ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ FRACTALS

<u>Ασκήσεις Ι</u>

1. Αν A=[−1,2]×[2,3], B=[1,2]×[−1,1] και $\Gamma = \hat{S}(0,1)$, υπολογίστε τις αποστάσεις Hausdorff των συνόλων αυτών ανά δύο.

<u>Λύση</u>

Από το διπλανό σχήμα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι:

$\tilde{d}(A,B) = 2\sqrt{2}$ και $\tilde{d}(B,A) = 3$, επομένως

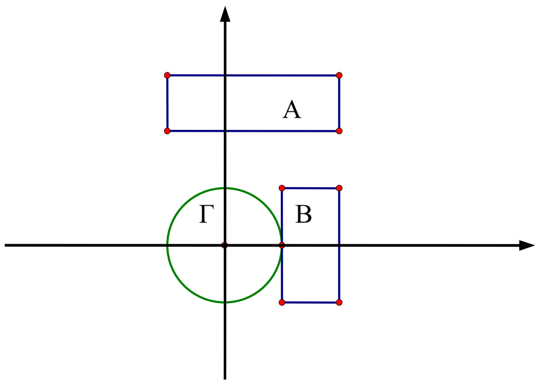
$$h(A,B) = 3.$$

$\tilde{d}(B,\Gamma) = \sqrt{5} - 1$ και $\tilde{d}(\Gamma,B) = 2$, επομένως

$$h(B,\Gamma) = 2.$$

$\tilde{d}(A,\Gamma) = \sqrt{13} - 1$ και $\tilde{d}(\Gamma,A) = 3$, επομένως

$$h(A,\Gamma) = 3.$$



2. Να βρείτε σύνολα A, B, $\Gamma \in \mathscr{H}(\mathrm{IR}^2)$ ώστε $A \subset B \subset \Gamma$ και να ισχύει h(A,B)=h(A,Γ)=h(B,Γ).

<u>Λύση</u>

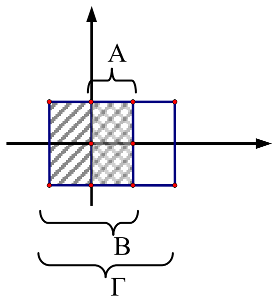
Αν θεωρήσουμε τα σύνολα

A=[0,1]×[−1,1], B=[−1,1]×[−1,1] και Γ=[−1,2]×[−1,1]$\in \mathscr{H}(\mathrm{IR}^2)$

είναι $A \subset B \subset \Gamma$, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα,

και ισχύει:

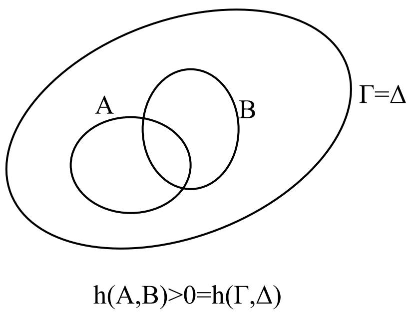
h(A,B)=h(A,Γ)=h(B,Γ)=1.



3. Έστω A, B, Γ, $\Delta \in \mathscr{H}(\mathrm{IR}^2)$ με $A \subseteq \Gamma$, $B \subseteq \Delta$. Υπάρχει σχέση μεταξύ των h(A,B)=h(Γ,Δ);

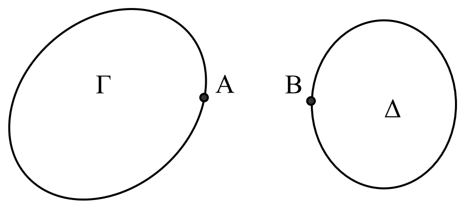
<u>Λύση</u>

Δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των h(A,B)=h(Γ,Δ), αφού όπως φαίνεται και από τα παρακάτω σχήματα, είναι δυνατόν να ισχύει h(A,B)>h(Γ,Δ) (σχήμα α), αλλά και h(A,B)<h(Γ,Δ) (σχήμα β).



h(A,B)>0=h(Γ,Δ)

Σχήμα α



h(A,B)<h(Γ,Δ)

Σχήμα β

4. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση της διαμέτρου $\delta:\mathscr{H}(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

<u>*Λύση*</u>

Είναι γνωστό ότι η διάμετρος ενός συνόλου A ορίζεται ως ακολούθως:

$$\delta(A)=\max\{\|x-y\|,\ x,y\in A\}$$

Έστω A, $B\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^2)$ και $h(A,B)=\gamma$. Σύμφωνα με τον ορισμό της h(A,B), θα έχουμε:

$$A\subseteq B+\gamma\hat{S}(0,1) \text{ και } B\subseteq A+\gamma\hat{S}(0,1),$$

επομένως

$$\delta(A)\le\delta(B)+\delta\left(\gamma\hat{S}(0,1)\right)=\delta(B)+2\gamma \quad \text{και} \quad \text{όμοια} \quad \delta(B)\le\delta(A)+\delta\left(\gamma\hat{S}(0,1)\right)=\delta(A)+2\gamma$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$|\delta(A)-\delta(B)|\le 2\gamma=2h(A,B)$$

άρα η δ είναι Lipschitz και επομένως συνεχής.

5. Έστω A_ν, B_ν, A_0, $B_0\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$ και α_ν, β_ν, α_0, $\beta_0\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}$, ώστε $\lim\limits_{\nu\to\infty}A_\nu=A_0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}B_\nu=B_0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\alpha_0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\beta_\nu=\beta_0$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{\nu\to\infty}(\alpha_\nu A_\nu+\beta_\nu B_\nu)=\alpha_0A_0+\beta_0B_0$.

<u>*Λύση*</u>

Για την απόδειξη της ζητούμενης σχέσης αρκεί να αποδείξουμε πρώτα τους κάτωθι ισχυρισμούς:

<u>*Ισχυρισμός 1*</u>

Αν A, $B\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $h(\lambda A,\lambda B)=|\lambda|h(A,B)$.

<u>*Απόδειξη*</u>

Επειδή A, $B\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$, για κάθε $\alpha\in A$ και $\beta\in B$ είναι $d(\lambda\alpha,\lambda\beta)=|\lambda|d(\alpha,\beta)$ και επομένως,

$$\tilde{d}(\lambda A,\lambda B)=\max\{d(\lambda\alpha,\lambda B):\alpha\in A\}=\max\{\{\min\|\lambda\alpha-\lambda\beta\|:\beta\in B\},\alpha\in A\}=|\lambda|\,\tilde{d}(A,B)$$

Όμοια είναι $\tilde{d}(\lambda B,\lambda A)=|\lambda|\,\tilde{d}(B,A)$, άρα $h(\lambda A,\lambda B)=|\lambda|h(A,B)$.

<u>*Ισχυρισμός 2*</u>

Αν $A\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$ και λ_ν, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}$, ώστε $\lambda_\nu\to\lambda$, τότε $\lambda_\nu A\to\lambda A$.

<u>*Απόδειξη*</u>

Αφού $A\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$, το A είναι συμπαγές και επομένως $A\subseteq\hat{S}(0,r)$. Εφόσον τώρα είναι $\lambda_\nu\to\lambda$,

αν $\varepsilon>0$ υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$, ώστε $|\lambda_\nu-\lambda|r<\varepsilon$, για κάθε $\nu\ge\nu_0$.

$$\lambda_\nu A = [(\lambda_\nu - \lambda) + \lambda]A \subseteq (\lambda_\nu - \lambda)A + \lambda A \subseteq (\lambda_\nu - \lambda)\hat{S}(0,r) + \lambda A = \lambda A + \hat{S}(0, r\,|\,\lambda_\nu - \lambda\,|)$$
$$\subseteq \lambda A + \hat{S}(0,\varepsilon)$$

Άρα $\lambda_\nu A \subseteq \lambda A + \varepsilon\hat{S}(0,1)$, για κάθε $\nu \geq \nu_0$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\lambda A \subseteq \lambda_\nu A + \varepsilon\hat{S}(0,1)$, για κάθε $\nu \geq \nu_0$, επομένως

$h(\lambda A, \lambda_\nu A) \leq \varepsilon$, για κάθε $\nu \geq \nu_0$, δηλαδή $\lambda_\nu A \to \lambda A$.

<u>*Ισχυρισμός 3*</u>

Αν A_ν, $A \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$ και λ_ν, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε $A_\nu \to A$ και $\lambda_\nu \to \lambda$, τότε $\lambda_\nu A \to \lambda A$.

<u>*Απόδειξη*</u>

Από την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής h, έχουμε:

$$h(\lambda_\nu A, \lambda A) \leq h(\lambda_\nu A_\nu, \lambda_\nu A) + h(\lambda_\nu A, \lambda A) = |\lambda_\nu| h(A_\nu, A) + h(\lambda_\nu A, \lambda A)$$

Όμως η ακολουθία λ_ν είναι συγκλίνουσα επομένως φραγμένη, η $h(A_\nu, A) \to 0$ αφού $A_\nu \to A$, ενώ η $h(\lambda_\nu A, \lambda A) \to 0$ από τον ισχυρισμό 2, επομένως $h(\lambda_\nu A, \lambda A) \to 0$, δηλαδή $\lambda_\nu A \to \lambda A$.

<u>*Ισχυρισμός 3*</u>

Αν A_ν, B_ν, A, $B \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$, ώστε $A_\nu \to A$ και $B_\nu \to B$, τότε $A_\nu + B_\nu \to A + B$.

<u>*Απόδειξη*</u>

Εφόσον $A_\nu \to A$ και $B_\nu \to B$,

αν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $h(A_\nu, A) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ και $h(B_\nu, B) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $\nu \geq \nu_0$.

Αυτό σημαίνει ότι

$$A_\nu \subseteq A + \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } A \subseteq A_\nu + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0,$$

$$B_\nu \subseteq B + \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } B \subseteq B_\nu + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$A_\nu + B_\nu \subseteq A + B + \varepsilon \text{ και } A + B \subseteq A_\nu + B_\nu + \varepsilon, \text{ για κάθε } \nu \geq \nu_0,$$

δηλαδή ότι $h(A_\nu + B_\nu, A + B) \leq \varepsilon$, για κάθε $\nu \geq \nu_0$.

Με συνδυασμό των παραπάνω ισχυρισμών το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα.

6. **α.** Αν A, $B \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$, αποδείξτε ότι $h(\text{con}A, \text{con}B) \leq h(A,B)$, όπου con(.) είναι η κυρτή θήκη του συνόλου.

β. Αν $A_\nu \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία κυρτών συνόλων, αποδείξτε ότι το όριο είναι κυρτό σύνολο.

Λύση

α. Είναι γνωστό ότι η κυρτή θήκη του συνόλου A, conA, είναι το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το A. Ακόμα είναι γνωστό από το Θεώρημα Καραθεοδωρή ότι αν το A είναι συμπαγές στον $\mathbb{R}^d$, τότε και το conA είναι συμπαγές.

Έστω τώρα, ότι h(A,B)=γ, οπότε:

$$A \subseteq B + \gamma \hat{S}(0,1) \subseteq \mathrm{con}B + \gamma \hat{S}(0,1).$$

Όμως το $\mathrm{con}B + \gamma \hat{S}(0,1)$ είναι κυρτό επομένως $\mathrm{con}A \subseteq \mathrm{con}B + \gamma \hat{S}(0,1)$.

Επειδή είναι και $B \subseteq A + \gamma \hat{S}(0,1)$, όμοια προκύπτει ότι $\mathrm{con}B \subseteq \mathrm{con}A + \gamma \hat{S}(0,1)$, η οποία σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση δίνει ότι:

$$h(\mathrm{con}A,\mathrm{con}B)\leq\gamma=h(A,B).$$

β. Έστω ότι $A_\nu\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία κυρτών συνόλων με $A_\nu\to A$.

Αφού τα $A_\nu\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$ είναι κυρτά σύνολα, είναι $A_\nu=\mathrm{con}A_\nu$, ενώ

$h(A_\nu,\mathrm{con}A)=h(\mathrm{con}A_\nu,\mathrm{con}A)\leq h(A_\nu,A)\to 0$ (από το (α.) και επειδή $A_\nu\to A$).

Άρα έχουμε ότι $A_\nu\to\mathrm{con}A$ και ότι $A_\nu\to A$, και λόγω της μοναδικότητας του ορίου έπεται ότι conA=A, δηλαδή ότι το A είναι κυρτό.

7. Για κυρτά σύνολα A, $B\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$, αποδείξτε ότι h(A,B)=h(A+ε,B+ε), ε≥0. Ισχύει η σχέση αν το A δεν είναι κυρτό;

Λύση

Έστω τα κυρτά σύνολα A, $B\in\mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$ και ότι h(A,B)=γ. Αν ε≥0 και h(A+ε,B+ε)=δ, τότε:

$$A \subseteq B + \gamma \hat{S}(0,1) \text{ και } B \subseteq A + \gamma \hat{S}(0,1), \text{ οπότε:}$$

$$\left[A+\varepsilon\hat{S}(0,1)\right]\subseteq\left[B+\varepsilon\hat{S}(0,1)\right]+\gamma\hat{S}(0,1) \text{ και } \left[B+\varepsilon\hat{S}(0,1)\right]\subseteq\left[A+\varepsilon\hat{S}(0,1)\right]+\gamma\hat{S}(0,1)$$

και επομένως δ≤γ.

Εφόσον h(A+ε,B+ε)=δ, είναι:

$$\left[A+\varepsilon\hat{S}(0,1)\right]\subseteq\left[B+\varepsilon\hat{S}(0,1)\right]+\delta\hat{S}(0,1) \text{ και } \left[B+\varepsilon\hat{S}(0,1)\right]\subseteq\left[A+\varepsilon\hat{S}(0,1)\right]+\delta\hat{S}(0,1) \quad (*)$$

και επειδή τα A και B είναι κυρτά, έχουμε:

$$A \subseteq B + \delta \hat{S}(0,1) \text{ και } B \subseteq A + \delta \hat{S}(0,1)$$

και επομένως γ≤δ. Άρα γ=δ.

Προφανώς τα παραπάνω δεν ισχύουν αν το Α δεν είναι κυρτό αφού σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο της διαγραφής στη σχέση (*). Αυτό γίνεται επίσης φανερό αν θεωρήσουμε Α={0}, Β={1} και $\varepsilon = \frac{1}{2}$, οπότε τότε είναι:

$$h(A,B) = 1 \neq 0 = h\left(A + \frac{1}{2}, B + \frac{1}{2}\right).$$

8. **α.** Αποδείξτε ότι $h\left(\hat{S}(x,R), \hat{S}(y,r)\right) = \| x - y \| + | R - r |$, όπου x, y∈$\mathbb{R}^d$ και R, r≥0.

β. Εάν μια ακολουθία σφαιρών είναι συγκλίνουσα, αποδείξτε ότι το όριο είναι σφαίρα.

Λύση

α. Έστω ότι R≥r, τότε:

$$\begin{aligned}\hat{S}(y,r) + \hat{S}(x+(y-x),r) &= \hat{S}(x,r) + y - x \\ &\subseteq \hat{S}(x,R) + y - x \\ &\subseteq \hat{S}(x,R) + \| y - x \| \hat{S}(0,1) \\ &\subseteq \hat{S}(x,R) + \left[\| y - x \| + (R-r)\right]\hat{S}(0,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}(x,R) &= \hat{S}(x,r) + (R-r)\hat{S}(0,1) \\ &= \hat{S}(y+(x-y)x,r) + (R-r)\hat{S}(0,1) \\ &\subseteq \hat{S}(y,r) + \left[\| x - y \| + (R-r)\right]\hat{S}(0,1)\end{aligned}$$

άρα $h\left(\hat{S}(x,R), \hat{S}(y,r)\right) \leq \| x - y \| + | R - r |$.

Θεωρούμε τώρα $z \in \hat{S}(x,R)$, ώστε $\|z-y\|=R+\|x-y\|$ και αν ε>0

$$\hat{S}(x,R) \subseteq \hat{S}(y,r) + \varepsilon\hat{S}(0,1) = \hat{S}(y, r+\varepsilon)$$

Όμως $z \in \hat{S}(y, r+\varepsilon)$, άρα $\|z-y\|=R+\|x-y\|\leq r+\varepsilon$

και επομένως $\|x-y\|+(R-r)\leq\varepsilon$, δηλαδή $\| x - y \| + (R-r) \leq h\left(\hat{S}(x,R), \hat{S}(y,r)\right)$.

Άρα $h\left(\hat{S}(x,R), \hat{S}(y,r)\right) = \| x - y \| + | R - r |$.

β. Έστω ότι η ακολουθία σφαιρών $\hat{S}(x_n, R_n) \xrightarrow{h} A \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^d)$, θα αποδείξουμε ότι το Α είναι σφαίρα. Η ακολουθία $\hat{S}(x_n, R_n)$ είναι συγκλίνουσα και επομένως φραγμένη, άρα:

$h\left(\hat{S}(x_n, R_n), \hat{S}(0,0)\right) \le M$, για κάποιο M. Από το (α) ερώτημα της ίδιας άσκησης είναι: $\|x_n\|+|R_n|\le M$, και επομένως οι ακολουθίες (x_n) και (R_n) είναι φραγμένες που σημαίνει ότι υπάρχουν υπακολουθίες x_{k_n} και R_{k_n}, ώστε $x_{k_n} \to x_0$ και $R_{k_n} \to R_0$, ενώ

$$h\left(\hat{S}(x_{k_n}, R_{k_n}), \hat{S}(x_0, R_0)\right) = \| x_{k_n} - x_0 \| + | R_{k_n} - R_0 | \to 0 .$$

Άρα $\hat{S}(x_{k_n}, R_{k_n}) \to \hat{S}(x_0, R_0)$.

Είναι όμως $\hat{S}(x_{k_n}, R_{k_n}) \to A$ και λόγω της μοναδικότητας του ορίου έπεται ότι:

$$A = \hat{S}(x_0, R_0) .$$

9. Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγές, μη κενού εσωτερικού, σύνολο του $\mathbb{R}^d$ περιέχει μια τουλάχιστον σφαίρα μεγίστης διαμέτρου (εγγεγραμμένη σφαίρα) και περιέχεται σε μια ακριβώς σφαίρα ελαχίστης διαμέτρου (περιγεγραμμένη σφαίρα).

<u>Λύση</u>

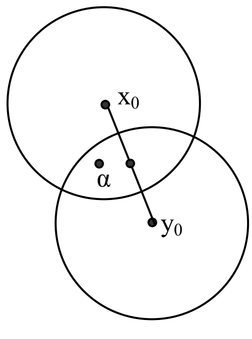
Έστω $K\neq\emptyset$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $K^\circ\neq\emptyset$. Έστω επίσης το

$$I = \left\{ r \ge 0 : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ με } \hat{S}(x, r) \subseteq K \right\}$$

Προφανώς $I\neq\emptyset$, $I\subseteq\mathbb{R}$ και το I είναι άνω φραγμένο από την διάμετρο $\delta(K)$ του K, επομένως το I έχει supremum, έστω $\sup I = r_0 > 0$.

Άρα υπάρχει ακολουθία (r_n), ώστε $r_n \to r_0$ και $x_n \in \mathbb{R}^d$: $\hat{S}(x_n, r_n) \subseteq K$ και επομένως θα υπάρχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x_0 \in K$.

Άρα $\hat{S}(x_{k_n}, r_{k_n}) \xrightarrow{h} \hat{S}(x_0, r_0)$. Εύκολα προκύπτει ότι $\hat{S}(x_0, r_0) \subseteq K$, εφόσον το K είναι κλειστό. Επομένως το K περιέχει μια τουλάχιστον σφαίρα μεγίστης διαμέτρου (εγγεγραμμένη σφαίρα).



Όμοια αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\hat{S}(y_0, R_0) \supseteq K$ με R_0 ελάχιστο. Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}^d$: $K \subseteq \hat{S}(x_0, R_0)$.

Έστω ότι είναι $K \subseteq \hat{S}(x_0, R_0)$ και $K \subseteq \hat{S}(y_0, R_0)$, οπότε αν $\alpha \in K$, από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε:

$$\left\| \alpha - \frac{1}{2}(x_0 + y_0) \right\|^2 = \frac{1}{2}\|\alpha - x_0\|^2 + \frac{1}{2}\|\alpha - y_0\|^2 - \frac{1}{4}\|x_0 - y_0\|^2 \le R_0^2 - \frac{1}{4}\|x_0 - y_0\|^2$$

Άρα $K \subseteq \hat{S}\left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0), \sqrt{R_0^2 - \frac{1}{4}\| x_0 - y_0 \|^2}\right)$, επομένως θα πρέπει $x_0=y_0$, δηλαδή το K περιέχεται σε μια ακριβώς σφαίρα ελαχίστης διαμέτρου (περιγεγραμμένη σφαίρα).

Βασιλική Μπακέττα (ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών)

Γεώργιος Κυριακόπουλος (ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών)