,N,steps,PX,PY) for
i=1:N+1

```

```

for j=1:M
    ADR(j,1)=X(ADx(j,1));
    ADR(j,2)=X(ADx(j,2));
    ADR(j,3)=IP(i,ADx(j,1));
    ADR(j,4)=IP(i,ADx(j,2));
    ADR(j,5)=PX(i,ADx(j,1));
    ADR(j,6)=PX(i,ADx(j,2));

    IPoints(j,1)=X(j);
    IPoints(j,2)=IP(i,j);
    IPoints(j,3)=PX(i,j);
end;
IPoints(M+1,1)=X(M+1);
IPoints(M+1,2)=IP(i,M+1);
IPoints(M+1,3)=PX(i,M+1);
temp=dipmyRFIF(IPoints,ADR,Sx,M,steps);
[pointsx1,t]=size(temp);
for k=1:pointsx1
    h(i,k)=temp(k,2);
end;
clear temp,IPoints;
end;

%second step
for i=1:N+1
    for j=1:M
        ADR(j,1)=X(ADx(j,1));
        ADR(j,2)=X(ADx(j,2));
        ADR(j,3)=IP(i,ADx(j,1));
        ADR(j,4)=IP(i,ADx(j,2));

        IPoints2(j,1)=X(j);
        IPoints2(j,2)=PX(i,j);

    end;
    IPoints2(M+1,1)=X(M+1);
    IPoints2(M+1,2)=PX(i,M+1);
    temp2=myRFIF(IPoints2,ADR,S,N,steps);
    [pointsx2,t]=size(temp2);
    for k=1:pointsx2
        g(i,k)=temp2(k,2);
    end;
end;

```



```

clear temp2,IPoints2;
end;

%third step
for j=1:pointsx1;
    for i=1:N
        ADR(i,1)=Y(ADy(i,1));
        ADR(i,2)=Y(ADy(i,2));
        ADR(i,3)=h(ADy(i,1),j);
        ADR(i,4)=h(ADy(i,2),j);
        ADR(i,5)=g(ADy(i,1),j);
        ADR(i,6)=g(ADy(i,2),j);

        IPoints3(i,1)=Y(i);
        IPoints3(i,2)=h(i,j);
        IPoints3(i,3)=g(i,j);

    end;
    IPoints3(N+1,1)=Y(N+1);
    IPoints3(N+1,2)=h(N+1,j);
    IPoints3(N+1,3)=g(N+1,j);
    temp3=dipmyRFIF(IPoints3,ADR,Sy,N,steps);
    [pointsy,t]=size(temp3);
    for l=1:pointsy
        P(l,j)=temp3(l,2);
    end;
    clear temp3,IPoints3;
end;
end;

```


Ξένη Βιβλιογραφία

- [Bar86] M. F. Barnsley. Fractal functions and interpolation. *Constr. Approx.*, 2:303–329, 1986.
- [BEHM89] B. F. Barnsley, J. Elton, D. Hardin, and P. Massopust. Hidden variable fractal interpolation functions. *SIAM J. Math. Anal.*, 20:1218–1242, 1989.
- [Bar93] M. F. Barnsley. *Fractals everywhere, 2nd ed.* Academic Press Professional, 1993.
- [BDD] P. Bouboulis, L. Dalla, and V. Drakopoulos. Construction of recurrent bivariate fractal interpolation surfaces and computation of their box-counting dimension. *J. Approx. Theory*, 141 (2), 2006, 99-117.
- [BDK] P. Bouboulis, L. Dalla, and M. Kostaki-Kosta. Construction of smooth fractal surfaces using Hermite Fractal Interpolation Functions. *Bulletin of the H.M.S. (submitted)*.
- [BD] P. Bouboulis and L. Dalla. Fractal interpolation surfaces derived from fractal interpolation functions. *J. Math. Anal. Appl. (to appear)*.
- [BEH89] M. F. Barnsley, J. H. Elton, and D. P. Hardin. Recurrent iterated function systems. *Constr. Approx.*, 5:3–31, 1989.
- [BH89] B. F. Barnsley and A. N. Harrington. The calculus of fractal interpolation functions. *J. Approx. Theory*, 57:14–43, 1989.
- [Dal02] Leoni Dalla. Bivariate fractal interpolation functions on grids. *Fractals*, 10(1):53–58, 2002.
- [GH93] J.S. Geronimo and D. Hardin. Fractal interpolation surfaces and a related 2d multiresolutional analysis. *J. Math. Anal. Appl.*, 176:561–586, 1993.

- [Mal06] R. Malysz. The Minkowski dimension of the bivariate fractal interpolation surfaces. *Chaos Solitons Fractals*, 27(5):1147–1156, 2006.
- [Mas90] P. R. Massopust. Fractal surfaces. *J. Math. Anal and Appl.*, 151(1):275–290, 1990.
- [Mas94] Peter R. Massopust. *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets*. Academic Press, 1994.
- [NS04a] M. A. Navascues and M. V. Sebastian. Generalization of hermite functions by fractal interpolation. *J. Approx. Theory*, 131:19–29, 2004.
- [XS97] H. Xie and H. Sun. The study of bivariate fractal interpolation functions and creation of fractal interpolation surfaces. *Fractals*, 5(4):625–634, 1997.
- [Zha96] Nailiang Zhao. Construction and application of fractal interpolation surfaces. *The Visual Computer*, 12:132–146, 1996.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα. *Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας*. 2000.
- [2] Παντελής Μπουμπούλης. *Fractal επιφάνειες παρεμβολής. Θεωρία και εφαρμογές στη συμπίεση εικόνας*. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών. ΕΚΠΑ, 2006.
- [3] Σ.Νεγρεπόντης,Θ.Ζαχαριάδης,Ν.Καλαμίδας και Β.Φαρμάκη. *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία*, 1997.
- [4] Ν.Παπαμιχαήλ. *Εισαγωγή στη θεωρία συναρτήσεων spline μιας μεταβλητής*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2004.