Το θεώρημα του Montel

Εργασία για το μάθημα
«Γεωμετρία των Fractals»
μΠλΑ

Αναστασία Γκραικιώτη

12 Οκτωβρίου, 2005

Το θεώρημα του Montel το οποίο αποδείχτηκε το 1912 και είναι γνωστό ως Fundamental Normality Test (FNT) παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των κανονικών οικογενειών μιγαδικών συναρτήσεων και των συνόλων Julia. Θα παρουσιάσουμε τους βασικούς ορισμούς και θεωρήματα που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη που παρουσιάζεται στο [1] η οποία διαφέρει από αυτή που έδωσε ο Montel. Στο [1] το θεώρημα αναφέρεται ως θεώρημα Montel-Caratheodory, επειδή η ιδέα να μπει στην υπόθεση το ότι οι συναρτήσεις παραλείπουν ακριβώς δύο τιμές βρίσκεται σε ένα άρθρο των Caratheodory-Landau (1911). Το FNT έχει γενικευτεί με πολλούς τρόπους.

Ορισμός 1 Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων που ορίζονται στο ανοικτό σύνολο $V \subseteq \mathbb{C}$.
• Η $\mathcal{F}$ καλείται **κανονική οικογένεια στο** V, αν για κάθε ακολουθία $\{f_n\}$ της $\mathcal{F}$ υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, ώστε να ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:
(i) Υπάρχει $f : V \to \mathbb{C}$ ώστε $f_{k_n} \rightrightarrows f$ (η f_{k_n} συγκλίνει ομοιόμορφα στην f), σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V.
(ii) $f_{k_n} \rightrightarrows \infty$, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του V.
• Η $\mathcal{F}$ καλείται **κανονική οικογένεια στο** $w \in V$, αν υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subseteq V$ με $w \in U$, ώστε η $\mathcal{A} = \{f|_U : f \in \mathcal{F}\}$ να είναι κανονική οικογένεια στο U.

Παρατηρήσεις
1. Στο (i) η συνάρτηση f αν υπάρχει θα είναι αναλυτική, λόγω του Θεωρήματος Σύγκλισης του Weierstrass. Επίσης η f αυτή δεν ανήκει αναγκαστικά στην οικογένεια $\mathcal{F}$.
2. Η κανονικότητα είναι τοπική έννοια όπως η συνέχεια, δηλαδή αν $\mathcal{F}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων στο V αρκεί να ελέγξουμε ότι είναι κανονική σε κάθε σημείο $w \in V$, όπως φαίνεται στο παράκατω

Θεώρημα 1 Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων στον τόπο Ω. Τότε η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο Ω αν και μόνο αν είναι κανονική σε κάθε σημείο $z \in \Omega$.

Απόδειξη[3]
«$\Longrightarrow$» Προφανές από τους ορισμούς.
«$\Longleftarrow$» Έστω ότι η $\mathcal{F}$ είναι κανονική σε κάθε σημείο z του Ω. Επιλέγουμε μια ακολουθία $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ πυκνή στο Ω. Έστω $D(z_n, r_n)$ ο μέγιστος δίσκος ώστε η $\mathcal{F}$ να είναι κανονική στον $D(z_n, r_n)$. Τότε $\Omega \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} D(z_n, r_n)$ αφού $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ πυκνή στο Ω.
Έστω τώρα τυχαία ακολουθία $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της $\mathcal{F}$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε ή $f_{k_n} \rightrightarrows f$ για κάποια fσε κάθε K συμπαγές υποσύνολο του Ω ή $f_{k_n} \rightrightarrows \infty$, σε κάθε συμπαγές K υποσύνολο του Ω.
Η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο $D(z_1, r_1)$ άρα υπάρχει $\left\{f_{k_n}^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $f_{k_n}^{(1)} \rightrightarrows f$ για κάποια f ή $f_{k_n}^{(1)} \rightrightarrows \infty$.
Η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο $D(z_2, r_2)$ άρα υπάρχει $\left\{f_{k_n}^{(2)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $\left\{f_{k_n}^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $f_{k_n}^{(2)} \rightrightarrows f$ για κάποια f ή $f_{k_n}^{(2)} \rightrightarrows \infty$.
Η $\left\{f_{k_n}^{(2)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (στην f ή στο ∞) και στον $D(z_1, r_2)$ και στον $D(z_2, r_2)$.
Συνεχίζοντας παίρνουμε τη διαγώνια υπακολουθία $\left\{f_{k_n}^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ της αρχικής υπακολουθίας $\left\{f_{k_n}^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει σε όλους τους δίσκους $D(z_n, r_n/2)$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$ ή σε κάποια f ή στο ∞. Κάθε τυχαίο $z \in \Omega$ θα περιέχεται σε κάποιο δίσκο $D(z_m, r_m)$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $n \geq$. Έτσι το Ω χωρίζεται σε δύο σύνολα Ω_0, Ω_∞ ως εξής:

$\Omega_0 = \left\{ z \in \Omega | z \in D(z_m, r_m) \kappa\alpha\iota f_{k_n}^{(m)} \rightrightarrows f \right\}$
$\Omega_\infty = \left\{ z \in \Omega | z \in D(z_m, r_m) \kappa\alpha\iota f_{k_n}^{(m)} \rightrightarrows \infty \right\}$
Εύκολα αποδεικνύεται ότι τα Ω_0, Ω_∞ είναι ανοικτά. Για το Ω_0, αν υποθέσουμε το αντίθετο τότε υπάρχει σημείο z στο Ω_0 ώστε κάθε ανοικτή σφαίρα γύρω από το z να περιέχει σημείο του Ω_∞, άρα μπορούμε να φτιάξουμε μια ακολουθία σημείων z_n του Ω_∞ που να τείνει στο z το οποίο όμως είναι άτοπο, διότι η υπακολουθία $f_{k_n}^{(m)}$ που αντιστοιχεί στο z θα τείνει στην f ενώ στα σημεία z_n οι αντίστοιχες υπακολουθίες συναρτήσεων θα τείνουν στο άπειρο. Όμοια δείχνουμε ότι και το Ω_∞ είναι ανοικτό.
Επειδή Ω_0, Ω_∞ είναι ανοικτά, $\Omega_0 \cup \Omega_\infty = \Omega$, και $\Omega_0 \cap \Omega_\infty = \oslash$ και επειδή το Ω είναι τόπος (άρα συνεκτικό) έπεται ότι ή $\Omega = \Omega_0$ ή $\Omega = \Omega_\infty$
Τώρα έστω τυχαίο K συμπαγές υποσύνολο του Ω. Οι $D(z_n, r_n/2)$ αποτελούν μια ανοικτή κάλυψη του K και επειδή το K είναι συμπαγές το K καλύπτεται από πεπερασμένους το πλήθος δίσκους $D(z_i, r_i)$ και για αυτούς βρίσκουμε ακολουθία $f_{k_n}^{(m)}$ η οποία θα συγκλίνει στην f ή στο άπειρο, οπότε δείξαμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο Ω.

Παρατηρήσεις
1. Μπορούμε να ελέγχουμε τη κανονικότητα όποτε αυτό μας βολεύει στο μοναδιαίο δίσκο.
2. Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να αποφασίζουμε αν μια οικογένεια είναι κανονική ελέγχοντας τοπικά την ιδιότητα όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα
• Έστω $\mathcal{F} = \{f_n(z) = nz | n \in \mathbb{N}\}$
Τότε $f_n(0) \to 0$ αλλά $f_n(z) \to \infty$ για κάθε $z \neq 0$ άρα η $\mathcal{F}$ δεν μπορεί να είναι κανονική σε κανένα τόπο του $\mathbb{C}$ που περιέχει το 0.
• Η $\mathcal{F} = \{f_n(z) = z^n | n \in \mathbb{N}\}$ είναι κανονική στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο U αφού για κάθε $z, |z| < 1$ έχουμε ότι $f_n(z) \to 0$.

Ορισμός 2 Η οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F}$ είναι **τοπικά φραγμένη** στο V αν για κάθε $z_0 \in V$ υπάρχει $M = M(z_0) > 0$ και περιοχή $D(z_0, r) \subseteq V$ του z_0 τέτοια ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in D(z_0, r)$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$.

Το παρακάτω θεώρημα αποδείχτηκε από τον Montel to 1907, και ανεξάρτητα από τον Koebe το 1908.

Θεώρημα 2 [Montel (1907)] Έστω $\mathcal{F} = \{f : \Omega \to \mathbb{C}\}$, ($\Omega$ ανοικτό) οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων. Αν η $\mathcal{F}$ είναι τοπικά φραγμένη τότε η $\mathcal{F}$ είναι κανονική.

Η απόδειξη που βρίσκεται στο [2] (σελ 518) χρησιμοποιεί ιδέες ανάλογες με αυτές που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του Θεωρήματος 1, ενώ στο [1] (σελ 153) υπάρχει μια απόδειξη που χρησιμοποιεί το θεώρημα Ascoli-Arzela.

Θα αναφέρουμε τώρα το θεώρημα του Schottky (1904) (*βλ. [1] σελ 298 για την απόδειξη*) και ένα πόρισμά του, καθώς και το θεώρημα του Hurwitz (*για την απόδειξη βλ. [1] σελ 152*) και ένα πορισμά του.

Θεώρημα 3 [Schottky]
Για κάθε α, β, με $0 < \alpha < \infty$ και $0 \leq \beta \leq 1$, υπάρχει μια σταθερά $C(\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε αν η f είναι αναλυτική συνάρτηση ορισμένη σε κάποια απλά συνεκτική περιοχή που περιέχει την κλειστή σφαίρα $\overline{B}(0,1)$ και η f δεν παίρνει τις τιμές 0 και 1 και $|f(0)| \leq \alpha$, τότε $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$ για κάθε $|z| \leq \beta$.

Πόρισμα 1 Έστω f αναλυτική συνάρτηση ορισμένη σε κάποια απλά συνεκτική περιοχή που περιέχει την κλειστή σφαίρα $\overline{B}(0, R)$ και η οποία δεν παίρνει τις τιμές 0 και 1. Αν $C(\alpha, \beta)$ είναι η σταθερά που παίρνουμε από το θεώρημα του Schottky και $|f(0)| \leq \alpha$, τότε $|f(z) \leq C(\alpha, \beta)$ για κάθε $|z| \leq \beta R$.

Θεώρημα 4 (Hurwitz)
Έστω G τόπος και έστω $f_n \to f$. Αν $f \not\equiv 0$ $\overline{B}(\alpha, R) \subset G$, και $f(z) \neq 0$ για $|z - \alpha| = R$ τότε υπάρχει ένας φυσικός N τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq \mathbb{N}$, οι f, f_n έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στην $B(\alpha, R)$.

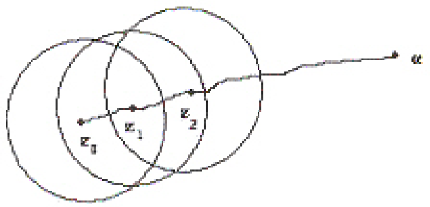
Πόρισμα 2 Αν $\{f_n\}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων στο G, που συγκλίνει στην f και κάθε f_n δεν έχει καμία ρίζα στο G τότε ή $f \equiv 0$ ή η f δεν έχει καμία ρίζα στο G.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το

Θεώρημα Montel (1912) Fundamental Normality Test
Έστω $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων στον τόπο V.
Εάν $\cup_{n=1}^{\infty} g_n(V) \subseteq \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$, με $a \neq b$ τότε η $\mathcal{G}$ είναι κανονική οικογένεια στο V.
Ισοδύναμα:
Αν η $\mathcal{G}$ δεν είναι κανονική τότε $\cup_{n=1}^{\infty} g_n(V) = \mathbb{C}$ ή $\cup_{n=1}^{\infty} g_n(V) = \mathbb{C}\setminus\{a\}$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη

Έστω $\mathcal{F} = \left\{ f(z) = \frac{g(z)-a}{b-a}, g \in \mathcal{G} \right\}$
Η $\mathcal{F}$ είναι οικογένεια αναλυτικών συναρτήσεων που παίρνουν τιμές στο $\mathbb{C}$ εκτός από τις τιμές $0, 1$ και προφανώς η $\mathcal{G}$ είναι κανονική αν και μόνο αν η $\mathcal{F}$ είναι κανονική, άρα αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι κανονική.
Έστω τυχαίο $z_0 \in V$. Ορίζουμε τις παρακάτω οικογένειες:
$\mathcal{F}_1 = \{f \in F : |f(z_0| < 1\}$
$\mathcal{F}_2 = \{f \in F : |f(z_0| > 1\}$
Προφανώς $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι η $\mathcal{F}_1$ και η $\mathcal{F}_2$ είναι κανονικές.Θα δείξουμε πρώτα ότι η $\mathcal{F}_1$ είναι κανονική.
Έστω α τυχαίο σημείο στο V και γ μια καμπύλη στο V από το z_0 στο α.



Αυτό που κάνουμε είναι να εκμεταλλευτούμε το ότι η f ειναι τοπικά φραγμένη σε ένα δίσκο γύρω από το z_0 και μετά να επεκτείνουμε την ιδιότητα της τοπικά φραγμένης με πεπερασμένα βήματα σε κάθε σημείο a στο V. Αναλυτικά, έστω $D_0, D_1, ..., D_n$ δίσκοι στο V με κέντρα $z_0, z_1, ..., z_n = \alpha$ αντίστοιχα, πάνω στην καμπύλη γ, ώστε τα z_{k-1}, z_k να βρίσκονται στην $D_{k-1} \cap D_k$ για κάθε

$1 \leq k \leq n$. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κλειστότητα αυτών των δίσκων ανήκει στο V. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα του Schottky στο δίσκο D_0 έχουμε ότι υπάρχει σταθερά C_0 ώστε $|f(z)| \leq C_0$ για όλα τα z στο D_0 και κάθε $f \in \mathcal{F}_1$ (αν $D_0 = B(z_0, r)$ και $R > r$ τέτοιο που $\overline{B}(z_0, R) \subset V$ τότε από το Πόρισμα 1, έχουμε ότι $|f(z)| \leq C(1, \beta)$ για κάθε $z \in D_0$ και $f \in \mathcal{F}_1$ και για κάθε β ώστε $r < \beta R$). Επίσης αφού $z_1 \in D_0$, έχουμε ότι $|f(z_1)| \leq C_0$ άρα πάλι από το θεώρημα του Schottky στο δίσκο D_1 ισχύει ότι η οικογένεια $\mathcal{F}_1$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη από τη σταθερά C_1 στο δίσκο D_1. Συνεχίζοντας για πεπερασμένα βήματα με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{F}_1$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο δίσκο D_n. Αφού το α είναι τυχαίο έχουμε ότι οικογένεια $\mathcal{F}_1$ είναι τοπικά φραγμένη, άρα από το θεώρημα 2 (Montel, 1907) έχουμε ότι η $\mathcal{F}_1$ είναι κανονική.
Για να δείξουμε τώρα ότι η $\mathcal{F}_2$ είναι κανονική θεωρούμε τυχαία
$f \in \mathcal{F}_2$. Η f προφανώς δεν έχει καμία ρίζα και έτσι μπορούμε να ορίσουμε την $\frac{1}{f}$ η οποία είναι αναλυτική και ανήκει στην $\mathcal{F}_1$ και επίσης δεν παίρνει τις τιμές $0, 1$. Άρα έχουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{F}'_2 = \left\{\frac{1}{f} | f \in F_2\right\} \subset \mathcal{F}_1$ η οποία είναι κανονική από το προηγούμενο βήμα της απόδειξης άρα και η $\mathcal{F}'_2$ είναι κανονική. Έστω τώρα ακολουθία f_n στην $\mathcal{F}_2$. Υπάρχει υπακολουθία της f_{n_k} που η αντίστοιχη $\left\{\frac{1}{f_{n_k}}\right\}$ να συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια f αφού η $\mathcal{F}'_2$ είναι κανονική. Σύμφωνα με το πόρισμα 2 ή $f \equiv 0$ ή η f δεν έχει καμία ρίζα στο V. Αν $f \equiv 0$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι $f_{n_k} \to \infty$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του V, ενώ αν η f δεν έχει καμία ρίζα στο V τότε $f_{n_k} \to \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του V. Άρα η $\mathcal{F}_2$ είναι κανονική.

Βιβλιογραφία

1. Conway J.B., *Functions of One Complex Variable*, 2nd edition, Springer-Verlag.

2. Marsden J.E., Hoffman M.J., *Βασική Μιγαδική Ανάλυση*, Μετάφραση: Παπαλουκάς Λ.Χ., Εκδόσεις Συμμετρία

3. Schiff J.L., *Normal Families*, Springer-Verlag