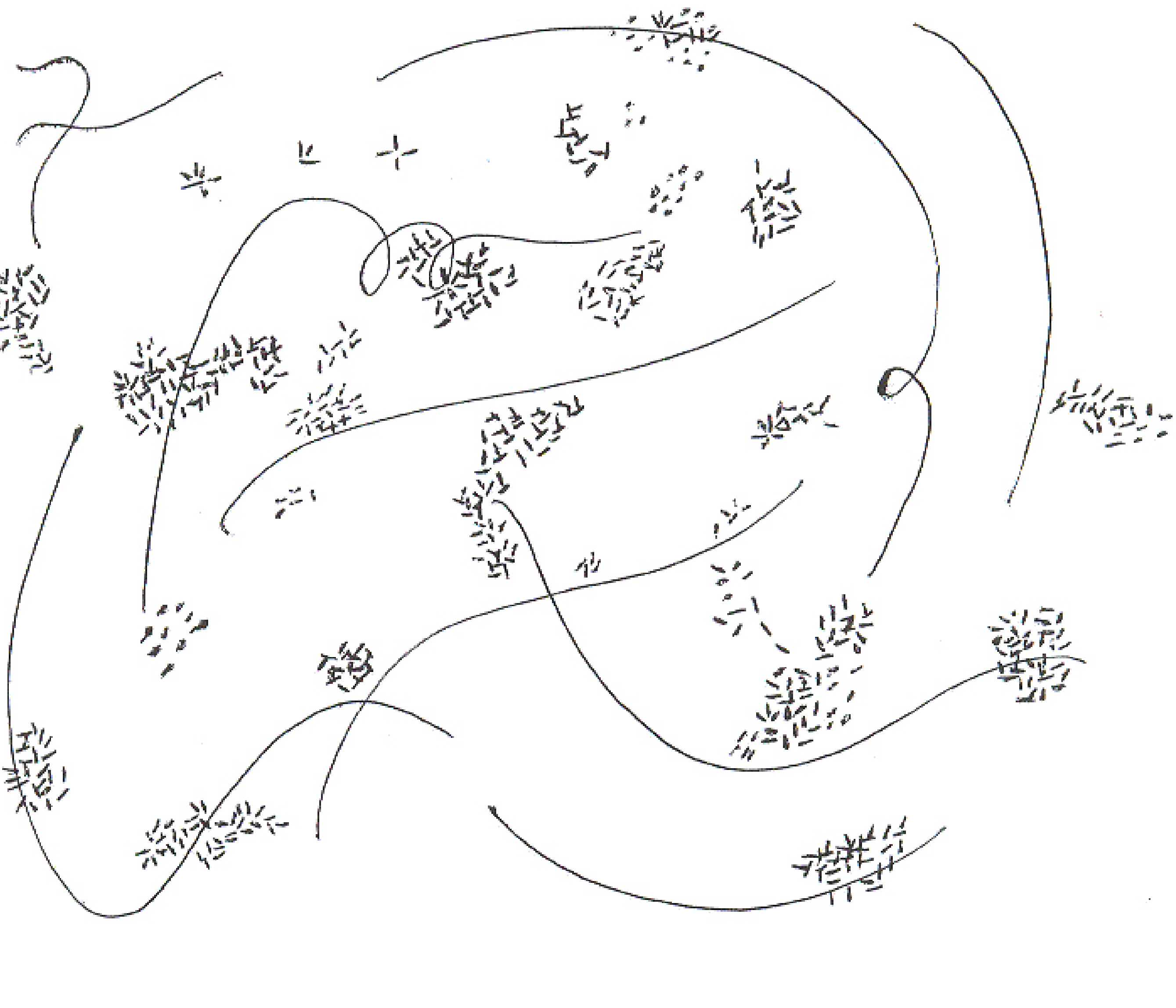
ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΗΣ Σ. ΑΝΔΡΕΑΣ
220151

ΠΥΚΝΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑ s-ΣΥΝΟΛΑ, $s \in [0,2]$

ΚΑΙ

ΔΟΜΗ ΤΩΝ 1-ΣΥΝΟΛΩΝ



Ορισμός

Έστω $F\subseteq\mathbb{R}^2$. Η πυκνότητα του F στο x ορίζεται ως:

$$\lim_{r\to0}\frac{area(F\cap B_r(x))}{area(B_r(x))}=\lim_{r\to0}\frac{area(F\cap B_r(x))}{\pi r^2}$$

Παρατήρηση. Το κλασικό θεώρημα του Lebesgue στην θεωρία πυκνότητας εξασφαλίζει την ύπαρξη του ορίου αν F σύνολο Borel και μάλιστα αυτό είναι ίσο με 1 σ.π. αν $x\in F$ και με 0 σ.π. αν $x\notin F$, υποθέτοντας ότι $area(F)>0$.

ΣΧΗΜΑ 1

Δηλαδή αν (ΣΧΗΜΑ 1) $x\in F\Rightarrow$ μπορώ να βρω δίσκο με κέντρο το x με αρκετά μικρή ακτίνα που να είναι σχεδόν όλο μέσα στο F δηλ. $\mathcal{H}^2(F^c\cap B_r(x))=area(F^c\cap B_r(x))=0$, ενώ για το $y\notin F\Rightarrow$ $\mathcal{H}^2(F\cap B_\rho(y))=0$ όπου $r,\rho>0$ οι ακτίνες των $B(x),B(y)$ αντίστοιχα.

Ομοίως αν F είναι μια C^∞ καμπύλη και $x\in F$ με x όχι ακραίο σημείο $\Rightarrow \lim_{r\to0}\frac{length(F\cap B_r(x))}{2r}=1$, ενώ αν $x'\notin F\rightarrow \lim_{r\to0}\frac{length(F\cap B_r(x'))}{2r}=0$

ΣΧΗΜΑ 2.

αφού στο δίσκο για κατάλληλο r (π.χ. $r=\frac{1}{2}d(x',F)>0$ αφού $F=\overline{F}$) $F\cap B_r(x)=\emptyset$

Οι προαναφερόμενοι ορισμοί δείχνουν πόσο μέρος του F, σε εμβαδό ή σε μήκος αντίστοιχα, συγκεντρώνεται κοντά στο x. Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι: πώς συμπεριφέρεται για F s-διάστατο σύνολο, το s-διάστατο μέτρο Hausdorff του $F\cap B_r(x)$ καθώς $r\to0$. Οδηγούμαστε φυσιολογικά στην επόμενη γενίκευση του παραπάνω ορισμού. (για $0<s<2$)

Ορισμός.

Έστω $x\in\mathbb{R}^n$ και F s-σύνολο ($0<\mathcal{H}^s(F)<+\infty$), $0<s<2$

ορίζουμε ως κάτω πυκνότητα και ως άνω πυκνότητα αντίστοιχα του F στο x:

$$\underline{D}^s(F,x)=\underline{\lim}_{r\to0}\frac{\mathcal{H}^s(F\cap B_r(x))}{(2r)^s},\quad \overline{D}^s(F,x)=\overline{\lim}_{r\to0}\frac{\mathcal{H}^s(F\cap B_r(x))}{(2r)^s},\quad (\text{αφού } |B_r(x)|=2r,\ 0<s<2)$$

αν $\underline{D}^s(F,x)=\overline{D}^s(F,x)\Rightarrow\exists$ η πυκνότητα του F στο x και γράφω $D^s(F,x)$ την κοινή τιμή.

- για $D^s(F,x)=1$, το x καλείται ομαλό σημείο του F. Αλλιώς, ακανόνιστο.
- Ένα s-σύνολο καλείται ομαλό αν σχεδόν όλα του τα σημεία είναι ομαλά (όλα τα σημεία εκτός πιθανόν από ένα σύνολο με $\mathcal{H}^s$ μέτρο 0).
- Ένα s-σύνολο καλείται ακανόνιστο αν σχεδόν όλα του τα σημεία είναι ακανόνιστα.

Πρόταση 1. (χωρίς απόδειξη).

μ μέτρο στον $\mathbb{R}^n$: $0<\mu(\mathbb{R}^n)<+\infty$, F Borel $\subseteq\mathbb{R}^n$ και $0<c<+\infty$ σταθερό. $\Rightarrow$

α) Αν $\overline{\lim}_{r\to0}\mu(B_r(x))/r^s<c\ \ \forall x\in F\Rightarrow\mathcal{H}^s(F)\geq\mu(F)/c$

β) Αν $\overline{\lim}_{r\to0}\mu(B_r(x))/r^s>c\ \ \forall x\in F\rightarrow\mathcal{H}^s(F)\leq 2^s\mu(\mathbb{R}^n)/c$

Πρόταση 2

Έστω F s-σύνολο στον $\mathbb{R}^n\Rightarrow$

α) $\underline{D}^s(F,x)=\overline{D}^s(F,x)=0$ για σχεδόν όλα τα $x\notin F$.

β) $2^{-s}\leq\overline{D}^s(F,x)\leq1$ για σχεδόν όλα τα $x\in F$.

Απόδειξη

α) Αν F κλειστό και $x \notin F$ $\Rightarrow \exists r>0 : B_r(x) \cap F = \emptyset \Rightarrow \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(F\cap B_r(x))}{(2r)^s} = 0$

για F ανοικτό δίχως δυσκολίας, η απόδειξη ολοκληρώνεται.
ή άλλης μορφής

β) για μ παίρνω το εξής μέτρο: $\mu(A) = \mathcal{H}^s(F\cap A) \Rightarrow$

i) μ μέτρο, προφανώς αφού $\mathcal{H}^s$-μέτρο.

ii) $0<\mu(\mathbb{R}^n)<+\infty$, αφού $\mu(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^s(F\cap\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^s(F)$ και F s-σύνολο δηλαδή $0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty$.

Έστω $F_1 = \{x\in F : \overline{\lim}_{r\to 0} \mu(B_r(x))/r^s < c\} = \{x\in F : \overline{\lim}_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(F\cap B_r(x))}{(2r)^s} < 2^{-s}c\} =$

$= \{x\in F : \overline{D}^s(F,x) = \overline{\lim}_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(F\cap B_r(x))}{(2r)^s} < 2^{-s}\cdot c\}$

Πρόταση 1 α) $\Rightarrow \mathcal{H}^s(F_1) \geq \mu(F_1)/c = \mathcal{H}^s(F_1)/c$ ⊛ Αν $c<1 \Rightarrow \mathcal{H}^s(F_1)=0$ ~~[illegible]~~

άρα για σχεδόν όλα τα $x\in F$ έχω $\overline{D}^s(F,x) \geq 2^{-s}$. ⊛ $\Rightarrow (c-1)\mathcal{H}^s(F_1) \geq 0$ άρα αν $c<1 \Rightarrow \mathcal{H}^s(F_1)=0$

για $\varepsilon>0$ $F_2 = \{x\in F : \overline{D}^s(F,x) > 2^{-s}c\}$ Πρόταση 1 β) $\Rightarrow \mathcal{H}^s(F_2) \leq 2^s\cdot\mu(\mathbb{R}^n)/c = 2^s\cdot\mathcal{H}^s(F)/c$.

Αν ~~[illegible]~~ σχεδόν για όλα τα $x\in F$ έχω $\overline{D}^s(F,x) \leq 1$.

$c > \max\{2^s, 2^s\mathcal{H}^s(F)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\} \Rightarrow \mathcal{H}^s(F_2) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon>0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(F_2)=0$?

Πρόταση 3.

Αν F s-σύνολο και E Borel $\subseteq$ F με $\mathcal{H}^s(E)>0 \Rightarrow$ E ομαλό αν F ομαλό, ανώμαλο αν F ανώμαλο

Απόδειξη

$(E\cap B_r(x)) \cap (((F\setminus E)) \cap B_r(x)) = (E\cap(F\setminus E))\cap B_r(x) = \emptyset \quad \forall x\in\mathbb{R}^n, \forall r>0.$

$\Rightarrow$ επειδή $F = E\cup(F\setminus E) \Rightarrow \mathcal{H}^s(F\cap B_r(x)) = \mathcal{H}^s(E\cap B_r(x)) + \mathcal{H}^s((F\setminus E)\cap B_r(x))$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{H}^s(F\cap B_r(x))}{(2r)^s} = \frac{\mathcal{H}^s(E\cap B_r(x))}{(2r)^s} + \frac{\mathcal{H}^s((F\setminus E)\cap B_r(x))}{(2r)^s}$$

όμως, για σχεδόν όλα τα $x\in E \Rightarrow \lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^s((F\setminus E)\cap B_r(x))}{(2r)^s} = 0$

$\Rightarrow$ για $r\to 0$ έχω: $\underline{D}^s(F,x) = \underline{D}^s(E,x)$ και $\overline{D}^s(F,x) = \overline{D}^s(E,x)$

Θεώρημα Egoroff (χωρίς απόδειξη)

D Borel $\subseteq \mathbb{R}^n$ και μ μέτρο με $\mu(D)<+\infty$. Έστω $f_1, f_2, \ldots$ και f συναρτήσεις $\in \mathbb{R}^D = (D\to\mathbb{R})$ και $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x\in D \Rightarrow \forall \delta>0$ $\exists E$ Borel $\subseteq D : \mu(D\setminus E)<\delta$ και $\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| \to 0$ για $n\to+\infty$ (Βελτίωση της σύγκλισης από σημειακή στο D σε ομοιόμορφη στο E Borel $\subseteq$ D)

Αφού, αν για μέτρο θεωρήσω το $\mathcal{H}^s$ μπορώ να έχω E συμπαγές.

Θεώρημα

Έστω F s-σύνολο στο $\mathbb{R}^2$ με $0<s<1 \Rightarrow$ Το F είναι ανώμαλο.

Απόδειξη.

Αρκεί να δείξω ότι σχεδόν για όλα τα $x\in F$ το $D^s(F,x)$ δεν υπάρχει. Υποθέτουμε το αντίθετο.

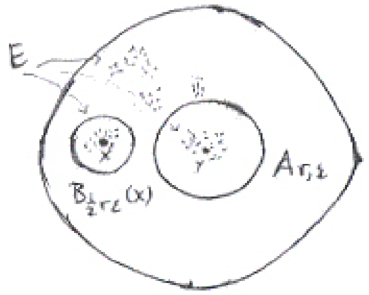
$\Rightarrow \exists\ F_1 \subseteq F$ με $\mathcal{H}^s(F_1)>0$: το $D^s(F,x)$ υπάρχει $\forall x \in F_1$. Πρόταση 2 β) $\Rightarrow \frac{1}{2} < 2^{-s} \leq D^s$

Από το θεώρημα του Egoroff βρίσκω $r_0>0$ και σύνολο Borel, συμπαγές $E \subseteq F_1 \subseteq F$ με $\mathcal{H}^s$

$\mathcal{H}^s(F\cap B_r(x)) > \frac{1}{2}(2r)^s \quad \forall x\in E, r<r_0$ ①, αφού $\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(F\cap B_r(x))}{(2r)^s} > \frac{1}{2} \quad \forall x \in F_1$

Έστω y σημείο συσσώρευσης του E. Από το y υπάρχει αφού το E περιέχει άπειρο υποσύνολο (αφού $\mathcal{H}^s(E)>0$, $0<s<1$) και E συμπαγές → έχει την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass.

Έστω $0<\varepsilon<2/3$ και $A_{r,\varepsilon} := B_{r(1+\varepsilon)}(y) \setminus B_{r(1-\varepsilon)}(y)$ (y σ.σ. → $B_{r(1+\varepsilon)}(y) \neq \emptyset$, $B_{r(1-\varepsilon)}(y) \neq \emptyset$ και επειδή $r(1+\varepsilon) > r(1-\varepsilon) \to A_{r,\varepsilon} \neq \emptyset$ για κατάλληλα r,ε)



ΣΧΗΜΑ 3

$\Rightarrow \mathcal{H}^s(F\cap A_{r,\varepsilon}) = \mathcal{H}^s(F\cap B_{r(1+\varepsilon)}(y)) - \mathcal{H}^s(F\cap B_{r(1-\varepsilon)}(y))$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{H}^s(F\cap A_{r,\varepsilon})}{(2r)^s} = \frac{(2r(1+\varepsilon))^s}{(2r)^s}\frac{\mathcal{H}^s(F\cap B_{r(1+\varepsilon)}(y))}{(2r(1+\varepsilon))^s} - \frac{(2r(1-\varepsilon))^s}{(2r)^s}\frac{\mathcal{H}^s(F\cap B_{r(1-\varepsilon)}(y))}{(2r(1-\varepsilon))^s}$$

$$\longrightarrow D^s(F,y)\left((1+\varepsilon)^s - (1-\varepsilon)^s\right). \quad ②$$

Έστω $r\to 0$. Για τις τιμές του r που φθίνουν στο 0 βρίσκω (y σ.σ.) $x\in E: |x-y|=r \Rightarrow B_{\frac{1}{2}r\varepsilon}(x) \subseteq A_{r,\varepsilon}$ (για αρκετά μικρές τιμές των βρίσκω κοντά το x) ($\frac{1}{2}r\varepsilon = \frac{1}{4}((1+\varepsilon)r-(1-\varepsilon)r)$ → $B_{\frac{1}{2}r\varepsilon}(x)\subseteq A_{r,\varepsilon}$ και μάλιστα λόγω του ότι $0<\varepsilon<2/3$ $\frac{1}{2}r\varepsilon < r(1-\varepsilon)$)

από ① έχω: $\mathcal{H}^s(F\cap B_{\frac{1}{2}r\varepsilon}(x)) > \frac{1}{2}(2\cdot\frac{1}{2}r\varepsilon)^s = \frac{1}{2}r^s\varepsilon^s \quad (\frac{1}{2}r\varepsilon < r < r_0)$

όμως $F\cap B_{\frac{1}{2}r\varepsilon}(x) \subseteq F\cap A_{r,\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2}r^s\varepsilon^s < \mathcal{H}^s(F\cap B_{\frac{1}{2}r\varepsilon}(x)) \leq \mathcal{H}^s(F\cap A_{r,\varepsilon})$

$$② \Rightarrow 2^{-s-1}\cdot\varepsilon^s \leq D^s(F,y)\left((1+\varepsilon)^s-(1-\varepsilon)^s\right) \leq D^s(F,y)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s}{k}(1-(-1)^k)\varepsilon^k\right) = D^s(F,y)(2\varepsilon s + \varepsilon^2(\ldots))$$

άρα για $\varepsilon\to 0$, $s<1$ έχω άτοπο, αφού $\frac{1}{4} \leq 2^{-s-1} \leq D^s(F,y)(2s\varepsilon^{1-s} + \varepsilon^{2-s}(\ldots)) \to 0$ δηλ. $\frac{1}{4}\leq 0$.

~~Αποδεικνύεται ότι αν s ακέραιος $\Rightarrow F$ ομαλό και αν s όχι ακέραιος $\Rightarrow F$ ακανόνιστο.~~

Γενικά για s μη ακέραιο F ακανόνιστο.

Θεώρημα διάσπασης. (ΣΧΗΜΑ 5)

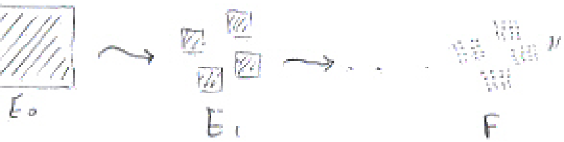
Έστω F 1-σύνολο. Το σύνολο των ομαλών σημείων του F, αντίστοιχα των ακανονίστων, σχηματίζει ένα ομαλό σύνολο, αντίστοιχα ακανόνιστο σύνολο.

Απόδειξη

Στην πρόταση 3 δείξαμε ότι αν E Borel $\subseteq F$, F 1-σύνολο ($s=1$) $\Rightarrow$ $\underline{D}^1(F,x) = \underline{D}^1(E,x)$, $\overline{D}^1(F,x) = \overline{D}^1(E,x)$. Αν για E επιλέξω το σύνολο των ομαλών ή ακανονίστων σημείων αντίστοιχα έχω το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα ομαλού 1-συνόλου : C^∞ καμπύλη, περιφέρεια κύκλου, έλλειψη.

Παράδειγμα ακανονίστου 1-συνόλου:



"Cantor dust" με $\dim_H F = \dim_B F = 1$ αφού $4\cdot(\frac{1}{4})^s = 1 \Rightarrow s = 1$

ΣΧΗΜΑ 4

Πρόταση 4.

$F\subseteq\mathbb{R}^n$ και $f:F\to\mathbb{R}^m$: $|f(x)-f(y)|\le c\,|x-y|^\alpha$, $x,y\in F$, $c>0$, $\alpha>0$ → $\forall s$ $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F))\le c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$.

Απόδειξη

Αν $\{U_i\}_{i\in I}$ ένα δ-κάλυμμα του F → επειδή $|f(F\cap U_i)|\le c|U_i|^\alpha$ ⇒ $\{f(F\cap U_i)\}_{i\in I}$ είναι ένα $c\cdot\delta^\alpha$-κάλυμμα του $f(F)$ ⇒ $\sum_{i\in I}|f(F\cap U_i)|^{s/\alpha}\le c^{s/\alpha}\sum_{i\in I}|U_i|^s$ → παίρνοντας inf έχω:
$\mathcal{H}^{s/\alpha}_{c\delta^\alpha}(f(F))\le c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s_\delta(F)$ για $\delta\to 0$ → $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F))\le c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$.

Ορισμός

Καμπύλη C είναι μια συνεχής εικόνα 1-1 απεικόνισης $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ η οποία δεν αυτοτέμνεται, έχει δύο άκρα και είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Μήκος καμπύλης ορίζεται $\mathcal{L}(C):=\sup_P\sum_{i=1}^{m_P}|x_i-x_{i-1}|$ όπου P διαμέριση του κλειστού διαστήματος από το οποίο προέρχεται η εικόνα της συνεχούς 1-1 συνάρτησης που φτιάχνει την καμπύλη. ($|P|=m_P+1$)

η C καλείται πεπερασμένου μήκους αν $\mathcal{L}(C)<+\infty$ → $C\in\mathcal{F}(K)=\{C \text{ καμπύλη} / \mathcal{L}(C)<+\infty\}$.

Λήμμα

$\mathcal{H}^1(C)=\mathcal{L}(C)$

Απόδειξη

Έστω $x,y\in C$ και $C_{x,y}$ το μεταξύ τους τμήμα. $\mathcal{H}^1(C_{x,y})\ge\mathcal{H}^1([x,y])=|x-y|$

⇒ $\forall\ x_0,\dots,x_m\in C$ → $\sum_{i=1}^m|x_i-x_{i-1}|\le\sum_{i=1}^m\mathcal{H}^1(C_{x_i,x_{i-1}})\le\mathcal{H}^1(C)$

παίρνοντας sup έχω: $\mathcal{L}(C)\le\mathcal{H}^1(C)$

Από την άλλη αν $f:[0,\mathcal{L}(C)]\to C$ η οποία αντιστοιχεί ένα t στο σημείο του C το οποίο απέχει απόσταση t από ένα ακραίο σημείο (το οποίο κάθε φορά είναι το ίδιο!)

⇒ $|f(t)-f(u)|\le|t-u|$ $\forall\ t,u\in[0,\mathcal{L}(C)]$. Πρόταση 4 ⇒ $\mathcal{H}^1(C)\le\mathcal{H}^1([0,\mathcal{L}(C)])=\mathcal{L}(C)$

f προφανώς επί

Πρόταση 5

Κάθε $C\in\mathcal{F}(K)$ είναι ομαλό 1-σύνολο.

Απόδειξη.

$C\in\mathcal{F}(K)$ ⇒ $\mathcal{L}(C)<+\infty$ και έστω p,q τα ακραία σημεία του C. → $\mathcal{L}(C)\ge|p-q|>0$

Λήμμα → $0<\mathcal{L}(C)=\mathcal{H}^1(C)<+\infty$ → C 1-σύνολο.

Έστω $x\ne p,q$ ⇒ το x χωρίζει το C στα $C_{p,x}$, $C_{x,q}$. Έστω r αρκετά μικρό (π.χ. $r=\frac{1}{2}\min\{|x-p|,|x-q|\}$) : $C_{x,q}\cap B_r(x)\setminus\{x\}\ne\emptyset$, $C_{p,x}\cap B_r(x)\setminus\{x\}\ne\emptyset$.

$\exists\ y_1,y_2\in C$: $|x-y_i|=r$, $i=1,2$ → $C_{x,y_1}\subset B_r(x)$ και $r=|x-y_1|\le\mathcal{L}(C_{x,y_1})=\mathcal{H}^1(C_{x,y_1})\le\mathcal{H}^1(C_{x,q}\cap B_r(x))$

αφού $C_{x,y_1}\subseteq C_{x,q}\cap B_r(x)$. Όμοια $C_{y_2,x}\subseteq C_{p,x}\cap B_r(x)$ → $r\le\mathcal{H}^1(C_{p,x}\cap B_r(x))$

$C=C_{p,x}\cup C_{x,q}$ → $\mathcal{H}^1(C\cap B_r(x))=\mathcal{H}^1(C_{p,x}\cap B_r(x))+\mathcal{H}^1(C_{x,q}\cap B_r(x))\ge 2r$

⇒ για αρκετά μικρό r : $\underline{D}^1(C,x)=\underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\mathcal{H}^1(C\cap B_r(x))}{2r}\ge 1$

Πρόταση 2 β) $\underline{D}^1(C,x)\le\overline{D}^1(C,x)\le 1$ → $D^1(C,x)$ ∃ και $D^1(C,x)=1$ → $\forall\ x\in C$ εκτός ...

σχεδόν έχω $D^1(C,x)$ ...

Ορισμοί

Ένα F 1-σύνολο καλείται ελεύθερο καμπυλών αν $\mathcal{H}(F\cap C)=0 \ \forall C\in \mathcal{F}(k)$.

Ένα F 1-σύνολο καλείται καμπυλωτό αν $F \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i$, $C_i\in\mathcal{F}(k)\ \forall i$, $|I|\le \aleph_0$

Πρόταση 6

Ένα καμπυλωτό σύνολο είναι ομαλό 1-σύνολο.

Απόδειξη

Αν F καμπυλωτό $\Rightarrow F\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, $C_i\in\mathcal{F}(k) \Rightarrow \forall i$ και σχεδόν όλα τα $x\in F\cap C_i$ έχουμε από πρόταση 3 και πρόταση 5: $1=\underline{D}^1(C_i,x)=\underline{D}^1(F\cap C_i,x)\le \underline{D}^1(F,x) \Rightarrow$ $\underline{D}^1(F,x)\ge 1$ σχεδόν για όλα τα $x\in F$ αλλά και γενικά σχεδόν για όλα τα $x\in F$: $\underline{D}^1(F,x)\le\overline{D}^1(F,x)\le 1$ $D^1(F,x)=1$ σχεδόν παντού $\Rightarrow$ F ομαλό.

Πρόταση 7

Αν E ομαλό σύνολο και F ακανόνιστο $\Rightarrow \mathcal{H}^1(E\cap F)=0$

Απόδειξη Έπεται από πρόταση 3 γιατί το $E\cap F$ Borel $\subseteq E,F \Rightarrow E\cap F$ ομαλό και ακανόνιστο $\Rightarrow \mathcal{H}^1(E\cap F)=0$.

Πρόταση 8

Ένα ακανόνιστο 1-σύνολο είναι ελεύθερο καμπυλών.

Απόδειξη

αν F ακανόνιστο και $C\in\mathcal{F}(k) \Rightarrow$ από πρόταση 5 έχω C ομαλό $\Rightarrow F\cap C$ υποσύνολο ενός ομαλού και ενός ακανόνιστου συνόλου $\Rightarrow \mathcal{H}^1(F\cap C)=0$ από πρόταση 7.
Άρα από ορισμό F ελεύθερο καμπυλών.

Πρόταση 9 (Χωρίς απόδειξη)

Έστω F ελεύθερο καμπυλών 1-σύνολο στον $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{D}^1(F,x)\le 3/4$ σχεδόν $\forall x\in F$.

Πόρισμα $\forall$ F 1-σύνολο και $E=\{x\in F: 3/4<\underline{D}^1(F,x)<1\} \Rightarrow \mathcal{H}^1(E)=0$.

Θεώρημα

α) Ένα 1-σύνολο στον $\mathbb{R}^2$ είναι ακανόνιστο $\Leftrightarrow$ είναι ελεύθερο καμπυλών

β) ένα 1-σύνολο στον $\mathbb{R}^2$ είναι ομαλό $\Leftrightarrow$ είναι η ένωση ενός καμπυλωτού συνόλου και ενός συνόλου με $\mathcal{H}^1$-μέτρο μηδέν.

Απόδειξη.

α) ($\Rightarrow$) Πρόταση 8.

($\Leftarrow$) Πρόταση 9 (αλλιώς $1=\underline{D}^1(F,x)\le 3/4$ σχεδόν $\forall x\in$ στο σύνολο, άτοπο).

β) ($\Leftarrow$) Πρόταση 6 Παρατηρούμε ότι αν προσθέσουμε ένα σύνολο $\mathcal{H}^1$-μέτρου μηδέν δεν επηρεάζονται οι συνθήκες.

($\Rightarrow$) Έστω F ομαλό $\Rightarrow$ Κάθε E Borel $\subseteq$ F είναι ομαλό από πρόταση 3 άρα $D^1(E,x)=1$ σχεδόν $\forall x\in E$. Από πρόταση 9 το E δεν μπορεί να είναι ελεύθερο καμπυλών, οπότε το E τέμνει κάποια $C\in\mathcal{F}(k)$ με $\mathcal{L}(C)>0$. Θα φτιάξουμε μια ακολουθία $\{C_i\}$ ... $: C_i\in\mathcal{F}(k)$ που θα καλύπτει σχεδόν όλο το F

Επιλέγω C_1 ώστε να καλύπτει αρκετό τμήμα του F. $\mathcal{H}^1(F\cap C_1)\geq\frac{1}{2}\sup\{\mathcal{H}^1(F\cap C): C\in\mathcal{F}(k)\}>0$

αν $C_1,\dots,C_k$ έχουν επιλεχθεί μ' αυτόν τον τρόπο και το $F_k=F\setminus\bigcup_{i=1}^{k}C_i$ έχει θετικό μέτρο

$\Rightarrow$ επιλέγω C_{k+1} : $\mathcal{H}^1(F_k\cap C_{k+1})\geq\frac{1}{2}\sup\{\mathcal{H}^1(F_k\cap C): C\in\mathcal{F}(k)\}>0$ ①

Αν η διαδικασία τερματίζεται σε πεπερασμένα βήματα $\Rightarrow$ το F είναι καμπυλωτό αφού θα καλύπτεται σχεδόν όλο από τα πεπερασμένα από C_i. $F=(F\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i)\cup(F\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i)$ με $F\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$ καμπυλωτό, $\mathcal{H}^1(F\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i)=0$.

αλλιώς $\infty>\mathcal{H}^1(F)\geq\sum_k\mathcal{H}^1(F_k\cap C_{k+1})$

και ισχύει μιας τα $F_k\cap C_{k+1}$ είναι ξένα: έστω $j>k$ ή $j\geq k+1$ $\Rightarrow$

$(F_k\cap C_{k+1})\cap(F_j\cap C_{j+1})=F\cap\bigcap_{i=1}^{k}C_i^c\cap C_{k+1}\cap F\cap\bigcap_{j=1}^{j}C_j^c\cap C_{j+1}=\emptyset$ αφού θα εμφανιστεί

(λόγω προσεταιριστικότητας) το $(C_{k+1}\cap C_{k+1}^c)\cap(\dots)=\emptyset$

κι άρα $\mathcal{H}^1(F_k\cap C_{k+1})\to 0$ για $k\to\infty$.

αν $\mathcal{H}^1(F\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i)>0$ $\Rightarrow$ $\exists$ μια $C\in\mathcal{F}(k)$: $\mathcal{H}^1((F\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i)\cap C)=d,\ d>0$

$\Rightarrow$ $\exists\ k_0\in\mathbb{N},\ k_0=k_0(d)$: $\mathcal{H}^1(F_{k_0}\cap C_{k_0+1})<\frac{1}{2}d$ $\to$ αλλιώς $\sum_k\mathcal{H}^1(F_k\cap C_{k+1})=+\infty$ $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^1(F)=+\infty$ άτοπο F 1-σύνολο.

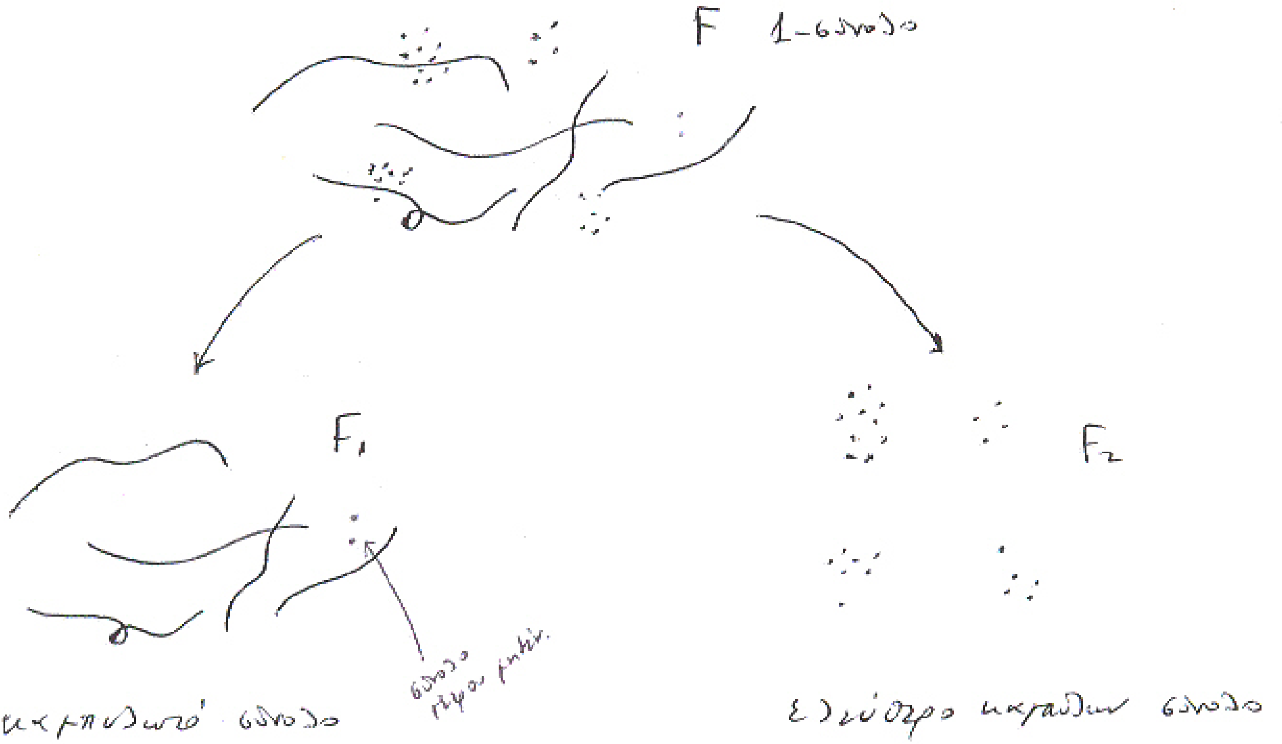
Άρα στην ① θα διάλεγα το C στην θέση του C_{k_0+1}, άτοπο, γιατί τα C_{i} επιλέγονται τα "μεγαλύτερα" κάθε φορά στο F_i.

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}^1(F\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i)=0$ και $F=(F\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i)\cup(F\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i)$

όπου $F\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$ καμπυλωτό και $F\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$ σύνολο $\mathcal{H}^1$-μέτρου μηδέν.

Παρατήρηση

Τα ομαλά 1-σύνολα είναι "σχεδόν ενώσεις" συνόλων $C\in\mathcal{F}(k)$ ενώ τα ανώμαλα 1-σύνολα δεν περιέχουν κανένα τέτοιο σύνολο.



ΣΧΗΜΑ 5.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] KENNETH FALCONER, (1990), FRACTAL GEOMETRY - Mathematical Foundations and Applications, John Wiley.

[2]. KENNETH FALCONER, (1985), THE GEOMETRY OF FRACTAL SETS, CAMBRIDGE

[3]. ΛΕΩΝΗ ΕΥΑΓΓΕΛΑΤΟΥ-ΔΑΛΛΑ, (2000), ΣΤΟΙΧΕΙΑ FRACTAL ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.