Εργασία στα πλαίσια του μαθήματος

812. Θέματα Μαθηματικής Ανάλυσης ΙΙ – Γεωμετρία των Fractals.

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών
2006 – 2007

Μέτρο Lebesgue, Μέτρο Hausdorff και η σχέση μεταξύ τους.

Αιμίλιος Θεοφάνους
Α.Μ.: 200321348
Χριστίνα Μπούρα
Α.Μ.: 200323188

Υπεύθυνη καθηγήτρια:
Λεώνη Ευαγγελάτου – Δάλλα

Περιεχόμενα

1 Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$. 2
1.1 Εισαγωγικές έννοιες. 2
1.2 Τα θεωρήματα του Καραθεοδωρή και η κατασκευή του μέτρου Lebesgue. 4
1.3 Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue. 12
1.3.1 Μέτρο Lebesgue και απλοί μετασχηματισμοί. 12
1.3.2 Παρατηρήσεις - Ασκήσεις 13

2 Το μέτρο Hausdorff στον $\mathbb{R}^k$. 17
2.1 Ιδιότητες του μέτρου Hausdorff. 19

3 Η σχέση μεταξύ των μέτρων Lebesgue και Hausdorff. 22
3.1 Θεώρημα Κάλυψης Vitali. 22
3.2 Ισοδιαμετρικό πρόβλημα. 23
3.2.1 Παρατηρήσεις - Αποτελέσματα 26

Βιβλιογραφία 29

1 Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$.

1.1 Εισαγωγικές έννοιες.

Στην αρχή της ενότητας αυτής, θα παρουσιαστούν μερικές θεμελειώδεις έννοιες και αποτελέσματα της θεωρίας μέτρου, οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατασκευή του μέτρου Lebesgue.

Θα αρχίσουμε παρουσιάζοντας την πολύ βασική έννοια της σ-άλγεβρας. Η σημαντικότητα της έννοιας αυτής γίνεται φανερή με τον επόμενο κιόλας ορισμό, μιας και οι σ-άλγεβρες αποτελούν το πεδίο ορισμού κάθε μέτρου.

Ορισμός 1.1 (σ-άλγεβρα). *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται σ-άλγεβρα στο X αν είναι μη κενή, κλειστή ως προς συμπληρώματα και κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις.*

Δηλαδή,

i. *Υπάρχει $A \subseteq X$ με $A \in \mathcal{A}$.*

ii. *Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$.*

iii. *Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του X με $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε n, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Το ζευγάρι $(X, \mathcal{A})$ λέγεται **μετρήσιμος χώρος.**

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην παραγόμενη σ-άλγεβρα. Η έννοια αυτή θα μας βοηθήσει να ορίσουμε αμέσως μετά την κλάση των λεγόμενων Borel υποσυνόλων του X, η οποία θα δείξουμε παρακάτω ότι περιέχεται στην σ-άλγεβρα των Lebesgue-μετρήσιμων υποσυνόλων του X. Πριν όμως από αυτό θα μας χρειαστεί μία πρόταση.

Πρόταση 1.1. *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\{A_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια σ-αλγεβρών στο X. Τότε η οικογένεια $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} A_i$ είναι σ-άλγεβρα.*

Απόδειξη. **i.** Για κάθε $i \in I$ ισχύει $\emptyset \in A_i$ (αφού $\{A_i\}_{i\in I}$ σ-άλγεβρα) $\Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{i\in I} A_i = \mathcal{A}$.

ii. Έστω $A \in \mathcal{A} \Rightarrow$ για κάθε $i \in I$, $A \in A_i \Rightarrow$ για κάθε $i \in I$, $A^c \in A_i$ $\Rightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I} A_i = \mathcal{A}$.

iii. Έστω $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow$ για κάθε $i \in I$, $A_1, ..., A_n, ... \in A_i \Rightarrow$ για κάθε $i \in I$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A_i \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{i\in I} A_i = \mathcal{A}$.

$\square$

Ορισμός 1.2 (παραγόμενη σ-άλγεβρα). *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{F}$ τυχούσα μη-κενή οικογένεια υποσυνόλων του X. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{F}$, είναι η*

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap \{\mathcal{A} | \ \mathcal{A} \ \text{σ-άλγεβρα} \ X, \ \mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}\}.$$

Πρόταση 1.2. *Η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα στο X, η οποία περιέχει την $\mathcal{F}$.*

Δηλαδή, αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X και $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}$ τότε $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι σ-άλγεβρα ως τομή μιας μη-κενής οικογένειας σ-αλγεβρών και $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{F}$.

Επίσης, αν $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα, $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}$, έχουμε $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$ από τον ορισμό της $\sigma(\mathcal{F})$. □

Εισάγουμε τώρα την έννοια της Borel σ-άλγεβρας.

Ορισμός 1.3. *Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}$ την οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του X. Η* **Borel σ-άλγεβρα** *του X είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{T}$.*

Δηλαδή $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$.

Τα υποσύνολα του X που ανήκουν στην $\mathcal{B}(X)$ είναι τα **Borel σύνολα** του X.

Παρατήρηση

- Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του X είναι Borel.
- Κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι Borel.
- Τα G_δ και τα F_σ σύνολα είναι Borel.

Πρόταση 1.3. *Αν $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του X, τότε $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$.*

Απόδειξη.

$$\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{T}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{T}).$$

Όμοια

$$\mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{F}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}).$$

□

Ορισμός 1.4 (άλγεβρα). *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται άλγεβρα στο X αν είναι μη κενή, κλειστή ως προς συμπληρώματα και κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις.*

Παρατήρηση Κάθε σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα, ενώ το αντίθετο δεν ισχύει. Για παράδειγμα αν $X = \mathbb{N}$ και αν $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} |$ Α πεπερασμένο ή A^c πεπερασμένο$\}$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, αλλά δεν είναι σ-άλγεβρα στο $\mathbb{N}$. Ακολουθεί η θεμελιώδης έννοια του μέτρου.

Ορισμός 1.5 (μέτρο). *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ αν ικανοποιεί τα εξής:*

i. $\mu(\emptyset) = 0$.

ii. *Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων στοιχείων της $\mathcal{A}$ τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **χώρος μέτρου.**

Παρατήρηση: Η ιδιότητα (ii) λέγεται σ-προσθετικότητα.

Ορισμός 1.6 (πλήρες μέτρο). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι το μ είναι πλήρες αν ικανοποιεί το εξής: αν $\mu(E) = 0$ και $F \subseteq E$ τότε $F \in \mathcal{A}$ (οπότε $\mu(F) = 0$). Αν το μ είναι πλήρες, ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται* **πλήρης χώρος μέτρου.**

1.2 Τα θεωρήματα του Καραθεοδωρή και η κατασκευή του μέτρου Lebesgue.

Ορισμός 1.7 (εξωτερικό μέτρο). *Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια απεικόνιση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ λέγεται εξωτερικό μέτρο στο X αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

i. $\mu^*(\emptyset) = 0$.

ii. *Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

iii. *Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X τότε*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Τα εξωτερικά μέτρα είναι μια επινόηση του Έλληνα μαθηματικού Καραθεοδωρή και παρέχουν μια πολύ χρήσιμη μέθοδο για την κατασκευή μέτρων. Στη μέθοδο αυτή θα στηριχθεί η κατασκευή του μέτρου Lebesgue στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^k$, που είναι και ο κύριος σκοπός της ενότητας αυτής.

Ορισμός 1.8 (σ-κάλυψη). *Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{C}$ του X λέγεται σ-κάλυψη για το X, αν $\emptyset \in \mathcal{C}$ και υπάρχουν $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ στην $\mathcal{C}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.*

Ο παρακάτω ορισμός οφείλεται στον Καραθεοδωρή.

Ορισμός 1.9 (μ^*-μετρήσιμο σύνολο). *Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Λέμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι μ^*- μετρήσιμο αν*

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E)$$

για κάθε $E \subseteq X$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_{\mu^*}$ την οικογένεια όλων των μ^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του X.

Θεώρημα 1.1 (Κατασκευή εξωτερικών μέτρων). *Έστω $\mathcal{C}$ μια σ-κάλυψη για το μη κενό σύνολο X, και έστω $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ τυχούσα απεικόνιση με $\tau(\emptyset) = 0$. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε*

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j) \,|C_j \in \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\}.$$

Τότε η απεικόνιση μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι τρεις ιδιότητες που απαιτεί ο ορισμός.

i. $\emptyset \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \emptyset \;\Rightarrow\; 0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau(\emptyset) = 0$.
Επομένως $\mu^*(\emptyset) = 0$.

ii. Έστω $A, B \subseteq X$, με $A \subseteq B$. Έστω ότι $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ όπου $C_j \in \mathcal{C}$. Αφού $A \subseteq B$, έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ και άρα $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j)$. Επειδή η $\{C_j\}$ είναι τυχούσα κάλυψη του B από την $\mathcal{C}$, έπεται τελικώς ότι:

$$\mu^*(A) \leq \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j) \,|C_j \in \mathcal{C}, B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\} = \mu^*(B).$$

iii. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του X και έστω $\varepsilon > 0$.
Εάν $\mu^*(A_n) = +\infty$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε ισχύει. Έστω $\mu^*(A_n) < +\infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $C_{n,j} \in \mathcal{C}$ ώστε $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{n,j}$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_{n,j}) < \mu^*(A_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

Τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{n,j}\right) = \bigcup_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} C_{n,j}$ και άρα

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \tau(C_{n,j}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\tau(C_{n,j})\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)+\varepsilon.$$

Συνεπώς, αφήνοντας $\varepsilon \to 0$ θα έχουμε ότι

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n).$$

□

Θεώρημα 1.2 (Καραθεοδωρή). *Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Τότε η οικογένεια $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του X είναι σ-άλγεβρα. Αν συμβολίσουμε με μ τον περιορισμό της απεικόνισης μ^* στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$, τότε η τριάδα $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ είναι ένας πλήρης χώρος μέτρου.*

Απόδειξη. **i.** $\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$

Αν $E \subseteq X$ τότε :

$$\mu^*(E\cap\emptyset)+\mu^*(E\cap\emptyset^c) = \mu^*(\emptyset)+\mu^*(E) = \mu^*(E).$$

ii. **Αν** $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ **τότε** $A^c \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Πράγματι, αν $E \subseteq X$ τότε :

$$\mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E\cap(A^c)^c) = \mu^*(E\cap A^c)+\mu^*(E\cap A) = \mu^*(E).$$

γιατί $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

iii. **Αν** $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ **τότε** $A\cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Έστω $E \subseteq X$. Τότε:

$$\mu^*(E\cap(A\cup B)+\mu^*(E\cap(A\cup B)^c) = \mu^*(E\cap((A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c))$$
$$+\mu^*(E\cap A^c\cap B^c)$$
$$\leq \mu^*(E\cap A\cap B)+\mu^*(E\cap A^c\cap B)+\mu^*(E\cap A\cap B^c)+\mu^*(E\cap A^c\cap B^c)$$
$$= \mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c) = \mu^*(E).$$

γιατί $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

iv. Η $\mathcal{A}_{\mu^*}$ είναι άλγεβρα.

Η απόδειξη γίνεται εύκολα με επαγωγή.

v. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$τότε:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E\cap A_n)=\mu^*\left(E\cap\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right)$$

για κάθε $E\subseteq X$.

Έστω $A,B\in\mathcal{A}_{\mu^*}$ με $A\cap B=\emptyset$. Τότε αν $E\subseteq X$ παρατηρούμε ότι :

$\mu^*(E\cap(A\cup B))=\mu^*((E\cap(A\cup B))\cap A)+\mu^*(E\cap(A\cup B))\cap A^c)$=

$$\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap B).$$

Επαγωγικά, αν $A_1,A_2,....,A_N\in\mathcal{A}_{\mu^*}$ ξένα και $E\subseteq X$ τότε:

$$\mu^*(E\cap(A_1\cup.....\cup A_N))=\mu^*(E\cap A_1)+....+\mu^*(E\cap A_N).$$

Έστω τώρα $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$ και $E\subseteq X$, τότε για κάθε $N\in\mathbb{N}$:

$$\mu^*(E\cap A_1)+....+\mu^*(E\cap A_N)=\mu^*(E\cap(A_1\cup.....\cup A_N))\leq\mu^*\left(E\cap\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right)$$

από την μονοτονία του μ^*. Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E\cap A_n)\leq\mu^*\left(E\cap\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right)$$

Η αντίστροφη ανισότητα έπεται άμεσα από την σ-υποπροσθετικότητα του μ^*.

vi. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}_{\mu^*}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $E\subset X$ ισχύει:

$$\mu^*(E)\geq\mu^*\left(E\cap\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right)+\mu^*\left(E\cap\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c\right)$$

Για κάθε $N\in\mathbb{N}$ ξέρουμε ότι $\cup_{n=1}^{N}A_n\in\mathcal{A}_{\mu^*}$ επομένως

$$\mu^*(E)\geq\mu^*\left(E\cap\left(\cup_{n=1}^{N}A_n\right)\right)+\mu^*\left(E\cap\left(\cup_{n=1}^{N}A_n\right)^c\right)$$

$$\geq\sum_{n=1}^{N}\mu^*(E\cap A_n)+\mu^*\left(E\cap\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c\right)$$

$$\Rightarrow \mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*\left(E \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c\right)$$
$$= \mu^*\left(E \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)\right) + \mu^*\left(E \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c\right).$$

Η αντίστροφη ανισότητα είναι προφανής από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου.

vii. Η $\mathcal{A}_{\mu^*}$ είναι σ-άλγεβρα.

Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ όχι αναγκαστικά ξένα μεταξύ τους, τότε ορίζουμε

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus B_2, \ldots.., B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}).$$

Τότε προφανώς $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ και από το (vi) $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και άρα $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$

Από τα βήματα τώρα $(i), (ii), (vi)$ και την παρατήρηση αυτή έπεται το συμπέρασμα.

viii. Το $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ είναι μέτρο.

Ορίζουμε $\mu : \mathcal{A}_{\mu^*} \to [0, \infty]$ με $\mu(A) = \mu^*(A)$, αν $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Θα δείξουμε ότι το μ είναι μέτρο. Πράγματι,

- $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$
- Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Συνεπώς το μ είναι μέτρο στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

ix. Το μ είναι πλήρες.

Έστω $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ με $\mu(A) = \mu^*(A) = 0$ και έστω $B \subseteq A$.

Από την μονοτονία του μ έχουμε ότι

$$0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A) = 0$$

άρα $\mu^*(B) = 0$.

Έστω τώρα $E \subseteq X$. Τότε,

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \leq \mu^*(B) + \mu^*(E) = \mu^*(E).$$

Συνεπώς $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

$\square$

Έχοντας δύο σύνολα A και B σε έναν μετρικό χώρο (X, d) ορίζουμε την **απόσταση** μεταξύ των A και B να είναι η

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : \; x \in A \;\; \kappa\alpha\iota \;\; y \in B\}.$$

Ορισμός 1.10. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στον X. Το μ^* καλείται* **μετρικό εξωτερικό μέτρο** *αν ικανοποιείται η συνθήκη :*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

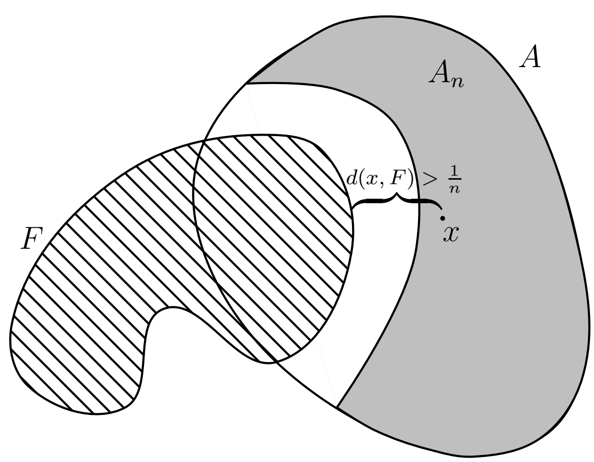
οποτεδήποτε $d(A, B) > 0$.

Θεώρημα 1.3. *Αν το μ^* είναι ένα μετρικό εξωτερικό μέτρο στον μετρικό χώρο X, τότε τα Borel σύνολα του X είναι μ^*-μετρήσιμα. Συνεπώς το μ^* περιορισμένο στην $\mathcal{B}(X)$ είναι μέτρο.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $\mathcal{B}(X)$, αρκεί να δείξουμε ότι τα κλειστά υποσύνολα του X είναι μ^*-μετρήσιμα.

Έστω λοιπόν F ένα κλειστό σύνολο και A ένα υποσύνολο του X με $\mu^*(A) < \infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε (βλέπε Σχήμα 1) το

$$A_n = \{x \in F^c \cap A : \; d(x, F) > \frac{1}{n}\}.$$



Σχήμα 1

Τότε $A_n \subset A_{n+1}$ και αφού το F είναι κλειστό έχουμε $F^c \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Πράγματι, αφού το F είναι κλειστό έχουμε ότι $F = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X : d(x, F) \leq \frac{1}{n}\}$ και άρα $F^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X : d(x, F) > \frac{1}{n}\}$. Επίσης, η απόσταση μεταξύ των

$F \cap A$ και A_n είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{n}$ και αφού το μ^* είναι μετρικό εξωτερικό μέτρο θα έχουμε ότι

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left((F \cap A) \cup A_n\right) = \mu^*(F \cap A) + \mu^*(A_n). \tag{1}$$

Στη συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(F^c \cap A). \tag{2}$$

Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε τα $B_n = A_{n+1} \cap A_n^c$ και παρατηρούμε ότι

$$d(B_{n+1}, A_n) \geq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Πράγματι, αν $x \in B_{n+1}$ και $d(x,y) < \frac{1}{n(n+1)}$ η τριγωνική ανισότητα δίνει ότι $d(y,F) < \frac{1}{n}$ και έτσι $y \notin A_n$. Επομένως

$$\mu^*(A_{2k+1}) \geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(B_j).$$

Με ένα παρόμοιο επιχείρημα βλέπουμε ότι

$$\mu^*(A_{2k}) \geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(B_{2j-1}).$$

Αφού όμως το $\mu^*(A)$ είναι πεπερασμένο, έπεται ότι και οι δύο σειρές $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_{2j})$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_{2j-1})$ συγκλίνουν. Τέλος παρατηρούμε ότι

$$\mu^*(A_n) \leq \mu^*(F^c \cap A) \leq \mu^*(A_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu^*(B_j),$$

και αυτό αποδεικνύει την (2). Αφήνοντας τώρα το n να τείνει στο άπειρο στην ανισότητα (1) βρίσκουμε ότι $\mu^*(A) \geq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F^c \cap A)$ και συνεπώς το F είναι μ^*-μετρήσιμο το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη. $\square$

Ακολουθεί ο κύριως ορισμός της ενότητας αυτής. Το μέτρο Lebesgue πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Henri Lebesgue το 1901 και ακολούθησε η παρουσίαση του ολοκληρώματος Lebesgue έναν χρόνο αργότερα. Και τα δύο αυτά κομμάτια αποτέλεσαν μέρος της διδακτορικής του διατριβής που δημοσιεύτηκε το 1902.

Ορισμός 1.11 (μέτρο Lebesgue). *Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}$ την οικογένεια των ανοιχτών διαστημάτων $R = \prod_{j=1}^{k}(a_j, b_j), -\infty < a_j \le b_j < \infty$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^k$. Η $\mathcal{C}$ είναι σ-κάλυψη του $\mathbb{R}^k$. Για κάθε ανοιχτό διάστημα R ορίζουμε*

$$\tau(R) = vol_k(R) = \prod_{j=1}^{k}(b_j - a_j).$$

Η $\mathcal{C}$ και η τ επάγουν ένα εξωτερικό μέτρο λ_k^* στον $\mathbb{R}^k$. Δηλαδή αν $E \subseteq \mathbb{R}^k$ τότε:

$$\lambda_k^*(E) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} vol_k(R_j)\,|R_j \in \mathcal{C}, E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j\}.$$

Αν $\mathcal{L}_k$ είναι η σ-άλγεβρα των λ_k^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ τότε το $\lambda_k = \lambda_k^*|_{\mathcal{L}_k}$ είναι πλήρες μέτρο στην $\mathcal{L}_k$.

Το λ_k^* είναι το **εξωτερικό μέτρο Lebesgue** *στον $\mathbb{R}^k$. Το λ_k είναι το* **μέτρο Lebesgue** *στον $\mathbb{R}^k$. Η $\mathcal{L}_k$ είναι η σ-άλγεβρα των* **Lebesgue μετρήσιμων** *υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$.*

Μπορεί να αποδειχτεί το ακόλουθο θεώρημα[1]:

Θεώρημα 1.4. *Αν το S είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}^k$, τότε το S είναι Lebesgue-μετρήσιμο και $\lambda_k(S) = vol_k(S)$.*

Στον $\mathbb{R}$ η κατάσταση (σαφώς περισσότερο απλοποιημένη) έχει ως εξής:

Ορισμός 1.12 (Εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$). *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$ $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ορίζεται ως εξής:*

Αν $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, τότε:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty}(b_n - a_n)\,|A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n), a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n < b_n, n = 1, 2, ...\}.$$

Το λ^* είναι καλώς ορισμένο, επειδή το σύνολο του οποίου παίρνουμε το inf είναι μη-κενό, αφού κάθε σύνολο $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, μπορεί να καλυφθεί από μια ακολουθία διαστημάτων (a_n, b_n), όπως παραπάνω. Αν το σύνολο είναι το $\{+\infty\}$, τότε $\lambda^*(A) = \inf\{+\infty\} = +\infty$.

[1] Για την απόδειξη βλέπε [1].

1.3 Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue.

Πρόταση 1.4. *Κάθε Borel υποσύνολο του* $\mathbb{R}^k$ *είναι Lebesgue μετρήσιμο. Δηλαδή* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{L}_k$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.4 έχουμε ότι αν $\mathcal{C}$ η οικογένεια όλων των διαστημάτων του $\mathbb{R}^k$, τότε

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}_k \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{L}_k.$$

Όμως $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

Παρατήρηση: Ειδικότερα, τα ανοιχτά, κλειστά, G_δ και F_σ σύνολα είναι Lebesgue μετρήσιμα.

1.3.1 Μέτρο Lebesgue και απλοί μετασχηματισμοί.

Ισχύουν τα ακόλουθα:

Πρόταση 1.5. *Έστω* $A \in \mathcal{L}_k$. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}^k$ *ισχύει*
$x + A = \{x + a \mid a \in A\} \in \mathcal{L}_k$ *και*

$$\lambda_k(x + A) = \lambda_k(A).$$

Ειδικότερα, σχετικά με την πιο πάνω πρόταση, ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα[2]:

Θεώρημα 1.5 (Μοναδικότητα του μέτρου Lebesgue ως προς το αναλλοίωτο των μεταθέσεων). *Αν* μ *είναι ένα μέτρο στον* $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ *με τις ιδιότητες:*

i. $\mu(I + x) = \mu(I)$ *για κάθε διάστημα* I *του* $\mathbb{R}^k$ *και* $x \in \mathbb{R}^k$, *και*

ii. $\mu(K) < +\infty$ *για κάθε συμπαγές σύνολο* $K \subset \mathbb{R}^k$

τότε υπάρχει $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ *ώστε* $\mu = a\lambda_k$, *δηλαδή* $\mu(A) = a\lambda_k(A)$ *για κάθε* $A \in \mathcal{L}_k$.

Πρόταση 1.6. *Έστω* $A \in \mathcal{L}_k$. *Για κάθε* $r > 0$ *ισχύει* $rA = \{ra | a \in A\} \in \mathcal{L}_k$ *και*

$$\lambda_k(rA) = r^k \lambda_k(A).$$

Πρόταση 1.7. *Έστω* $A \in \mathcal{L}_k$ *και* $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *γραμμική απεικόνιση.*
Τότε $T(A) \in \mathcal{L}_k$ *και*

$$\lambda_k(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda_k(A).$$

[2] Για την απόδειξη βλέπε [4].

1.3.2 Παρατηρήσεις - Ασκήσεις

Παρατηρήσεις

1. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^k$, τότε

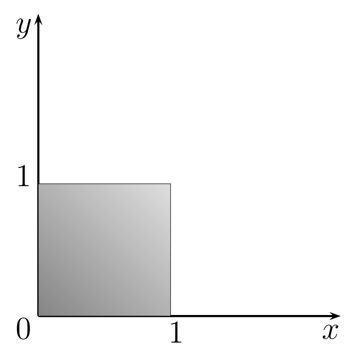
$$\lambda_0(A) = \begin{cases} n, & \text{αν το A έχει ακριβώς } n \text{ στοιχεία} \\ \infty, & \text{αν το A είναι άπειρο σύνολο} \end{cases}$$

   δηλαδή παρατηρούμε ότι το $\lambda_0(A)$ ταυτίζεται με το αριθμητικό μέτρο.

2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $d \in \mathbb{N}, 1 \leq d < k$. Εάν υπάρχει $B_n \subseteq A$ με $B_i \cap B_j = \emptyset$ και $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_d(B_n) = +\infty$, τότε μπορούμε να πούμε ότι $\lambda_d(A) = +\infty$.

Παραδείγματα

1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ με $A = [0,1]^2$, (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

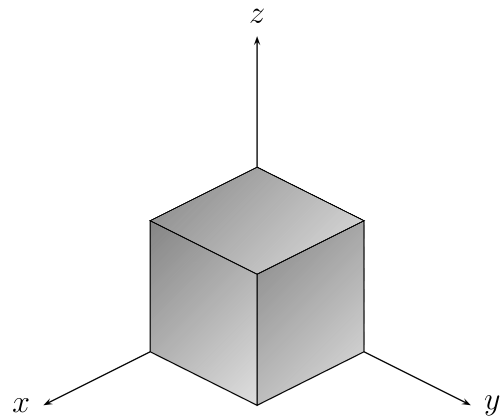
   Τότε έχουμε:

$$\lambda_0(A) = +\infty$$
$$\lambda_1(A) = +\infty$$
$$\lambda_2(A) = 1$$

   και

$$\lambda_j(A) = 0 \quad \forall j \geq 3.$$

2. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^3$ με $A = [0,1]^3$, (Σχήμα 3).



Σχήμα 3

Τότε έχουμε:

$$\lambda_0(A) = +\infty$$
$$\lambda_1(A) = +\infty$$
$$\lambda_2(A) = +\infty$$
$$\lambda_3(A) = 1$$

και

$$\lambda_j(A) = 0 \quad \forall j \geq 4.$$

Παρατηρήστε ότι για 'καλό σύνολο Α' στον $\mathbb{R}^k$ υπάρχει $d \in \mathbb{N}$, με $1 \leq d \leq k$, ώστε

$$\lambda_\nu(A) = \begin{cases} +\infty, & \text{για } \nu < d \\ 0, & \text{για } \nu > d \end{cases}$$

Θα ονομάζουμε τον ακέραιο d **διάσταση** του Α.

Ασκήσεις

1. Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι $\lambda_d(A) = 0$.

2. Έστω $\mathcal{C}$ το τριαδικό σύνολο του Cantor. Δείξτε ότι $\lambda_1(\mathcal{C}) = 0$.

   Παρατήρηση: Παρατηρήστε ότι το μέτρο Lebesgue αδυνατεί να ξεχωρίσει τα αριθμήσιμα από τα μη αριθμήσιμα σύνολα και αυτό αποτελεί την κύρια ίσως αδυναμία του μέτρου αυτού, η οποία και θα ξεπεραστεί λίγο αργότερα με την εισαγωγή του μέτρου Hausdorff.

3. Έστω $K \subset \mathbb{R}$, με $\lambda_1(K) > 0$. Υπάρχει διάστημα $(a, b) \subseteq K$;

Η απάντηση στην άσκηση 3, όσο και αν αυτό αντιβαίνει στην διαίσθηση μας, είναι αρνητική. Ισχύει όμως το εξής πολύ ενδιαφέρον Λήμμα:

Λήμμα 1.1 (Λήμμα του Steinhaus). *Αν $A \in \mathcal{L}_k$ με $\lambda_k(A) > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:*

$$B(0,\delta) \subseteq (A - A) = \{x - y : \, x, y \in A\}.$$

Στηριζόμενος στο Λήμμα αυτό και χρησιμοποιώντας το αξίωμα της επιλογής, ο Vitali κατάφερε να κατασκευάσει ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο να μην είναι Lebesgue-μετρήσιμο.

Θεώρημα 1.6 (Vitali). **i.** *Υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο.*

ii. *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$, τότε υπάρχει $E \subseteq A$ το οποίο δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο.*

Απόδειξη. **i.** Ορίζουμε μία σχέση $\sim$ στο $\mathbb{R}$ ως εξής :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πράγματι,

- $x \sim x \Leftrightarrow x - x = 0 \in \mathbb{Q}$
- $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \sim x$
- $x \sim y$ και $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Άρα, η $\sim$ επάγει μια διαμέριση $E_a : a \in A$ του $\mathbb{R}$.

Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της επιλογής, επιλέγουμε ένα $x_a \in E_a$, $a \in A$.

Ορίζουμε

$$E = \{x_a \mid a \in A\},$$

δηλαδή το E έχει μόνο ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας.

Αν $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$, τότε ισχυρίζομαι τα εξής:

Ισχυρισμός 1: $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty}(q_k + E)$.

Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $x \in E_a \Rightarrow x \sim x_a \Rightarrow$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q} : x = q_k + x_a \Rightarrow x \in q_k + E$.

Ισχυρισμός 2: Αν $k \neq s$ τότε $(q_k + E) \cap (q_s + E) = \emptyset$.

Πράγματι, αν είχα $x \in (q_k + E) \cap (q_s + E)$ θα υπήρχαν $x_a, x_b \in E$ έτσι ώστε : $x = q_k + x_a = q_s + x_b \Rightarrow x_a - x_b = q_s - q_k \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_a \sim x_b$ $\Rightarrow x_a = x_b \Rightarrow q_k = q_s$, άτοπο.

Ισχυρισμός 3: Το E δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο.

Αν το E ήταν Lebesgue-μετρήσιμο, τότε θα έπρεπε $q_k + E \in \mathcal{L}_k$

$$\Rightarrow \infty = \lambda(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E)$$

$\Rightarrow \lambda(E) > 0$ Έτσι από το Λήμμα του Steinhaus θα πρέπει $E - E \supseteq (-\delta, \delta)$ για κάποιο $\delta > 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το $E - E$ αποτελείται μόνο από άρρητους και από το 0.

ii. Αφήνεται ως άσκηση.

$\square$

2 Το μέτρο Hausdorff στον $\mathbb{R}^k$.

Η βαθύτερη μελέτη των γεωμετρικών ιδιοτήτων των συνόλων συχνά απαιτεί μια ανάλυση της «μάζας» τους, στην πραγματοποίηση της οποίας όμως το μέτρο Lebesgue τις περισσότερες φορές αδυνατεί να ανταποκριθεί. Είναι εδώ που οι έννοιες της διάστασης ενός συνόλου (η οποία μπορεί να είναι και κλασματική) και ενός σχετικού μέτρου παίζουν κρίσιμο ρόλο.

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε το μέτρο Hausdorff στον $(\mathbb{R}^k, d)$, (όπου d η Ευκλείδεια μετρική.) Στην γενικότητα του όμως το μέτρο Hausdorff ορίζεται σε τυχαίο μετρικό χώρο.

Ορισμός 2.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ Ορίζουμε τη **διάμετρο** του συνόλου A ως :*

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A.\},$$

εάν $A \neq \emptyset$ και $\delta(\emptyset) = 0$.

Ορισμός 2.2. *Έστω $s \in R$, $s \geq 0$ και $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Τότε για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε:*

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) \ : \ E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \ \ \delta(U_i) \leq \varepsilon, \ \ i \in \mathbb{N}\}$$

Με άλλα λόγια για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε καλύματα του Ε από αριθμήσιμες οικογένειες τυχαίων συνόλων με διάμετρο μικρότερη του ε και μετά παίρνουμε το infimum των αθροισμάτων $\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i)$.

Αν αφήσουμε τώρα το $\varepsilon \to 0$ θα έχουμε το εξής:

Ορισμός 2.3. *Έστω $s \in R$, $s \geq 0$ και $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Τότε για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε ως **εξωτερικό μέτρο Hausdorff s-διάστασης** του E το:*

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(E) = \sup\{\mathcal{H}^s_\varepsilon(E), \varepsilon > 0\}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) \ : \ E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \ \ \delta(U_i) \leq \varepsilon, \ \ i \in \mathbb{N}\}$$

αυξάνεται καθώς το ε μειώνεται, δηλαδή αν έχουμε $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, τότε $\mathcal{H}^s_{\varepsilon_2}(E) \leq \mathcal{H}^s_{\varepsilon_1}(E)$. Επίσης το όριο

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(E)$$

υπάρχει, παρόλο που το $\mathcal{H}^s_\varepsilon(E)$ μπορεί να γίνει και $+\infty$.

Ακόμα, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι τα $\mathcal{H}^s_\varepsilon$ και $\mathcal{H}^s$ είναι εξωτερικά μέτρα. Ενδεικτικά, για το $\mathcal{H}^s$ έχουμε:

i. $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$, προφανώς αφού $\delta(\emptyset) = 0$.

ii. Αν $E_1 \subset E_2$ τότε $\mathcal{H}^s(E_1) \leq \mathcal{H}^s(E_2)$, αφού κάθε κάλυμμα του E_2 είναι και κάλυμα του E_1.

iii. $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i)$ για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια $\{E_i\}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη της τελευταίας σχέσης, επιλέγουμε α θετικό και σταθερό, $\varepsilon > 0$ και για κάθε i ένα κάλυμα $\{F_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ του E_i από σύνολα με διαμέτρους μικρότερες του ε, τέτοια ώστε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^s(F_{i,k}) \leq \mathcal{H}^s_\varepsilon(E_i) + \frac{\alpha}{2^i}.$$

Αφού το $\bigcup_{i,k} F_{i,k}$ είναι ένα κάλυμα του $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ από σύνολα με διάμετρο μικρότερη του ε και $\mathcal{H}^s_\varepsilon(E_i) \leq \mathcal{H}^s(E_i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$, θα έχουμε:

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \delta^s(F_{i,k})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mathcal{H}^s_\varepsilon(E_i) + \frac{\alpha}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\varepsilon(E_i) + \alpha \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i) + \alpha.$$

Δηλαδή,

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i) + \alpha.$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$, έχουμε:

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i) + \alpha$$

και αφού το α είναι τυχαίο παίρνουμε το ζητούμενο

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i).$$

□

Έτσι, από τις ιδότητες $(i), (ii)$ και (iii) το $\mathcal{H}^s$ είναι εξωτερικό μέτρο.

2.1 Ιδιότητες του μέτρου Hausdorff.

Από το Θεώρημα 1.2 του Καραθεοδωρή, το οποίο αποδείχτηκε στην προηγουμενη ενότητα, εάν περιορίσουμε το $\mathcal{H}^s$ στην σ-άλγεβρα των $\mathcal{H}^s$-μετρήσιμων συνόλων, ο περιορισμός αυτός θα είναι μέτρο. Το μέτρο αυτό θα το καλούμε **μέτρο Hausdorff s-διάστασης** ($s \in \mathbb{R}, s \geq 0$).Θα δείξουμε ότι στην σ-άλγεβρα αυτή περιέχονται τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$.

Πρόταση 2.1. *Έστω $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^k$. Αν $d(E_1, E_2) > 0$, τότε $\mathcal{H}^s(E_1 \cup E_2) = \mathcal{H}^s(E_1) + \mathcal{H}^s(E_2)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{H}^s(E_1 \cup E_2) \geq \mathcal{H}^s(E_1) + \mathcal{H}^s(E_2)$, μιας και η αντίστροφη ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου.

Έστω $\rho > 0$ σταθερό, με $\rho < d(E_1, E_2)$. Αν δοθεί μια οποιαδήποτε κάλυψη του $E_1 \cup E_2$ από σύνολα $F_1, F_2, ...$ με διαμέτρους μικρότερες από ε, όπου $0 < \varepsilon < \rho$, θεωρούμε τα

$$F_j^{'} = E_1 \cap F_j \quad \textit{και} \quad F_j^{''} = E_2 \cap F_j.$$

Τότε, οι $\{F_j^{'}\}$ και $\{F_j^{''}\}$ είναι καλύψεις για τα E_1 και E_2 αντίστοιχα και είναι προφανώς ξένες. Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta^s(F_j^{'}) + \sum_{j=1}^{\infty} \delta^s(F_j^{''}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \delta^s(F_k).$$

Παίρνοντας infimum ως προς τις καλύψεις και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ έπεται η προσδοκώμενη ανισότητα. □

Από την παραπάνω Πρόταση, είναι φανερό ότι το $\mathcal{H}^s$ είναι μετρικό εξωτερικό μέτρο. Συνεπώς από το Θεώρημα 1.3, έπεται άμεσα το ακόλουθο Πόρισμα:

Πόρισμα 2.1. *Τα Borel σύνολα του $\mathbb{R}^k$ είναι $\mathcal{H}^s$-μετρήσιμα.*

Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 2.2. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ ισχύει $E+x = \{e+x | e \in E\}$ και*

$$\mathcal{H}^s(E + x) = \mathcal{H}^s(E).$$

Δηλαδή το $\mathcal{H}^s$ παραμένει αμετάβλητο κάτω από παράλληλες μετατοπίσεις.

Πρόταση 2.3. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$ και r περιστροφή στον $\mathbb{R}^k$. Τότε ισχύει ότι*

$$\mathcal{H}^s(rE) = \mathcal{H}^s(E).$$

Δηλαδή το $\mathcal{H}^s$ παραμένει αμετάβλητο κάτω από περιστροφές.

Πρόταση 2.4. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha E = \{\alpha e \mid e \in E\}$ και*

$$\mathcal{H}^s(\alpha E) = \alpha^s \mathcal{H}^s(E).$$

Για την απόδειξη των παραπάνω προτάσεων αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η διάμετρος ενός συνόλου E μένει αμετάβλητη κάτω από παράλληλες μετατοπίσεις και περιστροφές, καθώς επίσης και ότι ικανοποιεί την σχέση: $\delta(\alpha E) = \alpha\delta(A)$ για κάθε $\alpha > 0$.

Πρόταση 2.5. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$, $l, s \in \mathbb{R}$, $l, s \geq 0$. Τότε για το εξωτερικό μέτρο Hausdorff ισχύει ότι:*

i. *αν $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ και $l > s$, τότε $\mathcal{H}^l(E) = 0$ και επίσης*

ii. *αν $\mathcal{H}^s(E) > 0$ και $l < s$, τότε $\mathcal{H}^l(E) = +\infty$.*

Απόδειξη. **i.** Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $\delta(U) \leq \varepsilon$ και $l > s$ τότε:

$$\delta^l(U) = \delta^{l-s}(U)\delta^s(U) \leq \varepsilon^{l-s}\delta^s(U).$$

Συνεπώς,

$$\mathcal{H}^l_\varepsilon(E) \leq \varepsilon^{l-s}\mathcal{H}^s_\varepsilon(E) \leq \varepsilon^{l-s}\mathcal{H}^s(E)$$

και αφού $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ και $l - s > 0$, αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$, θα έχουμε ότι $\mathcal{H}^l(E) = 0$.

ii. Όμοια, με την αντίθετη διαδικασία, θα έχουμε ότι $\mathcal{H}^l(E) = +\infty$ όταν $\mathcal{H}^s(E) > 0$ και $l < s$.

□

Από την παραπάνω πρόταση, μπορούμε να κατανοήσουμε μια αφηρημένη έννοια της Hausdorff διάστασης ενός $E \subseteq \mathbb{R}^k$, η οποία είναι μια μοναδική τιμή που συμβολίζεται με $\dim_{\mathcal{H}} E$, τέτοια ώστε:

$$\mathcal{H}^s(E) = +\infty \;\text{ αν }\; 0 \leq s < \dim_{\mathcal{H}} E$$

και

$$\mathcal{H}^s(E) = 0 \;\text{ αν }\; \dim_{\mathcal{H}} E < s < +\infty.$$

Γενικά, για $E \subseteq \mathbb{R}^k$ και για κάθε $s \geq 0$, η ποσότητα $\mathcal{H}^s(E)$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η μάζα s-διάστασης του E ανάμεσα σε σύνολα διάστασης s. Τότε, αν το s είναι μεγαλύτερο από την διάσταση του συνόλου E, το σύνολο έχει αμελητέα μάζα και συνεπώς έχουμε $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Αν το s είναι μικρότερο από τη διάσταση του Ε, τότε το Ε είναι πολύ μεγάλο (συγκριτικά) και άρα $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$. Στην κρίσιμη περίπτωση που το s συμπίπτει με την διάσταση του Ε, η ποσότητα $\mathcal{H}^s(E)$ περιγράφει το πραγματικό $s-$διάστατο μέγεθος του συνόλου.

Λήμμα 2.1. *Έστω $E, F \subseteq \mathbb{R}^k$ και $f : E \to F$ μία απεικόνιση τέτοια ώστε*

$$| f(x) - f(y) | \leq c | x - y |$$

για κάθε $x, y \in E$ και c μία σταθερά. Τότε $\mathcal{H}^s(F) \leq c^s \mathcal{H}^s(E)$.

Όπως είδαμε πριν το εξωτερικό μέτρο Hausdorff $\mathcal{H}^s$ ορίζεται για $s \in \mathbb{R}, s \geq 0$.Τι γίνεται όμως όταν $s \in \mathbb{N}$; Θα δούμε ότι σε αυτή την περίπτωση παρατηρούνται μερικά πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

- Ας ξεκινήσουμε για $s = 0$. Σε αυτή λοιπόν την περίπτωση έχουμε:

  $$\mathcal{H}^0(E) = card(E),$$

  δηλαδή, $\mathcal{H}^0(E) =$ πλήθος σημείων στο Ε και άρα το $\mathcal{H}^0$ είναι το αριθμητικό μέτρο.

- Στη συνέχεια, για $s = 1$, θα δούμε ότι το $\mathcal{H}^1$ έχει επίσης συγκεκριμένη ερμηνεία ως μέτρο μήκους. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε την τυχαία, συνεχή καμπύλη Γ με μήκος έστω $\ell(\Gamma)$, στον $\mathbb{R}^k$. Τότε η καμπύλη έχει εξωτερικό μέτρο Lebesgue $k-$διάστασης ίσο με μηδέν. Διαισθητικά, αυτό είναι αρκετά ξεκάθαρο, αφού η Γ είναι ένα μονοδιάστατο αντικείμενο σε έναν χώρο $k-$διάστασης. Θα αποδείξουμε ωστόσο στο τέλος της επόμενης ενότητας ότι η ποσότητα $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ δεν είναι μόνο πεπερασμένη, αλλά και ακριβώς ίση με το μήκος της καμπύλης Γ. Δηλαδή, έχουμε $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \ell(\Gamma)$.

  Από τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι φανερό ότι τα μέτρα Lebesgue και Hausdorff διαφέρουν. Έτσι, είναι λογικό να γεννάται το ερώτημα, πότε τα δύο αυτά μέτρα ‘‘συμπίπτουν’’ και ποιά είναι η ενδεχόμενη σχέση μεταξύ τους.

- Αν θεωρήσουμε τώρα $s = k$ στον $\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$, θα δούμε τότε ότι τα λ_k και $\mathcal{H}^k$ σχετίζονται. Για την απόδειξη όμως της ύπαρξης της σχέσης αυτής μεταξύ των δύο μέτρων θα μας χρειαστούν οι ορισμοί και τα αποτελέσματα της επόμενης ενότητας.

3 Η σχέση μεταξύ των μέτρων Lebesgue και Hausdorff.

3.1 Θεώρημα Κάλυψης Vitali.

Ορισμός 3.1. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Μια οικογένεια συνόλων $\mathscr{V}$ αποτελεί μια* **κάλυψη Vitali** *του E αν:*

Για κάθε $x \in E$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $U \in \mathscr{V}$ με $x \in U$ και $0 < \delta(U) \leq \varepsilon$ ή ισοδύναμα αν για κάθε $x \in E$ έχουμε $\inf\{\delta(U) : x \in U \in \mathscr{V}\} = 0$.

Θεώρημα 3.1 (Κάλυψης Vitali). *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Εάν το E είναι $\mathcal{H}^s-$μετρήσιμο και $\mathscr{V}$ είναι μια κάλυψη Vitali του E αποτελούμενη από κλειστά σύνολα, τότε υπάρχει αριθμήσιμη (πεπερασμένη ή όχι) υποοικογένεια $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ της $\mathscr{V}$ με $U_i \cap U_j = \emptyset$ για $i \neq j$ τέτοια ώστε*

$$\mathcal{H}^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = 0 \text{ ή } \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) = +\infty.$$

Δηλαδή, το πιο πάνω θεώρημα, μας δίνει την δυνατότητα σε ένα σύνολο με κάλυψη Vitali $\mathscr{V}$ να βρούμε μία υποοικογένεια της $\mathscr{V}$ ξένων συνόλων, η οποία καλύπτει σχεδόν παντού το δεδομένο σύνολο, ή το άθροισμα των διαμέτρων τους να είναι $+\infty$.

Απόδειξη. Έστω $\rho > 0$ σταθερό. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta(U) \leq \rho$ $\forall U \in \mathscr{V}$. Επιλέγουμε την $\{U_i\}$ επαγωγικά. Έστω U_1 ένα τυχαίο μέλος της $\mathscr{V}$. Υποθέτουμε ότι τα $U_1, ..., U_m$ έχουν επιλεχθεί. Ορίζουμε το

$$d_m = \sup\{\delta(U) : U \in \mathscr{V} \text{ με } U \cap U_i = \emptyset \ \forall i = 1, 2, ..., m\}.$$

Εάν $d_m = 0$, τότε $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ και άρα έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή $\mathcal{H}^s\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_i\right) = 0$ και η διαδικασία τερματίζεται.

Διαφορετικά επιλέγουμε U_{m+1} ένα σύνολο στην $\mathscr{V}$ με $U_{m+1} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_i\right) = \emptyset$ τέτοιο ώστε $\delta(U_{m+1}) \geq \frac{1}{2} d_m$.

Έστω ότι η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρον και ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) < \infty$, αφού διαφορετικά αν $\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) = +\infty$ θα είχαμε τελειώσει.

Τώρα, για κάθε i, θέτουμε ως S_i τη σφαίρα με κέντρο στο U_i και ακτίνα ίση με $3\delta(U_i)$.

Ισχυρισμός: Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i \subseteq \bigcup_{i=k+1}^{\infty} S_i$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει αφού εάν $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ τότε υπάρχει $U \in \mathscr{V}$ με $U \cap U_i = \emptyset$ $\forall i = 1, 2, ..., k$ και με $x \in U$. Εχουμε ότι $\delta(U_i) \to 0$ συνεπώς υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\delta(U) > 2\delta(U_m)$. Από τον τρόπο επιλογής της $\{U_i\}$ το U πρέπει να τέμνει κάποιο U_i για κάποιο i με $k < i < m$, για το οποίο $\delta(U) \leq 2\delta(U_m)$. Επομένως, θα έχουμε ότι $U \subset S_i$ και άρα ο ισχυρισμός απεδείχθει.

Έτσι για $\varepsilon > 0$ και από τον πιο πάνω ισχυρισμό, έχουμε:

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon\left(E\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\right) \leq \mathcal{H}^s_\varepsilon\left(E\backslash\bigcup_{i=1}^{k}U_i\right) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty}\delta^s(S_i) = 6^s\sum_{i=k+1}^{\infty}\delta^s(U_i),$$

δεδομένου ότι το k είναι αρκετά μεγάλο για να εξασφαλίσουμε ότι $\delta(S_i) \leq \varepsilon \ \forall i > k$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ έχουμε ότι $\mathcal{H}^s_\varepsilon\left(E\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\right) = 0$, δηλαδή το ζητούμενο. □

3.2 Ισοδιαμετρικό πρόβλημα.

Ορισμός 3.2. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Το E λέγεται* **κυρτό** *αν*

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in E \quad \text{για } x, y \in E, \quad \lambda \in [0,1].$$

Ορίζουμε ως **κυρτή θήκη του συνόλου A, conA**, *το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το A.*

Θεώρημα 3.2. *Από όλα τα συμπαγή, κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^k$, τα οποία έχουν διάμετρο το πολύ δ, η σφαίρα S του $\mathbb{R}^k$ διαμέτρου δ, έχει τον μεγαλύτερο όγκο.*

Πιο αναλυτικά: Εάν K είναι συμπαγές, κυρτό σύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\delta(K) \leq \delta$, τότε

$$\lambda_k(K) \leq \lambda_k(S) = c_k \cdot \delta^k,$$

όπου $c_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\left(\frac{k}{2}\right)!}$ ο όγκος της σφαίρας του $\mathbb{R}^k$ διαμέτρου 1. (Συγκεκριμένα $c_1 = 1$ και $c_2 = \frac{\pi}{4}$). Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι σφαίρα διαμέτρου δ.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι αρκετά περίπλοκη και αφήνεται στο ενδιαφέρον του αναγνώστη.[3]

Παρατήρηση: Αν S είναι σφαίρα διαμέτρου $\delta(S) \leq \varepsilon$, τότε έχουμε από τον ορισμό,

$$\mathcal{H}^k_\varepsilon(S) \leq \delta^k(S) = \frac{1}{c^k}\lambda_k(S).$$

[3] Βλέπε για παράδειγμα:
R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn – Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 1993, ή
H.G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge University Press, 1958.

Θεώρημα 3.3. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Τότε για τα εξωτερικά μέτρα $\lambda_k, \mathcal{H}^k$ ισχύει:*

$$\lambda_k(E) = c_k \mathcal{H}^k(E)$$

όπου c_k ο όγκος της σφαίρας του $\mathbb{R}^k$ διαμέτρου 1.

Απόδειξη. Εάν $\mathcal{H}^k(E) = \lambda_k(E) = +\infty$, έχουμε το ζητούμενο.

Έστω

$$\mathcal{H}^k(E) = \sup_{\varepsilon>0}\Big\{\inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\delta^k(U_i) : \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \delta(U_i) \leq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N}\Big\}\Big\} < +\infty$$

Έστω $\varepsilon_0 > 0$.

Επειδή $\delta(U_i) = \delta(\overline{U_i})$ και $\delta(U_i) = \delta(conU_i)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα U_i είναι κλειστά και κυρτά, με $\delta(U_i) \leq \varepsilon_0$. Άρα υπάρχουν U_i, $i \in \mathbb{N}$ κλειστά, κυρτά, ώστε

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\delta^k(U_i) < \mathcal{H}^k(E) + \varepsilon_0 \tag{3}$$

Τότε $\lambda_k(U_i) \leq c_k\delta^k(U_i), \ i \in \mathbb{N}$. (Ισοδιαμετρικό πρόβλημα). Άρα

$$\lambda_k(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_k(U_i) \leq c_k\sum_{i=1}^{\infty}\delta^k(U_i)$$

$$< c_k\mathcal{H}^k(E) + c_k\varepsilon_0$$

(από την (3)).

Επειδή το ε_0 είναι τυχαίο, έχουμε $\lambda_k(E) \leq c_k\mathcal{H}^k(E)$ και $\lambda_k(E) < +\infty$.

Έχουμε:

$$\lambda_k(E) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} vol_k(R_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i, R_i \text{ ανοιχτά διαστήματα στον } \mathbb{R}^k, i \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Έστω $\varepsilon_0 > 0$.

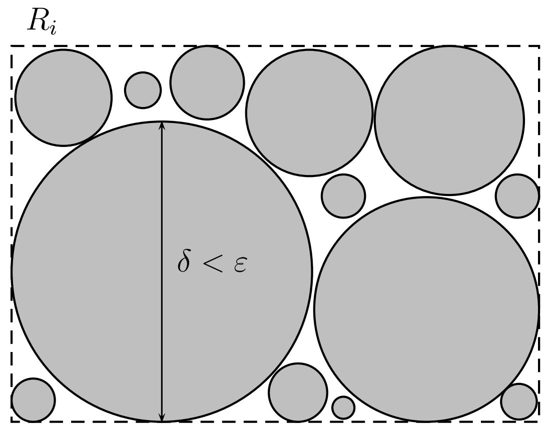
Τότε υπάρχουν R_i, $i \in \mathbb{N}$ ορθογώνια, ώστε $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ και

$$\sum_{i=1}^{\infty} vol_k(R_i) < \lambda_k(E) + \varepsilon_0 \tag{4}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τις κλειστές σφαίρες ακτίνας το πολύ $\frac{\varepsilon}{2}$ που περιέχονται στο R_i, $i \in \mathbb{N}$. Το σύνολο των σφαιρών αυτών αποτελεί κάλυψη Vitali του R_i. Άρα υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών σφαιρών

$\{S_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$ με $S_{ij} \cap S_{ik} = \emptyset$, $j \neq k$ διαμέτρου το πολύ ε (βλέπε Σχήμα 4), ώστε

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta^k(S_{ij}) = +\infty \quad \text{ή} \quad \mathcal{H}^k\left(R_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right) = 0 \tag{5}$$



Σχήμα 4

Επειδή η $\{S_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$ είναι οικογένεια κλειστών, ξένων ανά δύο υποσυνόλων του R_i έχουμε για το μέτρο λ_k,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_k(S_{ij}) = \lambda_k\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right) \leq \lambda_k(R_i) = vol_k(R_i) < +\infty. \tag{6}$$

Άρα ισχύει και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta^k(S_{ij}) < +\infty \tag{7}$$

επειδή $\lambda_k(S_{ij}) = c_k \delta^k(S_{ij})$.

Άρα από την (5)

$$\mathcal{H}^k\left(R_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \mathcal{H}^k_\varepsilon\left(R_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right) = 0$$

Επομένως,

$$\mathcal{H}^k_\varepsilon(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k_\varepsilon(R_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left[\mathcal{H}^k_\varepsilon\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right) + \mathcal{H}^k_\varepsilon\left(R_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\varepsilon}^{k} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_{ij} \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\varepsilon}^{k}(S_{ij})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \delta^{k}(S_{ij}) = \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_k(S_{ij})$$

$$\leq \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^{\infty} vol_k(R_i) \leq \frac{1}{c_k} \lambda_k(E) + \frac{1}{c_k} \varepsilon_0.$$

Από τις (4)-(7) και την Παρατήρηση έχουμε τελικώς ότι:

$$c_k \mathcal{H}_{\varepsilon}^{k}(E) \leq \lambda_k(E) + \varepsilon_0$$

για τυχαία ε_0 και ε.

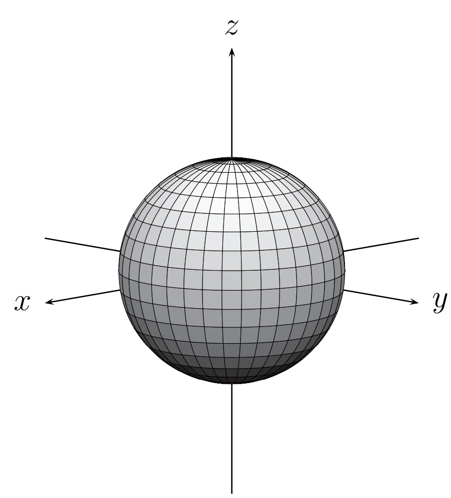
Άρα $c_k \mathcal{H}_k(E) \leq \lambda_k(E)$. □

3.2.1 Παρατηρήσεις - Αποτελέσματα

Βάσει του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε:

Για την σφαίρα $S_k = \widehat{S}(0, \frac{1}{2})$ του $\mathbb{R}^k$ (Σχήμα 5 για $k = 3$):

- $\lambda_1(S_1) = \mathcal{H}^1(S_1) = 1$
- $\lambda_2(S_2) = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \mathcal{H}^2(S_2) = 1$
- $\lambda_3(S_3) = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \mathcal{H}^3(S_3) = 1$



Σχήμα 5

Για τον μοναδιαίο κύβο $[0,1]^k$ έχουμε:

- $\lambda_k([0,1]^k) = 1, \quad \mathcal{H}^k([0,1]^k) = \frac{1}{c_k}$.

Στην προηγούμενη ενότητα παρατηρήσαμε, χωρις απόδειξη, ότι για μία τυχαία, συνεχή καμπύλη Γ με μήκος $\ell(\Gamma)$, η ποσότητα $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ είναι ακριβώς ίση με το μήκος της καμπύλης $\ell(\Gamma)$. Για να το αποδείξουμε όμως αυτό, ας θυμηθούμε πρώτα μερικούς χρήσιμους ορισμούς.

Ορισμός 3.3. *Μια (απλή) καμπύλη Γ είναι η εικόνα μιας συνεχούς, 1-1 απεικόνισης $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^k$, όπου $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.*

Ορισμός 3.4. *Το* **μήκος** *της καμπύλης Γ ορίζεται ως*

$$\ell(\Gamma) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{m} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < ... < t_m = b \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\} \tag{8}$$

Αν $\ell(\Gamma) < +\infty$ λέμε ότι η καμπύλη είναι **ευθυγραμμίσιμη**.

Ορισμός 3.5. *Κάθε ευθυγραμμίσιμη καμπύλη μπορεί να παραμετρηθεί με μήκος τόξου, δηλαδή να απεικονιστεί ως η εικόνα μιας συνάρτησης $\tilde{\gamma} : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ ώστε το μήκος του $\tilde{\gamma}([0,t]) = t$, $t \in [0, \ell(\Gamma)]$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί παίρνοντας ως $\tilde{\gamma}(t)$ να είναι το μοναδικό σημείο $\gamma(u)$ για το οποίο $\ell(\gamma([a,u])) = t$. Αν λοιπόν $\tilde{\gamma}$ απεικονίζει μια καμπύλη Γ με παραμέτρηση μήκος τόξου, τότε από την σχέση (8) έχουμε ότι*

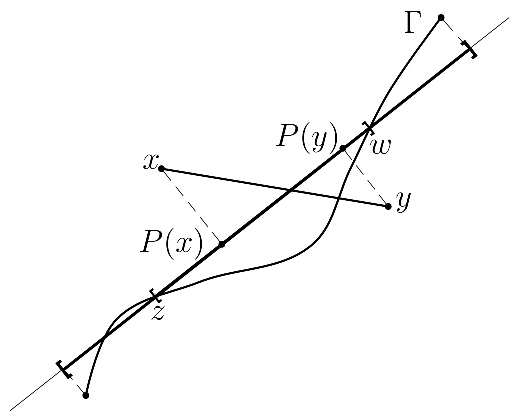
$$|\,\tilde{\gamma}(t_1) - \tilde{\gamma}(t_2)\,| \leq |\,t_1 - t_2\,|. \tag{9}$$

Πρόταση 3.1. *Αν Γ είναι μιά καμπύλη στον $\mathbb{R}^k$, τότε $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \ell(\Gamma)$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη της πρότασης χρειάζεται να κάνουμε πρώτα την ακόλουθη παρατήρηση:
Έστω Γ μιά καμπύλη, η οποία ενώνει τα σημεία z και w. Αν με P συμβολίσουμε την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^k$ στο ευθύγραμμο τμήμα $[z,w]$ που ενώνει τα z και w, τότε έχουμε ότι $|\,P(x) - P(y)\,| \leq |\,x - y\,|$ αν $x, y \in \mathbb{R}^k$. Από το Λήμμα 2.1 και το Θεώρημα 3.3 έπεται ότι

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \geq \mathcal{H}^1(P(\Gamma)) \geq \mathcal{H}^1([z,w]) = \lambda_1([z,w]) = |\,z - w\,|$$

μιας και $P(\Gamma) \supset [z,w]$ (βλέπε Σχήμα 6).



Σχήμα 6

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η Γ ορίζεται από την $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^k$. Από την παραπάνω παρατήρηση έπεται ότι $\mathcal{H}^1(\gamma[t,u]) \geq |\, \gamma(t) - \gamma(u)\, |$ για οποιαδήποτε t και u. Τότε, αν $a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ θα έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\, \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\, | \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(\gamma[t_{i-1}, t_i]) = \mathcal{H}^1(\Gamma),$$

αφού τα τόξα $\gamma[t_{i-1}, t_i]$ της Γ είναι ξένα πλην των άκρων των τόξων. Συνεπώς, $\ell(\Gamma) \leq \mathcal{H}^1(\Gamma)$.

Τέλος, αν υποθέσουμε ότι $\ell(\Gamma) < +\infty$, μπορούμε να θεωρήσουμε μια παραμέτρηση μήκους τόξου $\tilde{\gamma}$ της Γ. Αφού η $\tilde{\gamma} : [0, \ell(\Gamma)] \to \Gamma$ είναι επί της Γ, από την (9) θα έχουμε ότι ισχύει το Λήμμα 2.1 και άρα έπεται ότι

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \leq \mathcal{H}^1([0, \ell(\Gamma)]) = \ell(\Gamma).$$

Επομένως, τελικά έχουμε το ζητούμενο: $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \ell(\Gamma)$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Γιαννόπουλος Απόστολος, *Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου 2005-2006.*

[2] Ευαγγελάτου-Δάλλα Λεώνη, *Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας*, Αθήνα 2000.

[3] Elias M. Stein , Rami Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Intergration and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

[4] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2005.

[5] K.J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985.

[6] Pertti Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Fractals and Rectifiability.* Cambridge University Press, 1995.

[7] M. Papadimitrakis, *Notes on Measure Theory*, Crete 2004.

[8] C.A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1970.