ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ JULIA

ΝΙΚΟΣ ΤΣΙΤΣΑΣ

ΑΘΗΝΑ 4/2/2003

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ (1)

- Περιοδικό σημείο της f $\quad f^p(w)=w,\ p\in N,\ p\geq 1$
- Σταθερό σημείο της f $\quad p=1$
- Περίοδος του w $\quad \min p:\ f^p(w)=w$
- Τροχία του w $\quad \{w, f(w), f^2(w), \ldots, f^p(w)\}$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ (2)

- Υπερελκυστικό (superattracting) σημείο της f $(f^p)'(w)=0$
- Ελκυστικό (attracting) σημείο της f $0\leq(f^p)'(w)\leq 1$
- Αδιάφορο σημείο της f $(f^p)'(w)=1$
- Απωθητικό(repelling) σημείο της f $(f^p)'(w)>1$

Μέθοδος Newton για Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής

- Μέθοδος Ανεύρεσης των ριζών της μη γραμμικής εξίσωσης

$$f(x) = 0$$

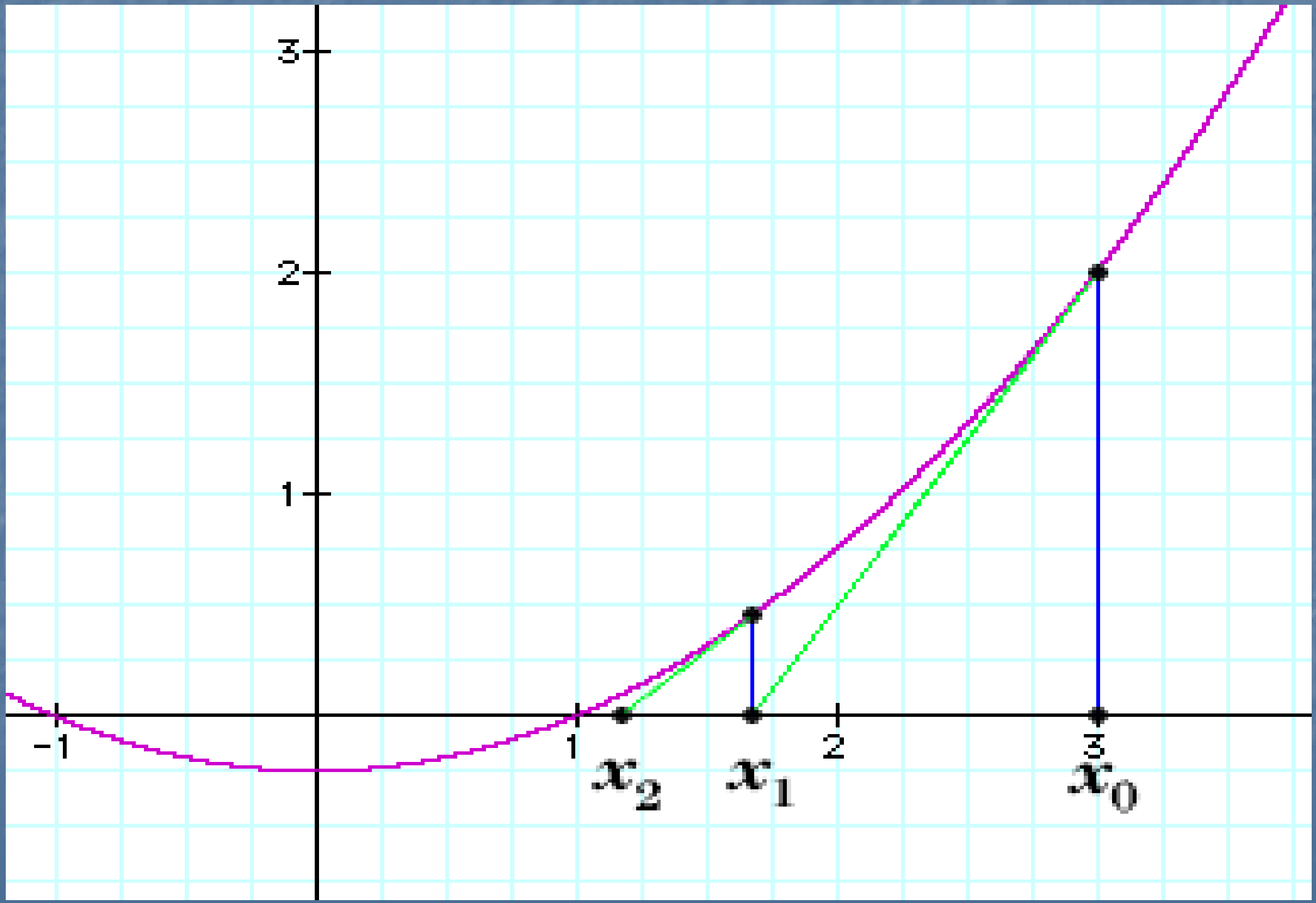
- Ακολουθούμε τον εξής επαναληπτικό αλγόριθμο:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Ξεκινάμε από μία αρχική εκτίμηση x_0 με σκοπό σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων n, η επανάληψη x_n να έχει προσεγγίσει τη ρίζα στα όρια κάποιας ακρίβειας.

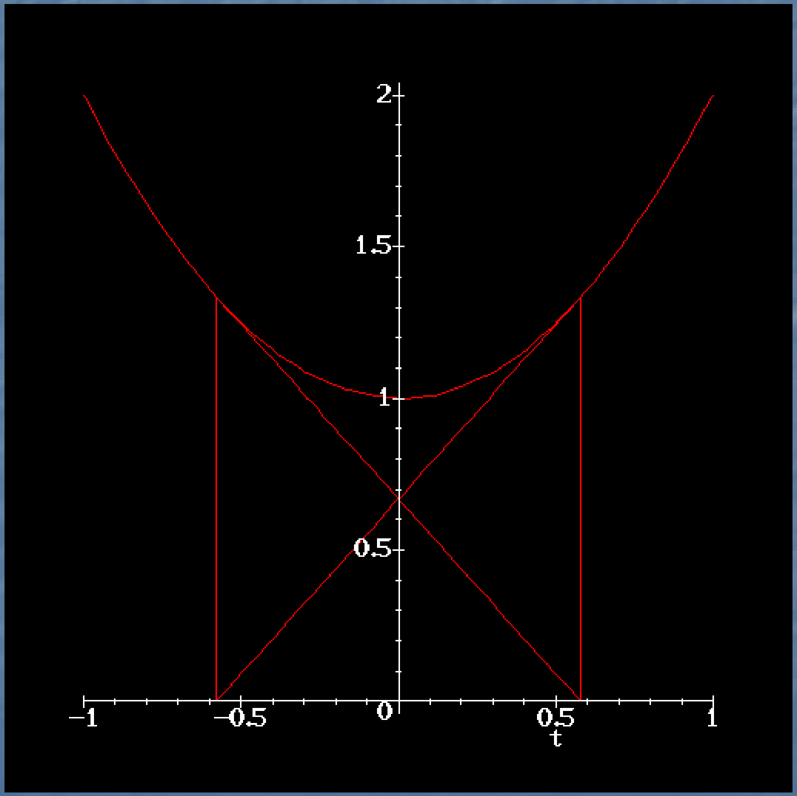
- Σε κάθε βήμα θέτουμε την τιμή της κ+1 επανάληψης x_{k+1} ίση με την τιμή του x για την οποία η εφαπτομένη της καμπύλης $y=f(x)$ στο σημείο $(x_k, f(x_k))$ τέμνει τον άξονα των x.

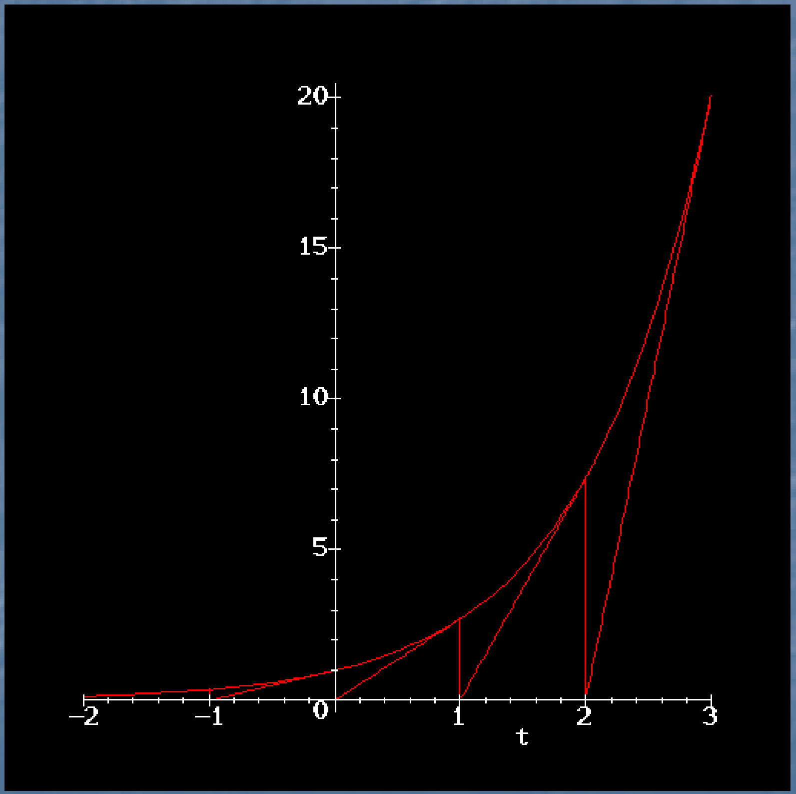
Γεωμετρικά η προσέγγιση της ρίζας μιας συνάρτησης με τη μέθοδο του Newton δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



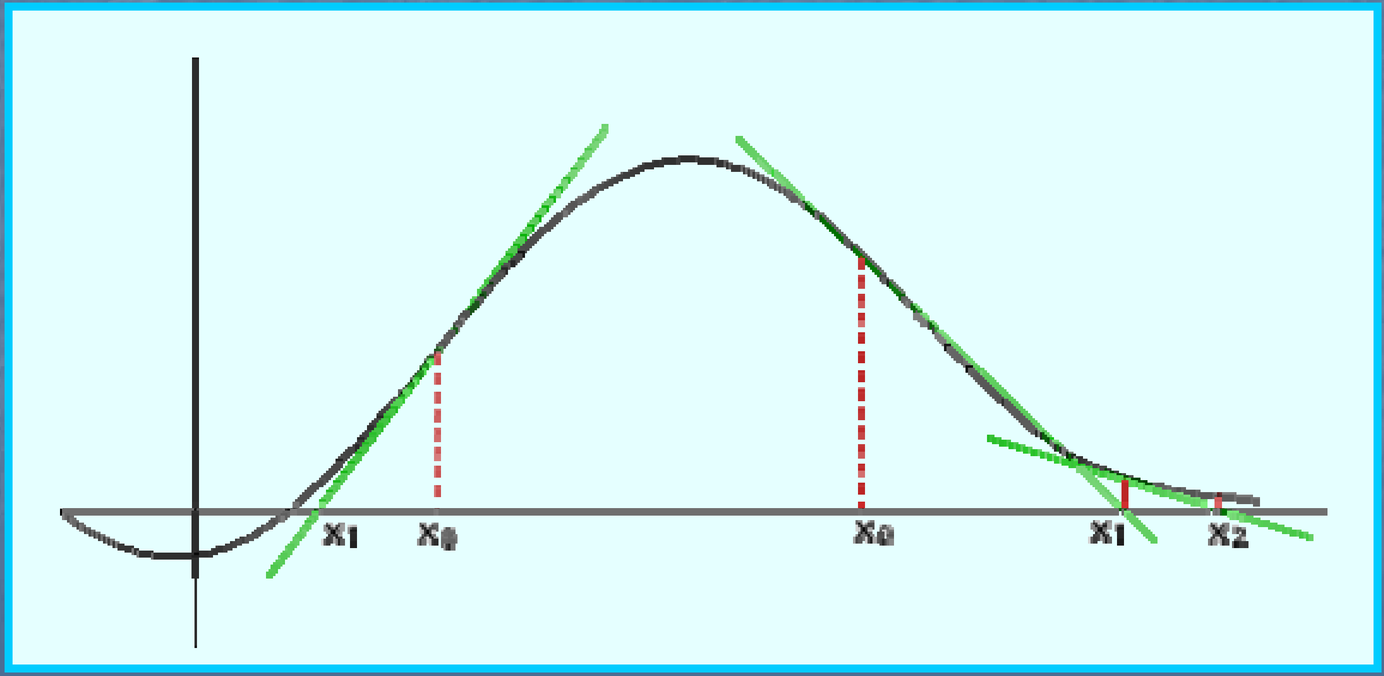
- Το κρίσιμο σημείο της μεθόδου είναι η μεγάλη ευαισθησία της ως προς την επιλογή του αρχικού σημείου x_0.
- Αν ξεκινήσουμε από ένα x_0 αρκετά κοντά στην ρίζα (σε κάποια περιοχή της) τότε η μέθοδος εξασφαλίζει σύγκλιση και μάλιστα τετραγωνική.
- Αντίθετα αν ξεκινήσουμε από ένα πιο μακρινό αρχικό σημείο η μέθοδος δεν εξασφαλίζει σύγκλιση.

- Παραδείγματα συναρτήσεων όπου η μέθοδος Newton συγκλίνει και αποκλίνει για κάποιες επιλογές αρχικού x_0.





- Με βάση το παρακάτω γράφημα αν x^* το κεντρικό σημείο όπου η παράγωγος της συνάρτησης μηδενίζεται, τότε αν ξεκινήσουμε από ένα x_0 δεξιά από το x^* θα οδηγηθούμε σε σύγκλιση προς τη ρίζα στα δεξιά του γραφήματος, ενώ αν ξεκινήσουμε από ένα x_0 αριστερά από το x^* θα οδηγηθούμε σε σύγκλιση προς τη ρίζα στα αριστερά του γραφήματος. Επίσης αν η αρχική επιλογή είναι το x^* τότε η μέθοδος του Newton δεν συγκλίνει πουθενά διότι $f'(x_0 = x^*) = 0$.



- Ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Δοθείσης μιας εξίσωσης $f(x)=0$ μπορούμε να χρωματίσουμε κάθε σημείο στον άξονα των x με χρώμα που να εξαρτάται από τη ρίζα της $f(x)$ στην οποία συγκλίνει η μέθοδος Newton αν το σημείο αυτό ληφθεί σαν αρχικό σημείο της μεθόδου.

- Αν την εφαρμόσουμε στο προηγούμενο γράφημα όλα τα σημεία που βρίσκονται δεξιά του x^* ανήκουν σε μία χρωματική μονάδα, ενώ όλα τα σημεία που βρίσκονται αριστερά του x^* ανήκουν σε άλλη.

- Με αυτόν τον τρόπο ουσιαστικά έχουμε μία διαδικασία μελέτης του συνόλου Julia της συνάρτησης $x - f(x)/f'(x)$.

- Το 1879 ο λόρδος *Cayley* δημοσίευσε μία μονοσέλιδη εργασία με τίτλο: *"The Newton-Fourier Imaginary Problem"* όπου παρουσιάζει την επέκταση της μεθόδου Newton-Fourier (για πραγματικές συναρτήσεις) στο μιγαδικό πεδίο για τον υπολογισμό των ριζών μιγαδικών πολυωνύμων.
- Επιπλέον θέτει το ερώτημα αν μπορούμε να βρούμε περιοχές του μιγαδικού επιπέδου όπου όλα τα σημεία τους αν ληφθούν σαν αρχικά σημεία της μεθόδου οδηγούν σε σύγκλιση σε κάποια ρίζα.
- Κατάφερε να βρει κάποια καλά αποτελέσματα για μιγαδικά πολυώνυμα δευτέρου βαθμού αλλά στην προσπάθειά του να προχωρήσει στα πολυώνυμα τρίτου βαθμού συνάντησε δυσκολίες και άφησε την εργασιά του ημιτελή.
- Αυτή η αρχική ιδέα του Cayley ήταν το κίνητρο του Julia στην μελέτη των συνόλων με τη μέθοδο του Newton.

Μιγαδική Μέθοδος Newton

- Μέθοδος Ανεύρεσης των ριζών της μη γραμμικής εξίσωσης:

$$\boxed{f(z) = 0, z \in C}$$

- Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Newton:

$$\boxed{N_f(z_n) = z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{'}(z_n)}}$$

- Η ιδέα τώρα είναι η εξής:

  Ξεκινάμε από ένα σημείο $z_0=x+iy$ του μιγαδικού επιπέδου και το χρωματίζουμε ανάλογα με τη ρίζα της συνάρτησης f που προσεγγίζει η ακολουθία $z_{n+1}=N_f(z_n)$.

- Πριν μελετήσουμε αναλυτικά την κατασκευή του συνόλου Julia με βάση τη μέθοδο του Newton, θα αναφέρουμε κάποιες βασικές ιδιότητες της μεθόδου όταν αυτή εφαρμόζεται σε πολυωνυμικές συναρτήσεις, οι οποίες θα μας βοηθήσουν να ερμηνεύσουμε την απεικόνιση των συνόλων στον Η/Υ.

Βασικές Ιδιότητες της Μεθόδου Newton για πολυωνυμικές συναρτήσεις

1. Οι ρίζες του p(z) αντιστοιχούν σε σταθερά σημεία της N(z).

2. Το ∞ είναι σταθερό σημείο της N(z) και αφού N′(∞)=d/d-1, είναι και απωθητικό.

   Αυτό σημαίνει ότι αν μία επανάληψη βρεθεί κοντά στο ∞, οι επόμενες διαδοχικές επαναλήψεις θα απομακρύνονται από το ∞.

3. Η παράγωγος της N(z) είναι:

$$N'(z) = \frac{p(z)\,p''(z)}{[p'(z)]^2}$$

Οπότε οι απλές ρίζες της p(z) είναι υπερελκυστικά σταθερά σημεία της N(z).

Είναι μία πολύ επιθυμητή ιδιότητα για έναν αλγόριθμο ανεύρεσης των ριζών, διότι σε μία περιοχή ενός υπερελκυστικού σταθερού σημείου, ο αλγόριθμος συγκλίνει τοπικά $z \to z^k$, $k>1$. Η σύγκλιση μάλιστα είναι πολύ γρήγορη (σε κάθε επανάληψη διπλασιάζεται ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων ακρίβειας).

4. Οι πολλαπλές ρίζες είναι ελκυστικά σταθερά σημεία, αλλά όχι υπερελκυστικά.

Για μία ρίζα πολλαπλότητας m η παράγωγος της N(z) στη ρίζα είναι m-1/m. Δηλαδή η ταχύτητα σύγκλισης είναι γραμμική και ο αλγόριθμος δεν είναι τόσο αποτελέσματικός.

5. Τα κρίσιμα σημεία της N(z) είναι οι απλές ρίζες της f(z) και οι ρίζες της f″(z).

6. Οι πόλοι της N(z) είναι τα κρίσιμα σημεία της f(z).

   Οπότε τροχιές που αποφεύγουν τα κρίσιμα σημεία της f(z), έχουν πολύ μεγάλη πιθανότητα να συγκλίνουν γρήγορα σε μία ρίζα.

7. Στα επόμενα πρέπει να εξετάζουμε δύο σετ κρίσιμων σημείων. Αυτά της N(z) και αυτά της f(z).

   Πάντως τα κρίσιμα σημεία της N(z) είναι αυτά που τελικά καθορίζουν τη δυναμική της μεθόδου του Newton.

Θεώρημα Lucas (1874)

- Τα κρίσιμα σημεία του p(z) (οι πόλοι της N(z)) βρίσκονται μέσα στη γραμμική θήκη των ριζών του p(z)

Σημαντική Παρατήρηση

- Αν θεωρήσουμε το μετασχηματισμό $T(z)=az+b$, $a\neq 0$ και το πολυώνυμο $q(z)=p(T(z))$, τότε:

$$T \circ N_q \circ T^{-1} = N_p$$

Δηλαδή μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις ρίζες με μία αφινική (affine) συνάρτηση χωρίς να αλλάξουμε ποιοτικά τη δυναμική της συνάρτησης Newton

- Αρχικά θα σκεφτόταν κάποιος ότι αν η μέθοδος ξεκινήσει από μία περιοχή ενός σημείου z_0 τότε θα συγκλίνει στη ρίζα της συνάρτησης που έχει τη μικρότερη απόσταση από το z_0.

- Αυτή η υπόθεση όμως είναι λανθασμένη και αυτό το οποίο ισχύει στην πραγματικότητα αποδείχτηκε από τον Julia το 1920 και αναδεικνύει τη χαοτική συμπεριφορά των συνόλων Julia.

Θεώρημα Julia (1920)

- Έστω f(z) πολυώνυμο με ρίζες r_1, r_2,..., r_n. Για κάθε ρίζα r_i έστω A_i το σύνολο των αρχικών σημείων z_i για τα οποία η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στη ρίζα r_i και έστω B_i το σύνορο του A_i.

Τότε

- ***Όλα τα σύνολα B_i είναι ίδια.***

- Δηλαδή αν z_1 ένα αρχικό σημείο της μεθόδου Newton τέτοιο ώστε κάθε μικρός δίσκος γύρω από αυτό να περιέχει ορισμένα σημεία από τα οποία αν ξεκινήσει η μέθοδος συγκλίνει στην r_1 (πρώτη ρίζα της f) και ορισμένα σημεία για τα οποία αυτό δεν συμβαίνει.
- Τότε κάθε τέτοιος μικρός δίσκος περιέχει σημεία από τα οποία ξεκινώντας η μέθοδος συγκλίνει σε κάθεμια από τις ρίζες της f.
- Με άλλα λόγια τα σύνολα διαφορετικού χρώματος που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ρίζες έχουν όλα το ίδιο σύνορο.

$f(z)=z^4-1$

- Το σύνολο Julia για την συνάρτηση $f(z)= z^4-1$ είναι το σύνολο των σημείων των οποίων οι τροχιές δεν συγκλίνουν σε καμία από τις ρίζες r_1, r_2, r_3, r_4 της συνάρτησης $f(z)$.
- Το σύνολο Julia παριστάνεται από φωτεινές περιοχές και είναι το σύνορο των λεκανών έλξης των ριζών.
- Αντίστοιχα το συμπλήρωμα του συνόλου Julia , δηλαδή το σύνολο Fatou, σχηματίζεται από τέσσερα ανοιχτά σύνολα που είναι οι λεκάνες έλξης των τεσσάρων ελκυστικών σταθερών σημείων της μεθόδου επανάληψης Newton, δηλαδή των τεσσάρων ριζών της $f(z)$.

- Το σύνολο Julia είναι το σύνολο του μιγαδικού επιπέδου όπου επικρατεί χαοτική δυναμική.
- Μπορεί να χαρακτηριστεί σαν η θήκη του συνόλου των σημείων των οποίων οι τροχιές «περιπλανώνται ανέλπιστα και παντοτινά».
- Το αξιοσημείωτο είναι (και ο λόγος που αυτά τα σύνολα έχουν τραβήξει το ενδιαφέρον του επιστημονικού κόσμου) ότι ενώ μία μονότονη κίνηση λαμβάνει χώρα στο σύνολο C\J, στο σύνολο J επικρατεί χαοτική πολυπλοκότητα.
- Τα παραπάνω καταδεικνύονται από το θεώρημα του Sullivan.

Θεώρημα Sullivan
Non Wandering Domain Theorem

- Το συμπλήρωμα του συνόλου Julia είναι η ένωση μιας αριθμήσιμης συλλογής συνεκτικών ανοικτών συνόλων, τα οποία ονομάζουμε πέταλα (petals).
- Κανένα συνεκτικό σύνολο του συμπληρώματος του συνόλου Julia δεν περιπλανιέται ανέλπιστα παντοτινά, αλλά πάντα συγκλίνει σε μία περιοδική τροχιά από πέταλα.
- Αν P είναι ένα πέταλο τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει θετικός ακέραιος S τέτοιος ώστε:

$$f^{S}(P) = f^{S+1}(P) = f^{S+2}(P) = f^{S+3}(P) = \dots$$

- Το τελικό πέταλο $f^S(P)$ είναι ένα από τα συνεκτικά τμήματα του συμπληρώματος του συνόλου Julia, το οποίο περιέχει μία από τις ρίζες r_1, r_2, r_3, r_4 της συνάρτησης f(z).

- Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα Θεώρημα με τη βοήθεια του οποίου ορίζεται το συνόλο Julia μιας μετασχηματισμένης κατά Newton συνάρτησης f(z) κάνοντας χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού.

Θεώρημα (Ορισμός συνόλου Julia του μετασχηματισμένου κατά Newton πολυωνύμου z^n-1)

- Έστω N(f(z)):C→C ο μετασχηματισμός Newton της πολυωνυμικής συνάρτησης f(z)= z^n-1. Έστω ε>0 αρκετά μικρός αριθμός και έστω:

$$X = C \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{B}(r_i , \varepsilon)$$

όπου r_i οι ρίζες της συνάρτησης f(z).

- Ορίζουμε W: H(X) → H(X) με

$$W(B) = \bigcup_{i=1}^{n} w_i (B) = N^{-1}(B)$$

για όλα τα B϶ H(X).

- Τότε το W είναι συνεχές, έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο J, το σύνολο Julia της N(f(z)) και ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to\infty} W^n(B)=J, \forall B \in H(X)$$

- Για παράδειγμα αν $f(w)=w^4-1$, τότε $N(f(w))=3w^4+1/4w^3$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από τη λύση της εξίσωσης $z=3w^4+1/4w^3$ ως προς w. Η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις ρίζες $\{w_1(z), w_2(z), w_3(z), w_4(z)\}$ και επομένως η αντίστροφη απεικόνιση είναι το σύνολο των τεσσάρων συναρτήσεων $f^{-1}(z)=\{w_1(z), w_2(z), w_3(z), w_4(z)\}$. Τότε το σύνολο Julia είναι τα αρχικά σημεία στα οποία έχουμε τελικά σύγκλιση στο σύνολο $\{w_i, i=1,2,3,4\}$

ΓΕΝΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΣΥΝΟΛΩΝ JULIA

LSM (LEVEL SET METHOD)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΣΤΑΘΜΗΣ

- Πρώτα δίνουμε τον αλγόριθμο για την κατασκευή του Julia συνόλου της συνάρτησης:

$$p(z)=z^2+c, c\epsilon C$$

- Στη συνέχεια με βάση την ίδια λογική χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για την κατασκευή του Julia συνόλου της συνάρτησης:

$$p(z)=z^n-1, n\epsilon N$$

$p(z)=z^2+c$

- **Βήμα 1**

  1-1 Αντιστοίχιση των pixels της οθόνης με τους μιγαδικούς αριθμούς ενός μιγαδικού επιπέδου και αποθήκευση του κάθε z σε ένα διδιάστατο πίνακα Z.

- **Βήμα 2**

  Ξεκινάμε από ένα z του πίνακα και υπολογίζουμε τις επαναλήψεις:

$$\{p(z), p^2(z), p^3(z), \ldots, p^m(z), \ldots, p^{Mmax}(z)\}$$

  και κάθε φορά πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό της επόμενης επανάληψης, ελέγχουμε τη σύγκλιση της επανάληψης στην οποία βρισκόμαστε με τα εξής κριτήρια:

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ-ΔΙΑΚΟΠΗΣ

- $m > Mmax$
- $|p^m(z)| > 2$,
- $|\ p^m(z) - p^{m-1}(z)|\ \leq eps$

- Βήμα 3

Όταν έχουμε σύγκλιση ή όταν φτάνουμε το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, αποθηκεύουμε τον αριθμό της επανάληψης στην οποία καταλήξαμε σε έναν διδιάστατο πίνακα ακριβώς στην ίδια θέση με αυτή που βρίσκεται ο μιγαδικός αριθμός για τον οποίο εκτελέσαμε τη διαδικασία.

Με αυτόν τον τρόπο αρχίζει να δημιουργείται ένας νέος διδιάστατος πίνακας M ίδιας διάστασης με τον αρχικό, ο οποίος περιέχει τους δείκτες των επαναλήψεων σύγκλισης ή διακοπής για κάθε σημείο.

- Βήμα 4

Επιστροφή στο βήμα 2 θεωρώντας ένα νέο z.

Η ίδια διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία του πίνακα Z και να δημιουργηθεί ο πίνακας M.

Παράσταση του πίνακα Μ, Δημιουργία του συνόλου Julia

- Η παράσταση του πίνακα Μ σε ένα διάγραμμα με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε τιμή του να αντιστοιχεί και ένα διαφορετικό χρώμα δίνει την απεικόνιση του συνόλου Julia.
- Η αντιστοίχιση των χρωμάτων γίνεται σε συγκεκριμένη κλίμακα, για παράδειγμα αν η κλίμακα που διαλέγουμε είναι το grayscale, οι μικρές τιμές του πίνακα είναι κοντά στο μαύρο, οι μεγάλες κοντά στο άσπρο και οι ενδιάμεσες αναπαρίστανται με διαβαθμίσεις του γκρι.

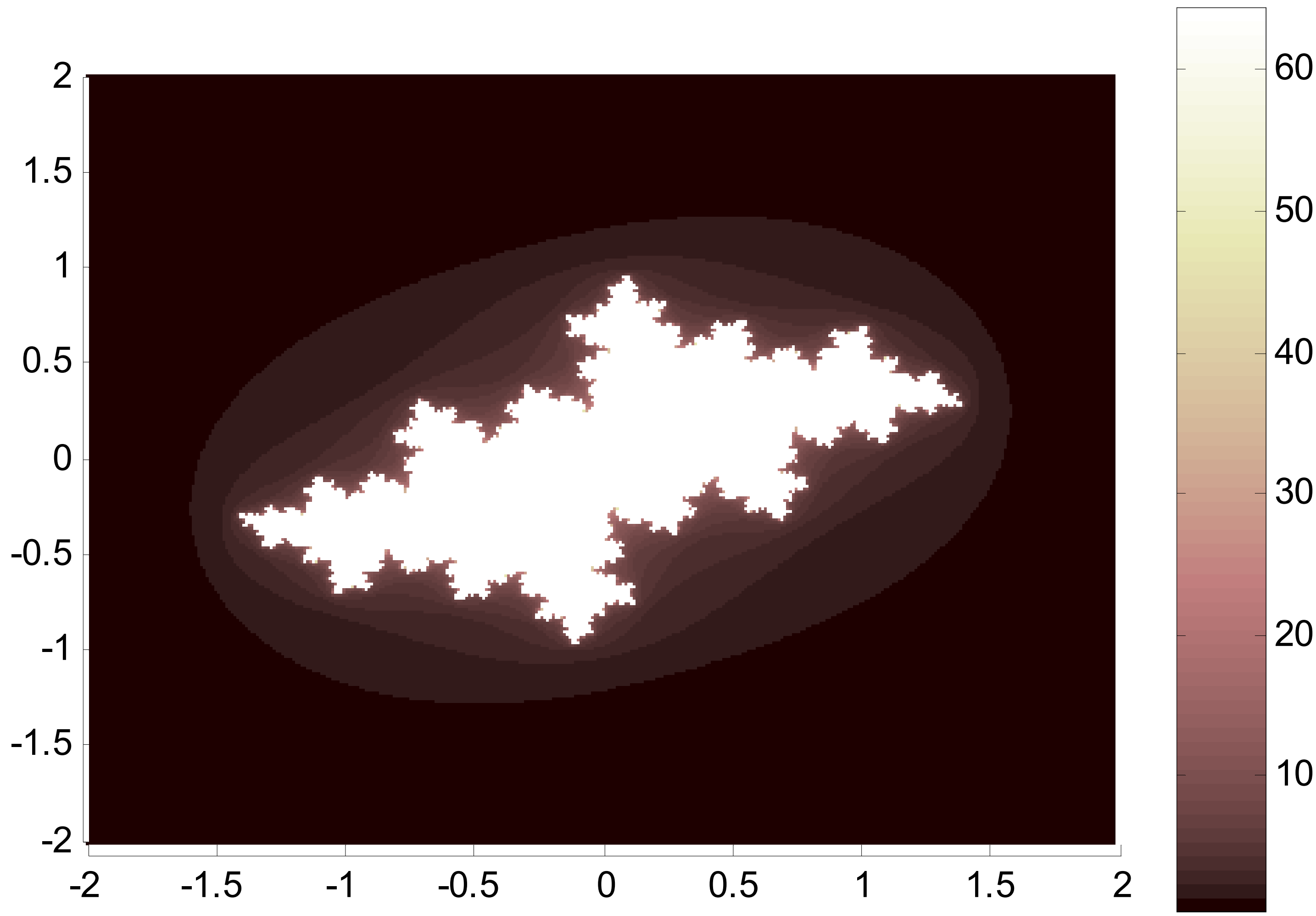
Κώδικας υλοποίησης της μεθόδου συνόλου στάθμης

```
function [N]=juliac(nmax,c)

[x,y]=meshgrid(linspace(-2,2,800),linspace(-2,2,600));
pix=x+i*y;

for k=1:size(pix,1)
    for l=1:size(pix,2)
        yold=pix(k,l);
        n=0;
        ynew = fc(yold,c);
      while (n<=nmax) & (abs(yold)<=2) & (abs(yold - ynew) >= 0.001)
          yold=ynew;
          n=n+1;
          ynew=fc(yold,c);
      end
      N(k,l)=n;
    end
end
```

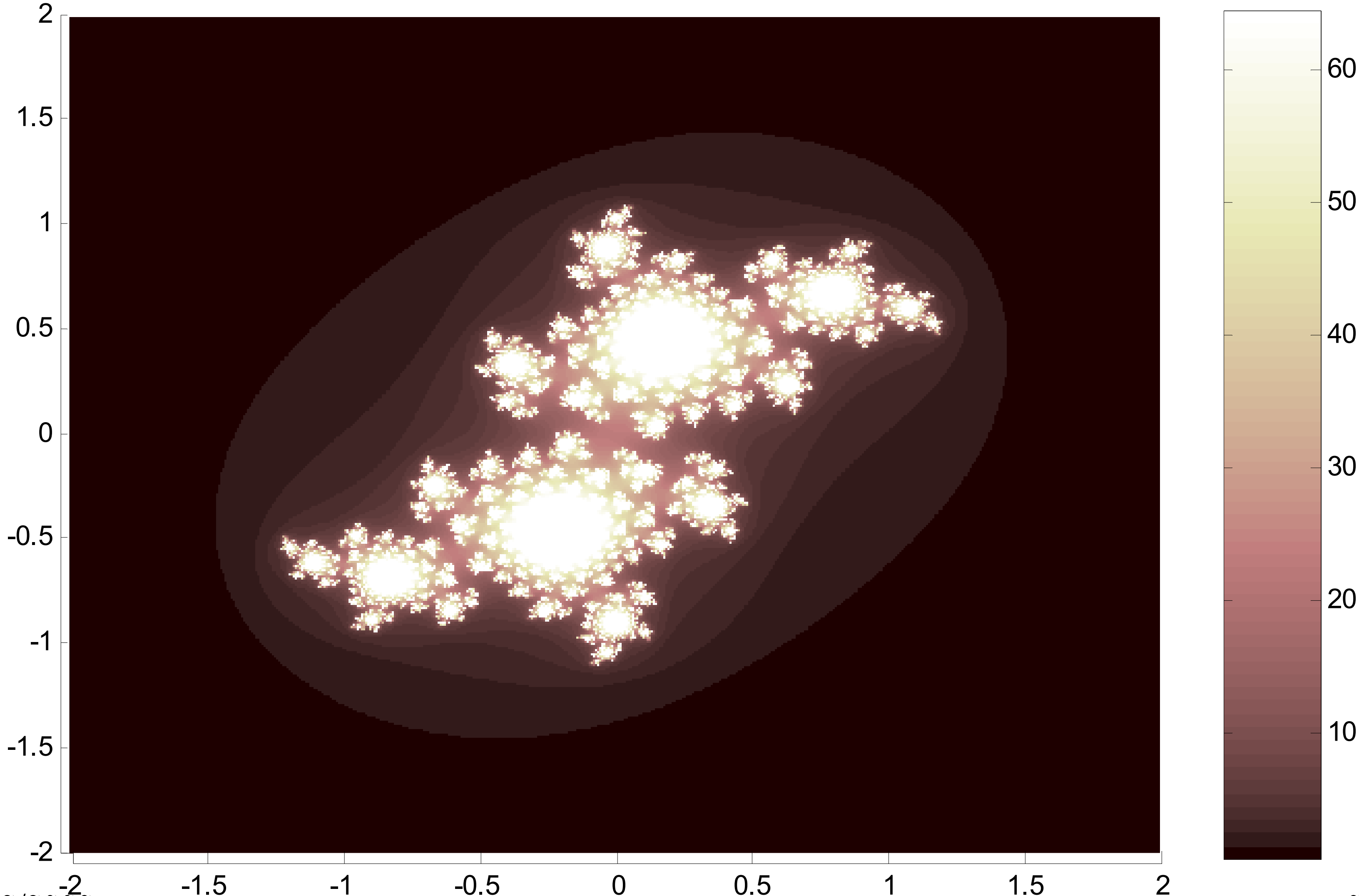
Απεικόνιση των συνόλων Julia των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f(z)=z^2+c, c\epsilon C$

- Στα επόμενα δίνονται οι απεικονίσεις των συνόλων Julia της συνάρτησης $f(z)=z^2+c$ όταν η παράμετρος c λαμβάνει τιμές σε κάποιο πεδίο του μιγαδικού επιπέδου (ακριβέστερα όπως θα εξηγηθεί στη συνέχεια για τα c που ανήκουν στο σύνολο του Mandelbrot).

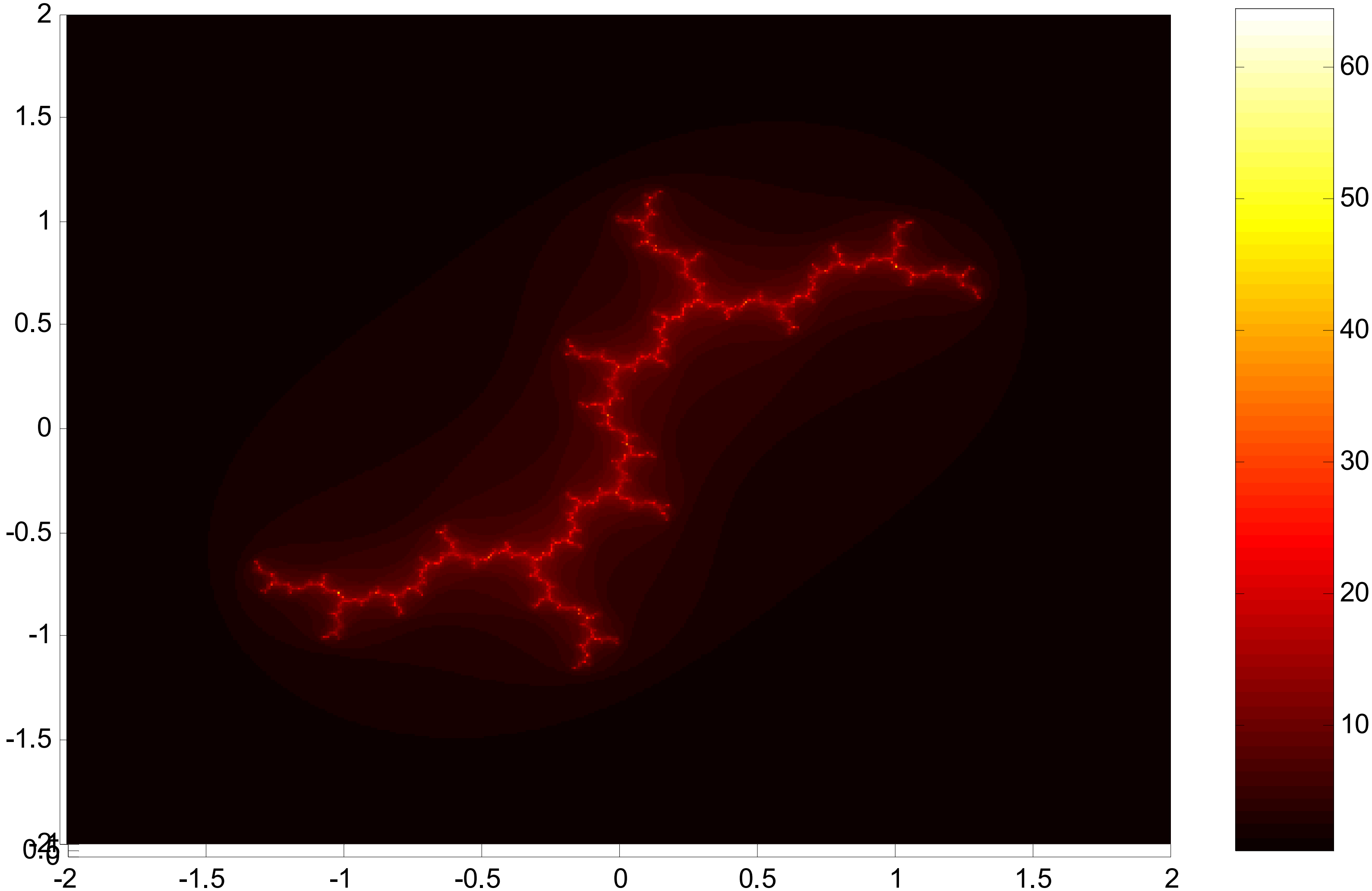
c=-0.5+0.5i



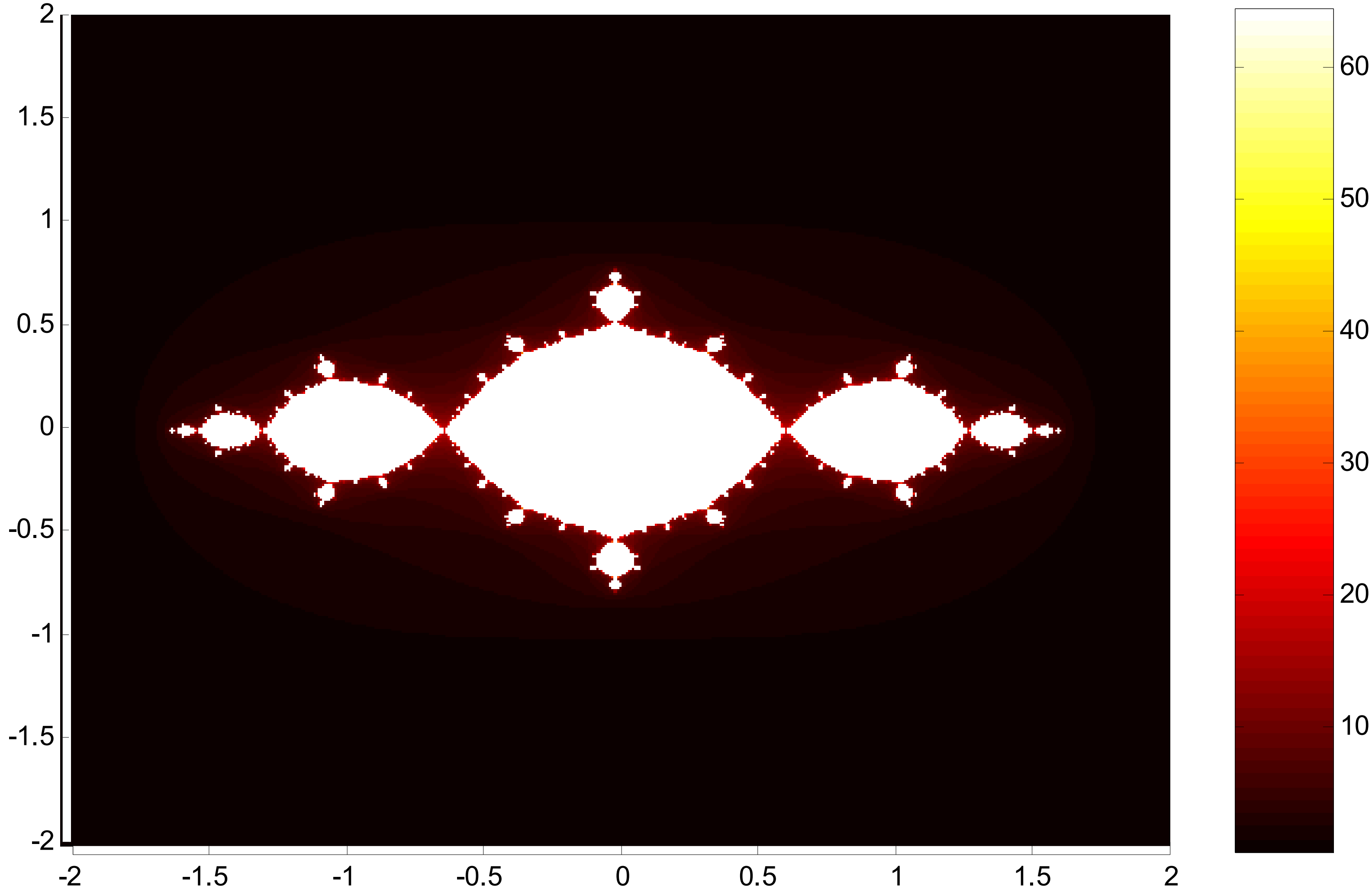
c=-0.75+0.655i



c=i



Σύνολο Mandelbrot



Συμπεράσματα για τα σύνολα Julia της συνάρτησης $f(z)=z^2+c$

- Πολύ σημαντικό ρόλο στη μορφή του συνόλου Julia έχει η θέση της σταθεράς c στο σύνολο του Mandelbrot.
- Αν το c ανήκει στο εσωτερικό του κεντρικού τμήματος του συνόλου του Mandelbrot τότε το σύνολο Julia είναι ένας «παραμορφωμένος» κύκλος ο οποίος περιέχει ένα ελκυστικό σταθερό σημείο.
- Αν το c ανήκει στο εξωτερικό του συνόλου του Mandelbrot τότε το σύνολο Julia αποτελείται από άπειρα μικρά τμήματα.
- Αν το c ανήκει εσωτερικό των υπολοίπων τμημάτων του συνόλου του Mandelbrot τότε το σύνολο Julia αποτελείται από πολλούς «παραμορφωμένους» κύκλους.

$p(z)=z^n-1$

- Βήμα 1

1-1 Αντιστοίχιση των pixels της οθόνης με τους μιγαδικούς αριθμούς ενός μιγαδικού επιπέδου και αποθήκευση του κάθε z σε ένα διδιάστατο πίνακα Z.

- Βήμα 2

Ξεκινάμε από ένα z του πίνακα και υπολογίζουμε τις επαναλήψεις:

$$\{N(z), N^2(z), N^3(z), \ldots, N^m(z), \ldots, N^{Mmax}(z)\}$$

και κάθε φορά πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό της επόμενης επανάληψης, ελέγχουμε τη σύγκλιση της επανάληψης στην οποία βρισκόμαστε με το εξής κριτήριο:

Κριτήρια Σύγκλισης-Διακοπής

- $m > Mmax$
- $|N^m(z) - z_1| \le eps$ or $|N^m(z) - z_2| \le eps$ or… or $|N^m(z) - z_n| \le eps$
- $|N^m(z) - N^{m-1}(z)| \le eps$

- Βήμα 3

Όταν έχουμε σύγκλιση ή όταν φτάνουμε το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων, αποθηκεύουμε τον αριθμό της επανάληψης στην οποία καταλήξαμε σε έναν διδιάστατο πίνακα ακριβώς στην ίδια θέση με αυτή που βρίσκεται ο μιγαδικός αριθμός για τον οποίο εκτελέσαμε τη διαδικασία.

Με αυτόν τον τρόπο αρχίζει να δημιουργείται ένας νέος διδιάστατος πίνακας M ίδιας διάστασης με τον αρχικό, ο οποίος περιέχει τους δείκτες των επαναλήψεων σύγκλισης ή διακοπής για κάθε σημείο.

- Βήμα 4

Επιστροφή στο βήμα 2 θεωρώντας ένα νέο z.

Η ίδια διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία του πίνακα Z και να δημιουργηθεί ο πίνακας M.

Παράσταση του πίνακα M, Δημιουργία του συνόλου Julia

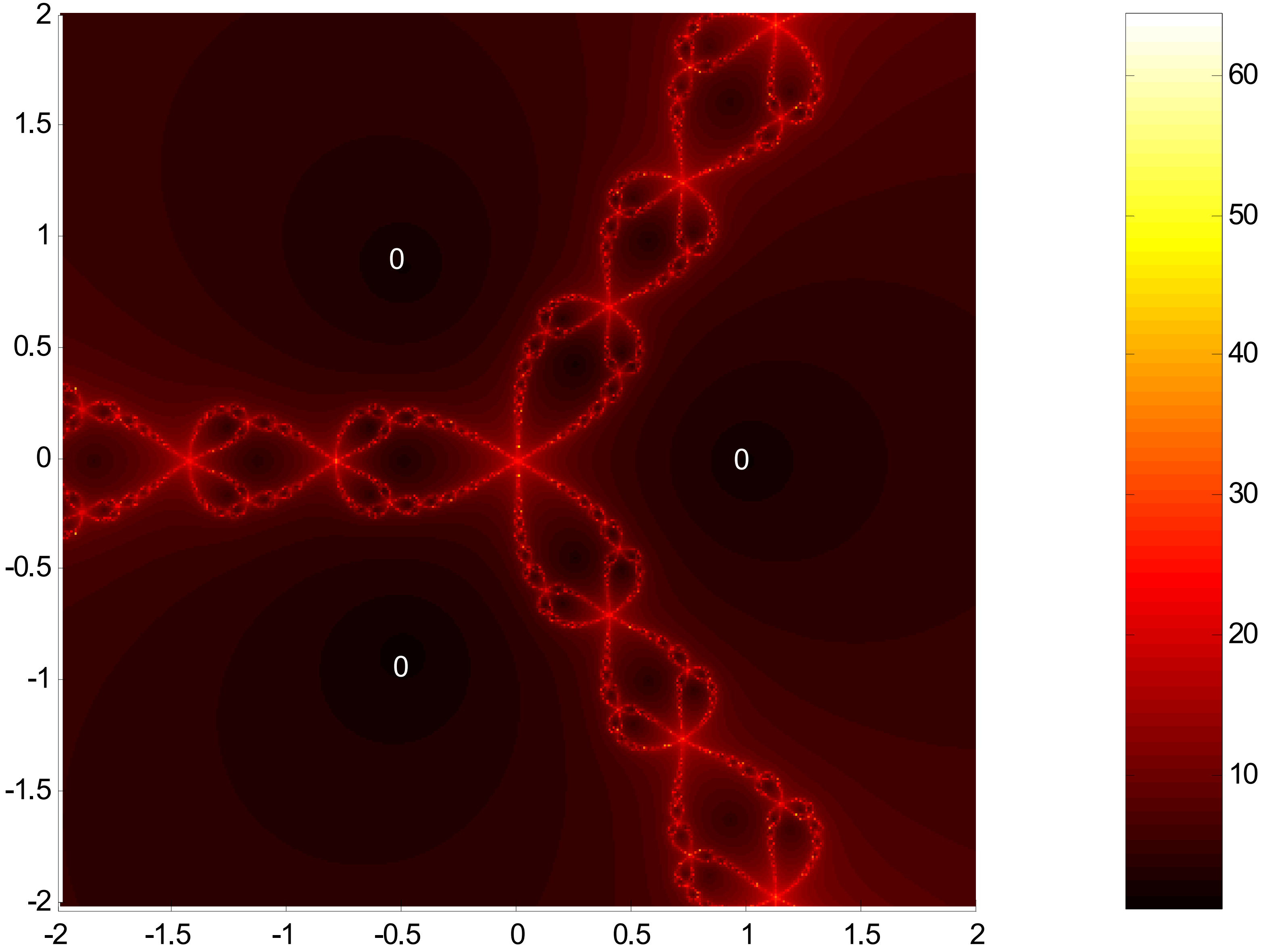
- Η παράσταση του πίνακα M σε ένα διάγραμμα με τέτοιο τρόπο ώστε σε κάθε τιμή του να αντιστοιχεί και ένα διαφορετικό χρώμα δίνει την απεικόνιση του συνόλου Julia.
- Η αντιστοίχιση των χρωμάτων γίνεται σε συγκεκριμένη κλίμακα, για παράδειγμα αν η κλίμακα που διαλέγουμε είναι το greyscale, οι μικρές τιμές του πίνακα είναι κοντά στο μαύρο, οι μεγάλες κοντά στο άσπρο και οι ενδιάμεσες αναπαρίστανται με διαβαθμίσεις του γκρι.

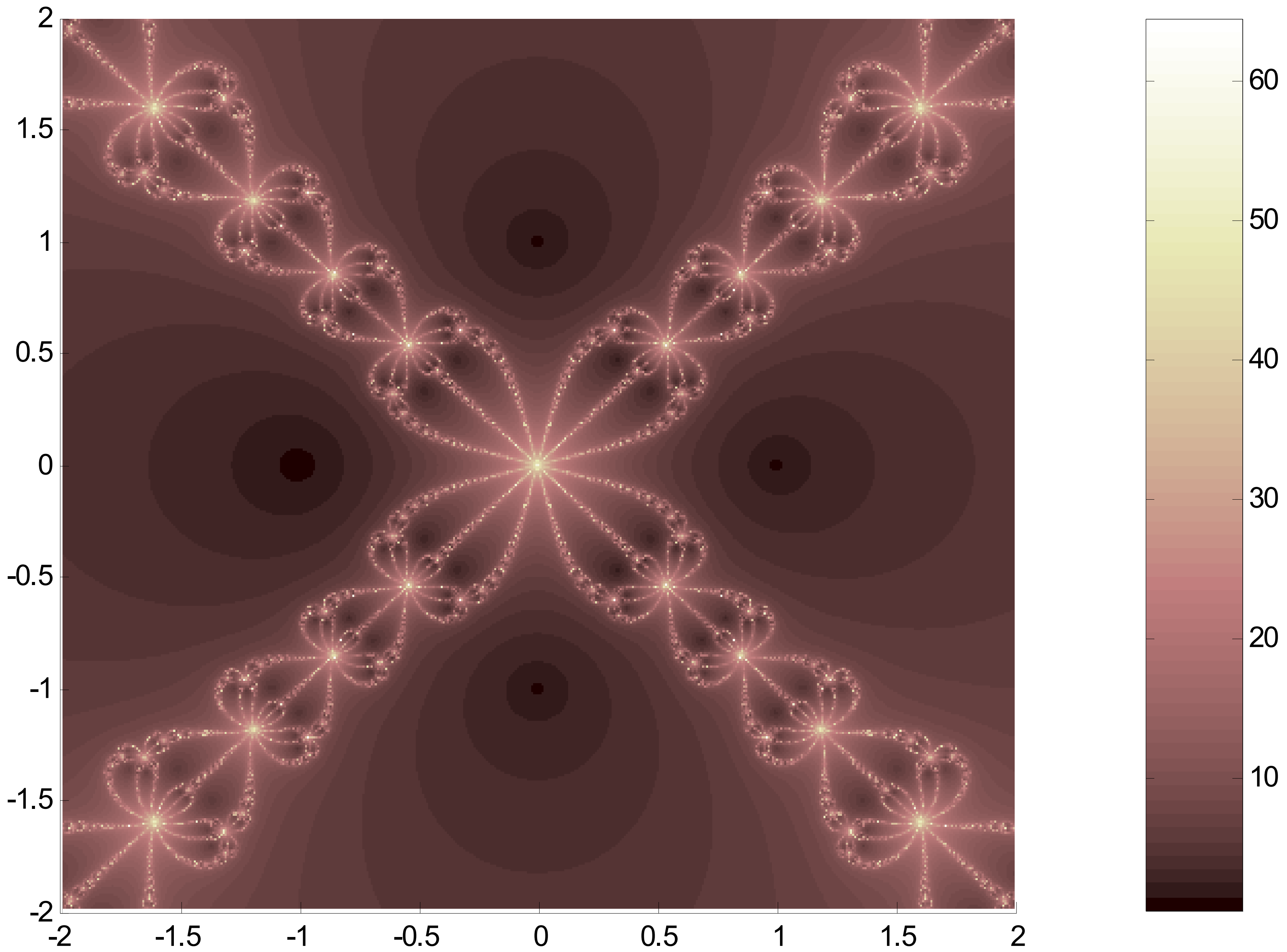
Κώδικας υλοποίησης της μεθόδου συνόλου στάθμης

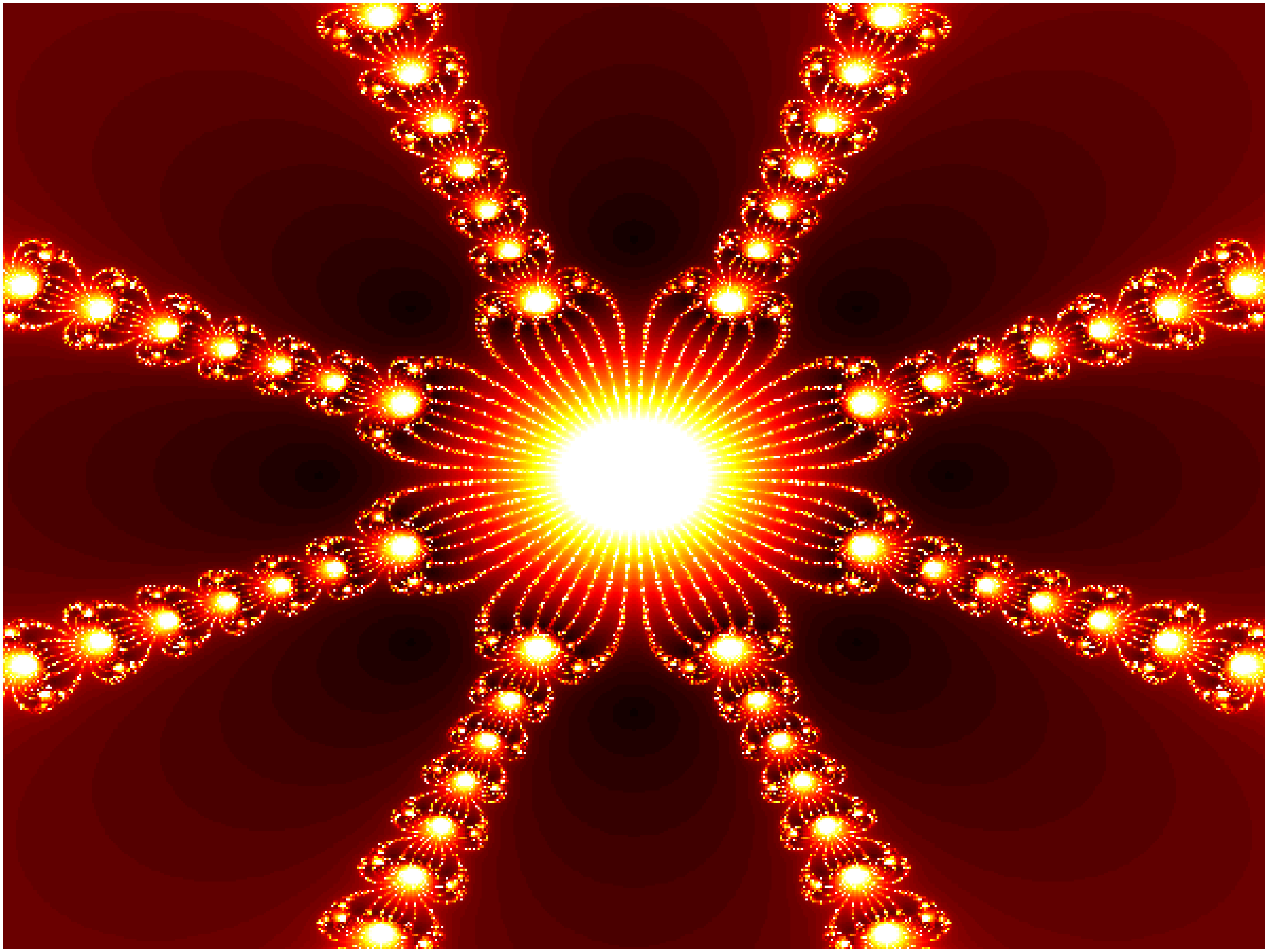
```
function [M]=julian(mmax,n)

[x,y]=meshgrid(linspace(-2,2,2000),linspace(-2,2,1800));
pix=x+i*y;

p=nroots(n);

for k=1:size(pix,1)
    for l=1:size(pix,2)
        yold=pix(k,l);
        m=0;
        ynew = fn(yold,n);
       while (m<=mmax) & (abs(ynew-p(1))>=10^-12)&  (abs(ynew-p(2))>=10^-12) & ...
           (abs(ynew-p(3))>=10^-12) & (abs(yold - ynew)>= 0.001)
            yold=ynew;
            m=m+1;
            ynew=fn(yold,n);
       end
       M(k,l)=m;
    end
end
```

Απεικόνιση των συνόλων Julia των πολυωνυμικών συναρτήσεων $f(z)=z^3-1$, $f(z)=z^4-1$ και $f(z)=z^8-1$

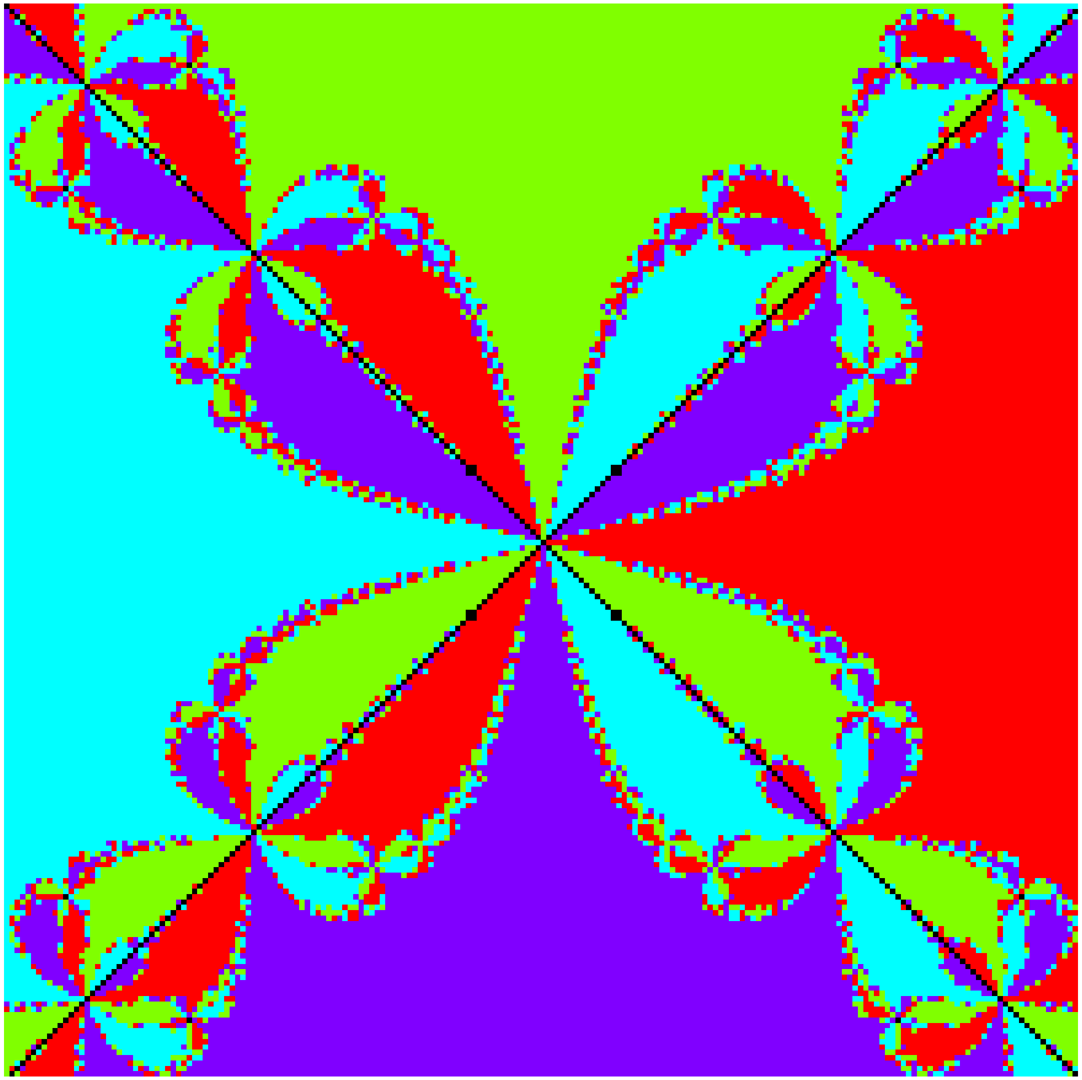
- Στα επόμενα δίνονται οι απεικονίσεις των συνόλων Julia για τα πολυώνυμα z^3-1, z^4-1 και z^8-1 .
- Στα γραφήματα φαίνονται οι θέσεις των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο ώστε να είναι πιο εύκολο να δει κανείς της λεκάνες έλξης τους και το σύνορο αυτών, δηλαδή το σύνολο Julia.
- Επίσης δίνεται και ο χρωματικός χάρτης που χρησιμοποιήθηκε όπου φαίνεται με βάση το χρωματισμό ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτήθηκαν για τη σύγκλιση ή μη του κάθε σημείου του μιγαδικού επιπέδου.


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
0
0
0
60
50
40
30
20
10

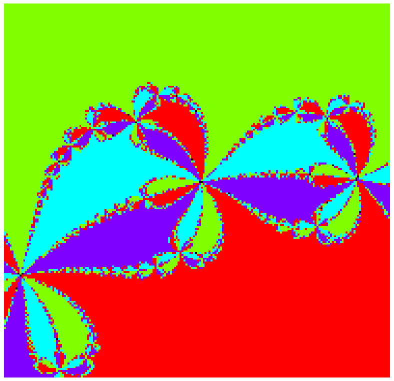

2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
60
50
40
30
20
10



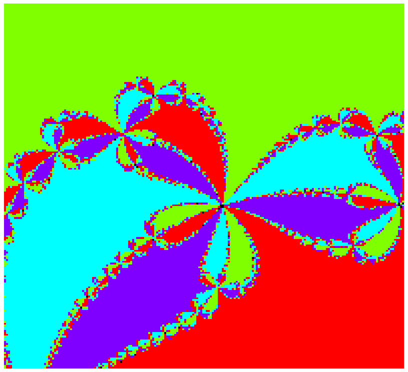
$f(z)=z^4-1$ με διαφορετικό χρώμα σε κάθε λεκάνη έλξης της κάθε ρίζας



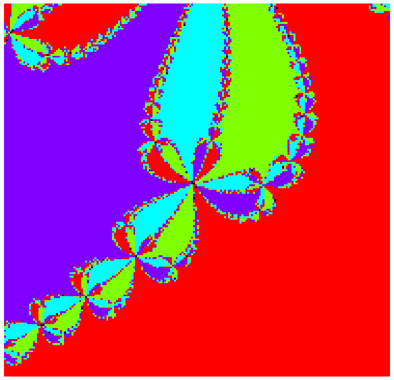
Λεπτομέρειες (Μεγεθύνσεις συγκεκριμένων περιοχών) του συνόλου Julia της $f(z)=z^4-1$



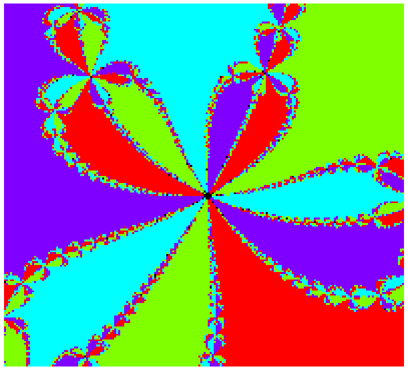
x(0.336,0.410)
y(0.653,0.727)



x(0.361,0.369)
y(0.705,0.714)



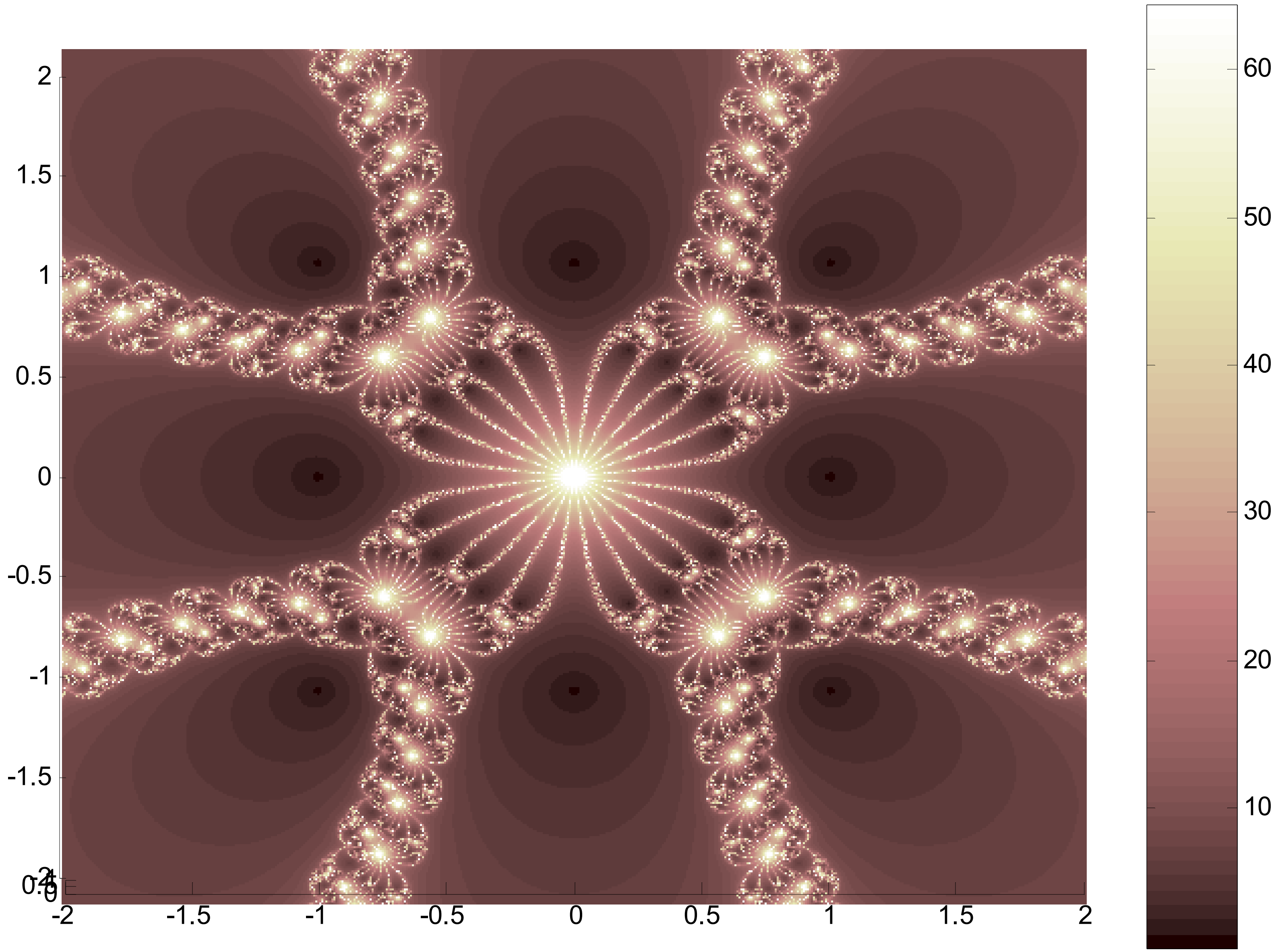
x(0.364,0.367)
y(0.706,0.708)



x(0.365,0.366)
y(0.706,0.707)

Απεικόνιση των συνόλων Julia της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(z)=z^8+3z^4-4$

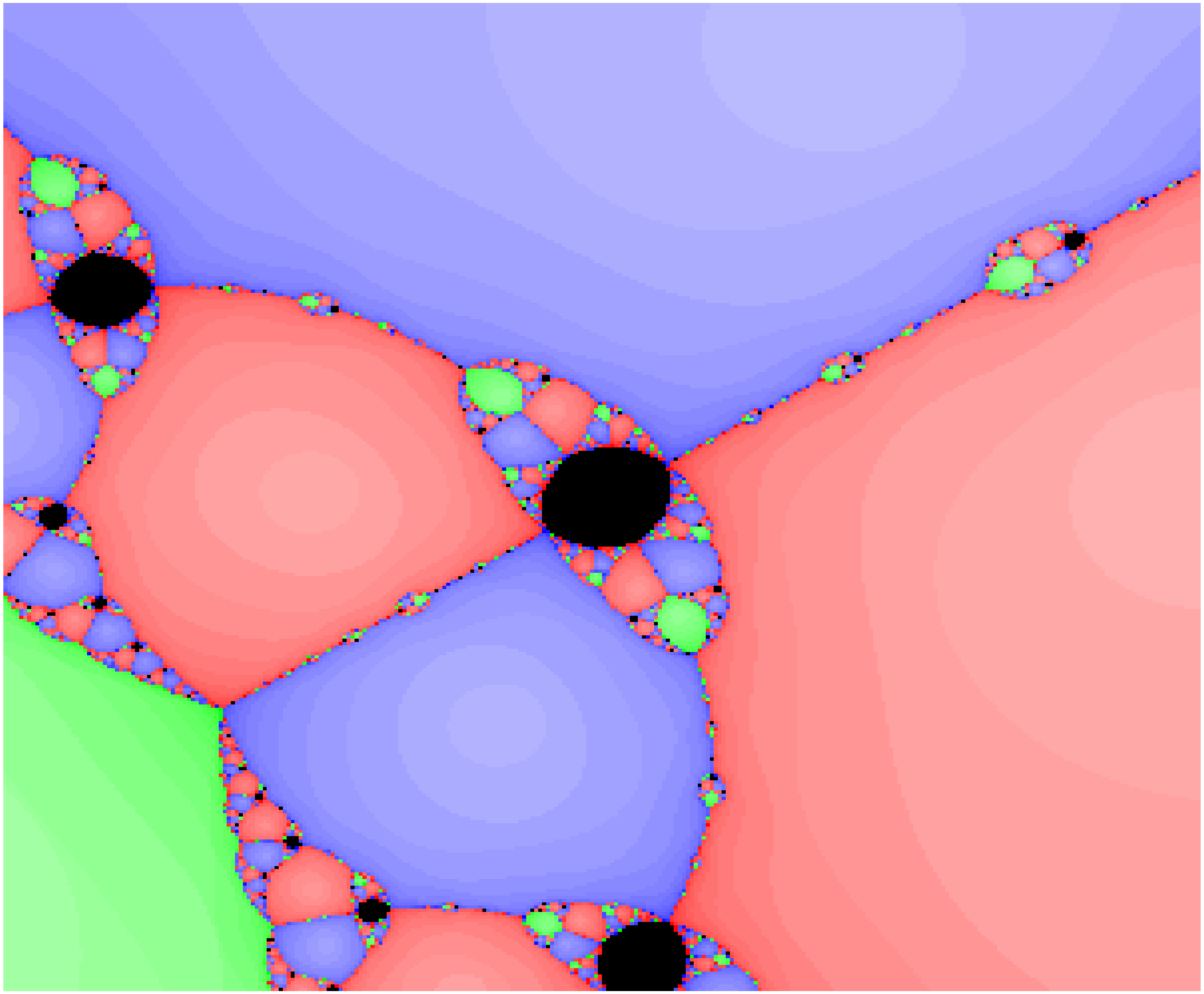
- Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(z)=z^8+3z^4-4$ έχει τις εξής ρίζες:
- $r_1= -1+i$, $r_2= -1-i$, $r_3= 1+i$, $r_4= 1-i$, $r_5= -1$, $r_6= i$, $r_7= -i$, $r_8= 1$
- Στη συνέχεια δίνεται η απεικόνιση του συνόλου Julia για τη συνάρτηση $f(z)=z^8+3z^4-4$.


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
60
50
40
30
20
10

Πολυώνυμο που η μέθοδος Newton αποτυγχάνει σε μικρές περιοχές

- Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο τρίτου βαθμού του οποίου οι ρίζες είναι οι:
- $r_1=1$
  $r_2=-1.3846-0.9231i$
  $r_3= 0.384609+0.9231i$

- Τότε η εφαρμογή της μεθόδου Newton δίνει το σύνολο Julia που φαίνεται στη συνέχεια, όπου οι μαύρες περιοχές περιέχουν τα σημεία εκκίνησης για τα οποία η μέθοδος δεν συγκλίνει σε καμία ρίζα του πολυωνύμου.

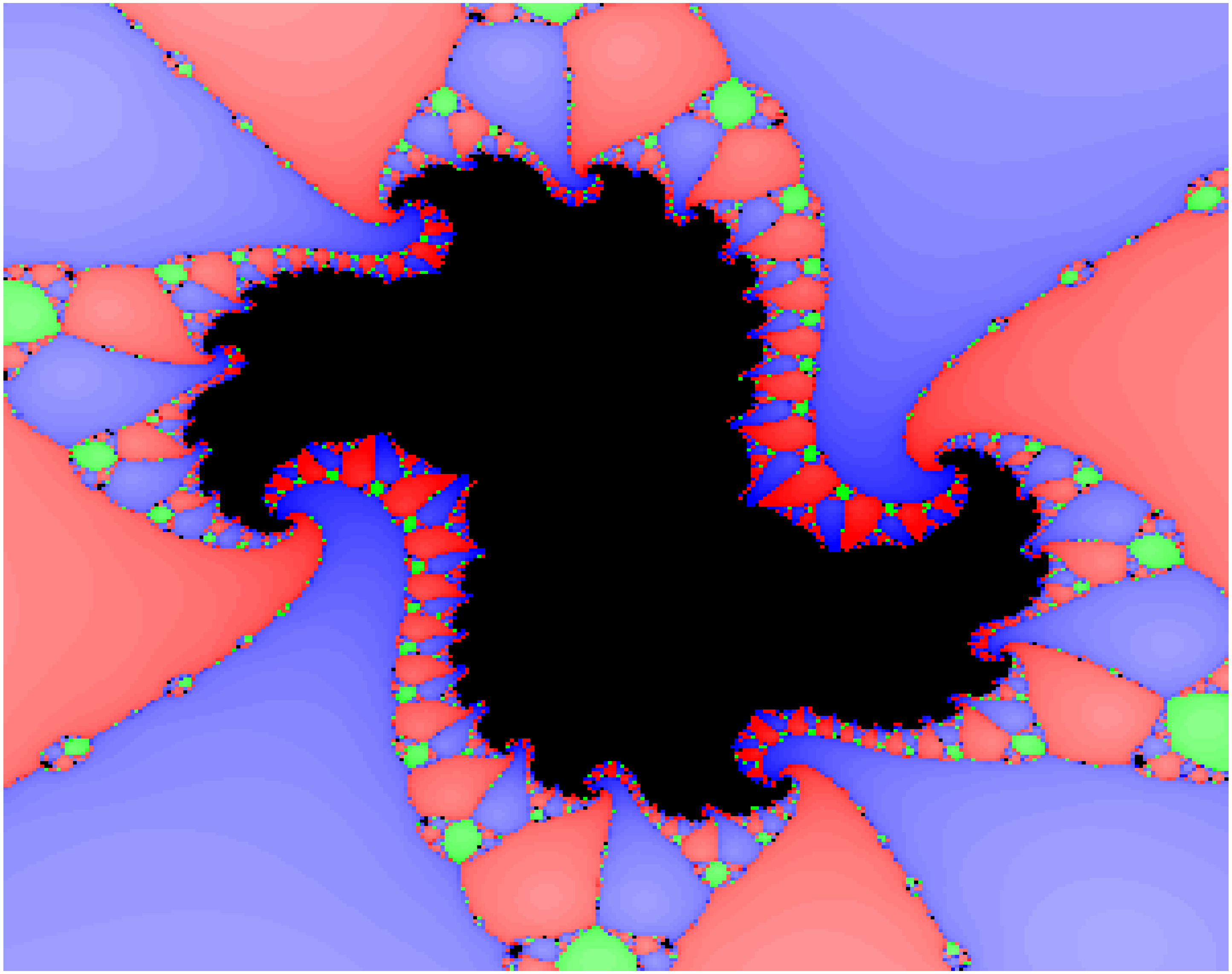


Πολυώνυμο που η μέθοδος Newton αποτυγχάνει

- Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο τρίτου βαθμού του οποίου οι ρίζες είναι (μία ελαφριά διαταράξη των προηγουμένων ριζών) οι:

- $r_1=1$
  $r_2=-1.3846-0.9i$
  $r_3= 0.384609+0.93i$

- Τότε η εφαρμογή της μεθόδου Newton δίνει το σύνολο Julia που φαίνεται στη συνέχεια, όπου όλα τα σημεία στην μαύρη περιοχή δεν συγκλίνουν κατά τις επαναλήψεις της μεθόδου σε καμία ρίζα του πολυωνύμου.



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. M.F.Barnsley: *Fractals Everywhere.* Academic Press, 1993.
2. P.Blanchard: *The Dynamic of Newton's Method*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume 49, 1994.
3. Λ.Ευαγγελάτου-Δάλλα: *Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας*. Σημειώσεις Παραδόσεων, 2000.
4. Peitgen,Jurgens,Saupe: *Fractals for the Classroom*. Springer-Verlag, 1992.
5. Peitgen,Richter: *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, 1986.