ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ FRACTALS

Ασκήσεις ΙΙ

1. Έστω $\{\mathbb{R}^d; \omega_{1-N}\}$ Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων (ΣΕΣ). Αποδείξτε ότι υπάρχει r>0 τέτοιο ώστε να έχουμε $W\left(\hat{S}(0,r)\right) \subseteq \hat{S}(0,r)$.

Λύση

Έστω ότι υπάρχει r>0 τέτοιο ώστε να έχουμε $W\left(\hat{S}(0,r)\right) \subseteq \hat{S}(0,r)$. Οι ω_i, i=1, 2, …, N είναι συστολές με συντελεστές έστω s_i, i=1, 2, …, N, οπότε αν $x \in \hat{S}(0,r)$ τότε:

$$\|\omega_i(x) - \omega_i(0)\| \leq s_i \|x\|.$$

Θέτουμε $\omega_i(0)=x_i$ και $\alpha_i=\|x_i\|$, οπότε $\omega_i\left(\hat{S}(0,r)\right) \subseteq \hat{S}(\omega_i(0), s_i r) \subseteq \hat{S}(0, s_i r + \alpha_i)$ και

$$\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i\left(\hat{S}(0,r)\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \hat{S}(0, s_i r + \alpha_i) \subseteq \hat{S}\left(0, \max_{1\leq i\leq N}\{s_i r + \alpha_i\}\right)$$

Έστω j τέτοιο ώστε $s_j r + \alpha_j = \max_{1\leq i\leq N}\{s_i r + \alpha_i\}$.

Λόγω των απαιτήσεων της άσκησης, θέλουμε $r = s_j r + \alpha_j \Leftrightarrow r = \dfrac{\alpha_j}{1-s_j}$. Υπάρχει λοιπόν $r = \dfrac{\alpha_j}{1-s_j} > 0$, τέτοιο ώστε να έχουμε $W\left(\hat{S}(0,r)\right) \subseteq \hat{S}(0,r)$.

2. **α.** Να ευρεθεί ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^d; \omega_{1-2}\}$ του οποίου το σταθερό σημείο είναι το διάστημα [0,1]

β. Ποιο είναι το σταθερό σημείο του ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^d; \omega_{1-9}\}$ με $\omega_i(x) = \dfrac{x+i}{10}$, i=0, …, 9, $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

α. Θεωρούμε το ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^d; \omega_{1-2}\}$ με $\omega_1(x) = \frac{1}{2}x$ και $\omega_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (οι οποίες είναι συστολές με $s_1=s_2=1/2$) , για το οποίο προφανώς είναι:

$\omega_1([0,1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\omega_2([0,1]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, επομένως $W([0,1]) = \bigcup_{i=1}^{2} \omega_i([0,1]) = [0,1]$ και επειδή η W έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο αυτό θα είναι το [0,1].

β. Έστω το ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^d; \omega_{1-9}\}$ με $\omega_i(x) = \dfrac{x+i}{10}$, i=0, …, 9, $x\in\mathbb{R}$ (οι οποίες είναι συστολές με $s_i=1/10$) , για το οποίο προφανώς είναι: $\omega_i([0,1]) = \left[\dfrac{i}{10}, \dfrac{i+1}{10}\right]$, i=0, …, 9, επομένως

$W([0,1])=\bigcup_{i=0}^{9}\omega_i([0,1])=[0,1]$ και επειδή η W έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο αυτό θα είναι το [0,1].

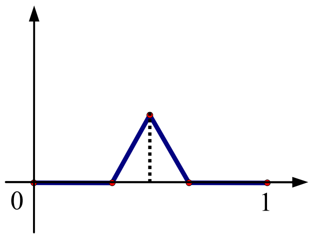
3. Έστω το κλασσικό ΣΕΣ το οποίο παράγει την καμπύλη Γ του von Koch. Εάν θεωρήσουμε ως αρχικό σύνολο Ι το (α) [(0,0),(1,0)] και (β) το (0,0), σε ποιο βήμα η απόσταση Hausdorff της Γ από το $W^n(I)$ γίνεται μικρότερη του 0.001;

<u>*Λύση*</u>

Το κλασσικό ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^2; \omega_{1-4}\}$ το οποίο παράγει την καμπύλη Γ του von Koch, ορίζει μια συνάρτηση συστολής W με συντελεστή s=1/3.

Γνωρίζουμε επίσης ότι ισχύει: $h\left(W^n(I),\Gamma\right)\le\frac{s^n}{1-s}h\left(W(I),I\right)$ και επειδή θέλουμε να βρούμε σε ποιο βήμα η απόσταση Hausdorff της Γ από το $W^n(I)$ γίνεται μικρότερη του 0.001, αρκεί να προσδιορίσουμε για ποια n ισχύει η: $\frac{s^n}{1-s}h\left(W(I),I\right)\le 0.001$ (1).

α. Στην περίπτωση που Ι=[(0,0),(1,0)], το W(I) φαίνεται από το διπλανό σχήμα ενώ εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $h\left(W(I),I\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$, και η (1) δίνει:

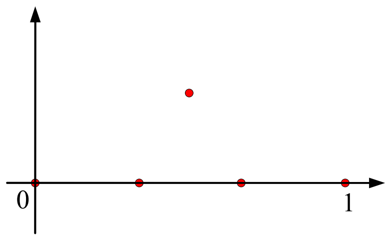


$$\frac{s^n}{1-s}h\left(W(I),I\right)\le 0.001 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\le 0.001 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4\cdot 3^n}\le 0.001 \Leftrightarrow 3^{n-\frac{1}{2}}\ge 250$$

$$\Leftrightarrow n\ge\frac{\log 250}{\log 3}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow n\ge 5.526$$

Άρα n=6.

β. Στην περίπτωση που Ι={(0,0)}, το W(I) φαίνεται από το διπλανό σχήμα ενώ εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $h\left(W(I),I\right)=\frac{2}{3}$, και η (1) δίνει:



$$\frac{s^n}{1-s}h\left(W(I),I\right)\le 0.001 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{3}\le 0.001 \Leftrightarrow 3^n\ge 1000 \Leftrightarrow n\ge\frac{3}{\log 3}\Leftrightarrow n\ge 6.29$$

Άρα n=7.

4. Έστω το κλασσικό ΣΕΣ το οποίο παράγει την καμπύλη του von Koch.

α. Να ευρεθεί r>0 της άσκησης 1.

β. Να ευρεθεί $A\subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε να έχουμε $W(A)\subseteq A$ και $\omega_i(A)\cap\omega_j(A)=\varnothing$, αν $i\neq j$.

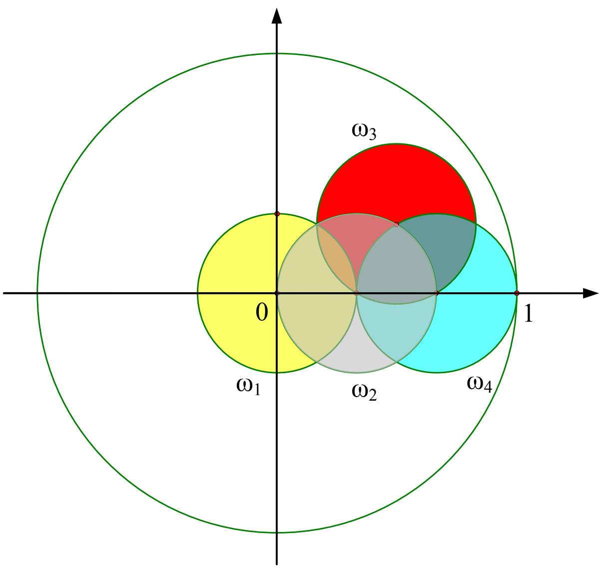
γ. Υπάρχει ΣΕΣ $\{\mathbb{R}^2;\ \omega^*_{1-4}\}$, ώστε οι ω^*_i να είναι ομοιότητες με $W^*(I)=W(I)$ και $W^*\circ W^*(I)\neq W\circ W(I)$, όπου $I=[(0,0),(1,0)]$;

Λύση

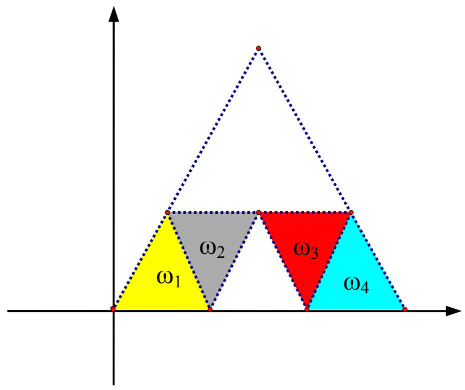
α. Από την άσκηση 1 έχουμε ότι υπάρχει $r=\dfrac{\alpha_j}{1-s_j}>0$, τέτοιο ώστε να έχουμε $W\left(\hat{S}(0,r)\right)\subseteq \hat{S}(0,r)$, όπου j τέτοιο ώστε $s_j r+\alpha_j=\max\limits_{1\le i\le N}\{s_i r+\alpha_i\}$. Υπολογίζουμε τα:

$x_1=(0,0)$, $x_2=(1/3,0)$, $x_3=(1/2,1/(2\sqrt{3}))$, $x_4=(2/3,0)$ και τα $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1/3$, $\alpha_3=1/\sqrt{3}$, $\alpha_4=2/3$.

Επειδή $s_1=s_2=s_3=s_4=1/3$ προφανώς είναι j=4 και $r=\dfrac{\alpha_4}{1-s_4}=\dfrac{2/3}{2/3}=1$. Το γεγονός ότι



Σχήμα 4α



Σχήμα 4β

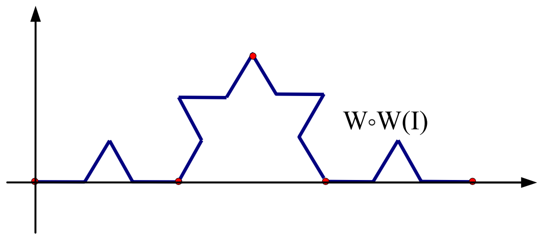
$W\left(\hat{S}(0,1)\right)\subseteq \hat{S}(0,1)$ φαίνεται και από το σχήμα 4α.

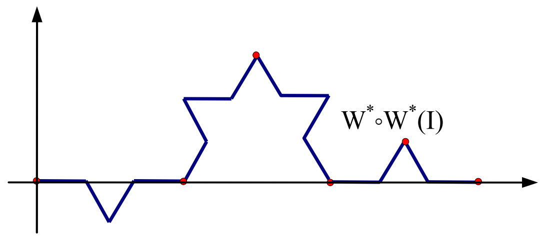
β. Επειδή θέλουμε να βρούμε $A\subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε $W(A)\subseteq A$ και $\omega_i(A)\cap\omega_j(A)=\varnothing$, αν $i\neq j$, μπορούμε να θεωρήσουμε ως A το ανοικτό ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1, ενώ το W(A) φαίνεται στο σχήμα 4β.

γ. Αν θεωρήσουμε το ΣΕΣ $\{IR^2;\ \omega^*_{1-4}\}$, ώστε οι ω^*_i να είναι ομοιότητες με $\omega^*_2 = \omega_2$, $\omega^*_3 = \omega_3$, $\omega^*_4 = \omega_4$, όπου ω_2, ω_3 και ω_4 να είναι οι ομοιότητες του κλασσικού ΣΕΣ που παράγει την καμπύλη του von Koch και

$$\omega^*_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/3\\0\end{pmatrix}$$

τότε όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε από τα παρακάτω σχήματα για το I=[(0,0),(1,0)] είναι $W^*(I)=W(I)$ και $W^*\circ W^*(I)\neq W\circ W(I)$.





5. Να ορίσετε ΣΕΣ που να αποτελείται από ομοιότητες με τρόπο κατάλληλο, ώστε το I=[(0,0),(1,0)] να απεικονίζεται μέσω της W στην πολυγωνική γραμμή που διέρχεται από τα σημεία (0,0), (1/4,1/3), (1/2,0), (3/4,–1/5), (1,0) και να σχεδιάσετε το σύνολο $W\circ W(I)$.

Λύση

Για να προσδιορίσουμε τις ομοιότητες του ζητούμενου ΣΕΣ αρκεί να σκεφτούμε ότι κάθε μία από αυτές θα απεικονίζει το I με τη σειρά στα ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν τη δοσμένη πολυγωνική γραμμή έτσι ώστε η ένωσή τους να δίνει ολόκληρη την πολυγωνική γραμμή (η οποία χρωματίζεται με μπλε στο παρακάτω σχήμα). Έτσι λοιπόν χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις γνώσεις από την γραμμική άλγεβρα, έχουμε ότι:

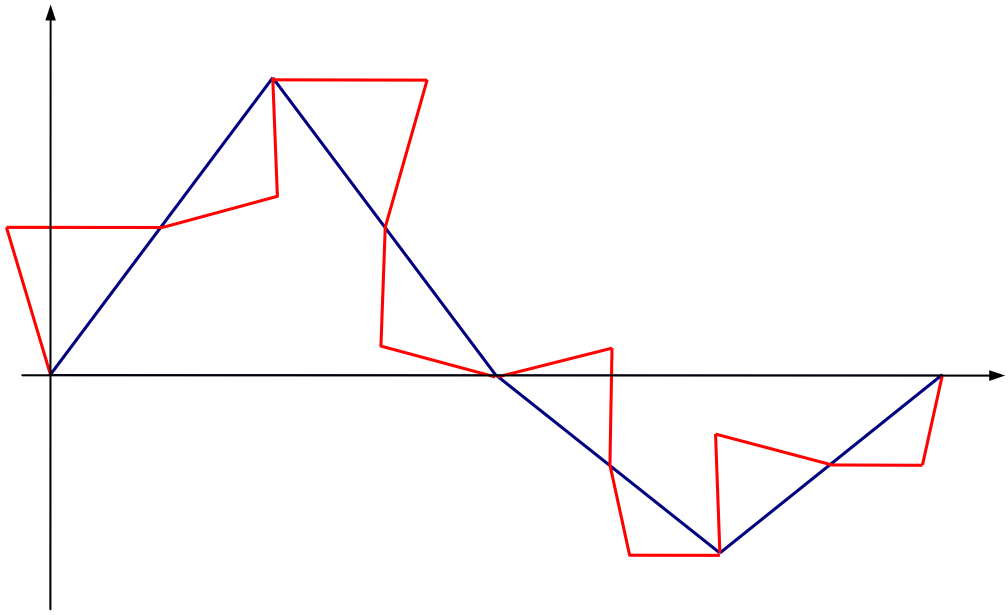
$$\omega_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{5}{12}\begin{pmatrix}3/5 & -4/5\\4/5 & 3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\omega_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{5}{12}\begin{pmatrix}3/5 & 4/5\\-4/5 & 3/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/4\\1/3\end{pmatrix}$$

$$\omega_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{41}}{20}\begin{pmatrix}5/\sqrt{41} & 4/\sqrt{41}\\-4/\sqrt{41} & 5/\sqrt{41}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$$

$$\omega_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{41}}{20}\begin{pmatrix}5/\sqrt{41} & -4/\sqrt{41}\\4/\sqrt{41} & 5/\sqrt{41}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3/4\\-1/5\end{pmatrix}$$

και επομένως το ζητούμενο ΣΕΣ είναι το $\{IR^2;\ \omega_{1-4}\}$. Το σύνολο $W\circ W(I)$ φαίνεται επίσης στο παρακάτω σχήμα (η πολυγωνική γραμμή που χρωματίζεται με κόκκινο).



Χριστίνα Σαββίδου (ΠΜΣ Θεωρητικών Μαθηματικών)
Βασιλική Μπακέττα (ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών)
Γεώργιος Κυριακόπουλος (ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών)