Κβαντομηχανική ΙΙ

Κωνσταντίνος Σφέτσος,
Καθηγητής Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Τμήμα Φυσικής,
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κεφάλαιο 3: Η κβαντική στροφορμή

4 Μαΐου 2020

Περιεχόμενα

- Η άλγεβρα της στροφορμής
- Τροχιακή στροφορμή, Ιδιοστροφορμή (σπιν)
- Κβάντωση της στροφορμής, αλγεβρική κατασκευή ιδιοκαταστάσεων

Κλασική στροφορμή

- Στην κλασική μηχανική σωμάτιο ορμής $\mathbf{p}$ στη θέση $\mathbf{x}$ έχει τροχιακή στροφορμή
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \ .$$
- Οι συνιστώσες είναι$(\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z))$
$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k \ , \qquad L_x = y p_z - z p_y \ , \quad \text{και κυκλικά σε } x, y, z \ .$$
- Για κεντρικές δυνάμεις η στροφορμή διατηρείται
$$\mathbf{F} = f(r)\hat{r} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \ .$$

Η άλγεβρα της στροφορμής

Τροχιακή στροφορμή

- Η κλασική έκφραση προάγεται σε τελεστή ως

$$\boxed{\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k = -\epsilon_{ijk}\hat{p}_j\hat{x}_k} \ ,$$

δηλαδή

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = \hat{p}_z\hat{y} - \hat{p}_y\hat{z} \quad \text{και κυκλικά σε } x, y, z \ .$$

Οι $\hat{L}_i$ είναι αυτοσυζυγείς τελεστές.

- Η άλγεβρα των τελεστών είναι

$$\begin{aligned}[\hat{L}_i, \hat{L}_j] &= \epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jmn}[\hat{x}_k\hat{p}_\ell, \hat{x}_m\hat{p}_n] = i\hbar\epsilon_{ik\ell}\epsilon_{jmn}(-\delta_{\ell m}\hat{x}_k\hat{p}_n + \delta_{kn}\hat{x}_m\hat{p}_\ell) \\ &= \cdots = i\hbar(-\hat{x}_j\hat{p}_i + \hat{x}_i\hat{p}_j) \ .\end{aligned}$$

- Το αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί ώς

$$\boxed{[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k} \ ,$$

δηλαδή

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \text{ και κυκλικά σε } x, y, z \ .$$

- Το τετράγωνο του μέτρου του τελεστή της στροφορμής

$$\boxed{\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2} \ ,$$

μετατίθεται με όλες τις συνιστώσες

$$\boxed{[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i] = 0 \ , \quad \forall \ i = 1,2,3} \ .$$

Πράγματι

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i] = \hat{L}_j[\hat{L}_j, \hat{L}_i] + [\hat{L}_j, \hat{L}_i]\hat{L}_j = i\hbar\epsilon_{jik}(\hat{L}_j\hat{L}_k + \hat{L}_k\hat{L}_j) = 0 \ .$$

Η κβάντωση της στροφορμής

Χρήση του συμβόλου $\mathbf{J}$ αντί για $\mathbf{L}$ και όχι καπέλα.

- Μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε $\mathbf{J}^2$ και $\hat{J}_3$.
- Ορίζουμε

$$\boxed{J_\pm = J_1 \pm iJ_2 \ , \qquad J_\pm^\dagger = J_\mp} \ .$$

- Η άλγεβρα γράφεται

$$\boxed{[J_3, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \ , \qquad [J_+, J_-] = 2\hbar J_3} \ .$$

- Επίσης

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^2 &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2 \\ &= J_+J_- + J_3^2 - \hbar J_3 \\ &= J_-J_+ + J_3^2 + \hbar J_3 \ .\end{aligned}$$

- Έστω $|\lambda\rangle$ ιδιοκατάσταση του $\mathbf{J}^2$. Ισχύει

$$\lambda\langle\lambda|\lambda\rangle = \langle\lambda|\mathbf{J}^2|\lambda\rangle = \sum_{i=1}^{3} ||J_i|\lambda\rangle|^2 \geqslant 0 \ .$$

  Άρα μπορούμε να παραμετροποιήσουμε το $\lambda = \hbar^2 j(j+1)$, όπου $j \geqslant 0$. Επίσης έστω $\hbar m$ η ιδιοτιμή του J_3.
- Συγκεντρωτικά

$$\mathbf{J}^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \ , \qquad J_3|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle \ .$$

- Έχουμε

$$J_3(J_+|j,m\rangle) = (J_+J_3 + \hbar J_+)|j,m\rangle) = \hbar(m+1)(J_+|j,m\rangle) \ .$$

Άρα

$$J_+|j,m\rangle = c|j,m+1\rangle \ .$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned} |c|^2 = |J_+|j,m\rangle|^2 &= \langle j,m|J_-J_+|j,m\rangle \\ &= \langle j,m|(\mathbf{J}^2 - J_3^2 - \hbar J_3)|j,m\rangle \\ &= \hbar^2\big(j(j+1) - m(m+1)\big) \ . \end{aligned}$$

- Κάνοντας το ίδιο για $J_-|j,m\rangle$ έχουμε το αποτέλεσμα

$$J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\ |j,m\pm 1\rangle \ .$$

Άρα ο J_+ είναι τελεστής δημιουργίας και ο J_- είναι τελεστής καταστροφής, ιδιοτιμών του J_3.

- Θα πρέπει
$$j(j+1) - m(m \pm 1) \geqslant 0 \implies (m \pm 1/2)^2 \leqslant (j + 1/2)^2 \ .$$
Άρα συνδιάζοντας και τις δύο περιπτώσεις
$$-j \leqslant m \leqslant j \ .$$
- Είναι προφανές ότι
$$J_+|j,j\rangle = 0 \ , \qquad J_-|j,-j\rangle = 0 \ .$$
- Για δεδομένο j οι καταστάσεις με $m = j-1, \ldots$ μπορούν να κατασκευαστούν με διαδοχικές δράσεις του J_- στην $|j,j\rangle$.
- Επειδή $|m| \leqslant j$ και λόγω του ότι $J_\pm|j,\pm j\rangle = 0$ υπάρχουν φυσικοί ακέραιοι ώστε $m + k = j$ και $m - \ell = -j$.
Άρα $k + \ell = 2j$ και θα πρέπει ο $2j \in \mathbb{Z}$.

- Τελικά έχουμε

$$J_3|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle \ ,$$
$$J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}|j,m\pm 1\rangle \ ,$$
$$\mathbf{J}^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \ ,$$

με

$$\boxed{m\in\mathbb{Z}/2 \quad \text{δηλαδή ημιακέραιος} \ , \qquad -j\leqslant m\leqslant j} \ .$$

Βλέπουμε ότι η στροφορμή είναι κβαντισμένη.

- Οι καταστάσεις $|j,m\rangle$ αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο

$$\langle j,m|j',m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \ , \qquad \sum_j\sum_{m=-j}^{j}|j,m\rangle\langle j,m| = \mathbb{I} \ .$$

Κβάντωση τροχιακής στροφορμής

Μια στροφή κατά γωνία $\delta\phi_z$ γύρω απ΄ το άξονα z δίνει

$$\delta x = -\delta\phi_z y \ , \qquad \delta y = \delta\phi_z x \ , \qquad \delta z = 0 \ .$$

Μια γενική στροφή είναι

$$\delta \mathbf{x} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x} \ , \qquad \delta\boldsymbol{\phi} = (\delta\phi_x, \delta\phi_y, \delta\phi_z) \ .$$

Η αλλαγή μιας συνάρτησης είναι

$$\delta\Psi(\mathbf{x}) = \overbrace{\Psi(\mathbf{x} - \delta\mathbf{x})}^{\Psi'(\mathbf{x})} - \Psi(\mathbf{x}) = -\left(\delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}\right) \cdot \nabla\Psi(\mathbf{x}) = -\frac{i}{\hbar}\delta\phi_i J_i \Psi(\mathbf{x}) \ ,$$

όπου

$$J_i = -i\hbar\epsilon_{ijk} x_j \partial_k \ ,$$

είναι ο τελεστής της τροχιακής στροφορμής.

Μια πεπερασμένη στροφή γώρω απ΄ το άξονα z κατά ϕ δίνει

$$P_\phi \Psi(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - i\frac{\phi}{n}\frac{J_z}{\hbar}\right)^n \Psi(\mathbf{x}) = e^{-i\phi J_z/\hbar}\Psi(\mathbf{x}) \ . \qquad (1)$$

Όταν δρα σε μια ιδιοκατάσταση $\Psi_{j,m}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}|j,m\rangle$, έχουμε

$$\Psi'_{j,m} = e^{-i\phi J_z/\hbar}\Psi_{j,m} = e^{-im\phi}\Psi_{j,m} \ . \qquad (2)$$

Αν απαιτήσουμε περιοδικότητα όταν $\phi \to \phi + 2\pi$, πρέπει $m \in \mathbb{Z}$. Άρα

$$\boxed{\text{Τροχιακή στροφορμή:} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots} \ .$$

Ερώτημα: Υπάρχουν περιπτώσεις με $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$;

Ιδιοστροφορμή

Εκτός απ' την τροχιακή στροφορμή υπάρχουν στοιχειώδη σωματίδια που έχουν την ιδιότητα της στροφορμής χωρίς αυτή να συνδέεται με κλασικά μεγέθη (θέση και ορμή).

- Η δυναμική ενέργεια και δύναμη που ασκείται σε σωματίδιο με μαγνητική ροπή μ εντός πεδίου $\mathbf{B}$ είναι

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} , \qquad \mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U .$$

- Η μαγνητική ροπή κλασικού σωματιδίου στροφορμής $\mathbf{J}$ είναι

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2mc}\mathbf{L} .$$

Το πείραμα των Stern–Gerlach (1922):

Δέσμη ουδέτερων ατόμων Ag διέρχεται από ανομοιογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_0(z)\hat{z}$.

- Δεν υφίστανται δύναμη Lorentz.
- Απ′ τα 47 ηλεκτρόνια τα 46 διαμορφώνουν σφαιρικό φλοιό με $\mathbf{L} = 0$. Πρακτικά το άτομο αντικαθίσταται με το ηλεκτρόνιο.
- Η μαγνητική ροπή εξαιτίας του εξωτερικού ηλεκτρονίου θα δέχεται δύναμη

$$F_z = -\frac{e\hbar}{2mc} m \frac{dB_z}{dz} \ , \qquad m = -j, -j+1, \dots, j \ .$$

- Αν η στροφορμή είναι τροχιακή τότε $j = 0, 1, 2, \dots,$ τότε η δέσμη χωρίζεται σε $1, 3, 5, \dots,$ αντίστοιχα δέσμες.

- Πειραματικά η δέσμη διαχωρίζεται σε δύο ως η δύναμη να ήταν
$$F_z = -g\frac{e\hbar}{2mc}m_s\frac{dB_z}{dz}\ , \qquad m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ ,$$
όπου με πολύ καλή προσέγγιση $g = 2$ (παράγοντας Lande').
- Άρα βλέπουμε ότι πειραματικά το ηλεκτρόνιο είναι ως αν έχει στροφορμή $j = \frac{1}{2}$.
- Υποθέτουμε ότι υπακούει επακριβώς την αντίστοιχη άλγεβρα.
- Δεν πρόκειται για τροχιακή στροφορμή, αλλά για ιδιοστροφορμή (σπίν).

Ηλεκτρόνιο και οι πίνακες του Pauli

Θα συμβολίζουμε την ιδιοστροφορμή με **S** και την ιδιοτιμή του S_z με $\hbar m_s$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

- Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = |+\rangle \ , \qquad |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle \ .$$

Θα πρέπει να υπακούουν τις συνήθεις σχέσεις ορθοκανονικότητας

$$\langle+|+\rangle = \langle-|-\rangle = 1 \ , \qquad \langle+|-\rangle = \langle-|+\rangle = 0$$

και πληρότητας

$$|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = \mathrm{diag}(1,1) \ .$$

- Επίσης θα πρέπει

$$S_+|+\rangle = 0\,, \qquad S_-|-\rangle = 0\,, \qquad S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle\,, \qquad S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle\,.$$

Αναπαράσταση με πίνακες

Αναπαραστούμε τις παραπάνω καταστάσεις και τελεστές ως:

- Έχουμε για τις δύο καταστάσεις $|\pm\rangle$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- Για τους πίνακες έχουμε

$$S_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad S_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

- Οι πίνακες Pauli ορίζονται ώς

$$\boxed{\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} .$$

- Οπότε

$$S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i , \qquad i = 1, 2, 3 , \qquad [S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k .$$

Ιδιότητες των πινάκων Pauli

- Εχουν μηδενικό ίχνος και ορίζουσα

$$\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0 \ , \qquad \det(\sigma_i) = -1 \ , \qquad i = 1, 2, 3 \ .$$

- Οι ιδιοτιμές τους είναι ± 1.
- Ικανοποιούν

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I}_2 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \ , \qquad \mathbb{I}_2 = \mathrm{diag}(1, 1) \ ,$$

απ΄ την οποία συνάγουμε ότι

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}_2 \ , \qquad \mathrm{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij} \ ,$$

όπου $\{A, B\} = AB + BA$.

- Επίσης έχουμε ότι [Άσκηση]

$$e^{i\mathbf{a}\cdot\sigma} = \cos a \ \mathbb{I}_2 + i \sin a \ \hat{\mathbf{a}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \ , \qquad a = |\mathbf{a}| \ , \quad \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a \ .$$

Τροχιακή στροφορμή στην αναπαράσταση θέσης

Χρησιμοποιώντας ότι $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= -i\hbar r \left(\underbrace{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}_{0} \partial_r + \underbrace{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\hat{\phi}} \frac{1}{r} \partial_\theta + \underbrace{\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}}_{-\hat{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi \right) \\
&= -i\hbar \left(\hat{\boldsymbol{\phi}} \partial_\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi \right) \ .
\end{aligned}$$

Από αυτή τη σχέση βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
L_x &= \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{x}} = i\hbar (\sin\phi \partial_\theta + \cos\phi \cot\theta \partial_\phi) \ , \\
L_y &= \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{y}} = -i\hbar (\cos\phi \partial_\theta - \sin\phi \cot\theta \partial_\phi) \ , \\
L_z &= \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -i\hbar \partial_\phi \ .
\end{aligned}$$

Άρα

$$L_+ = \hbar e^{i\phi} (\partial_\theta + i \cot\theta \partial_\phi) \ , \qquad L_- = \hbar e^{-i\phi} (-\partial_\theta + i \cot\theta \partial_\phi) \ .$$

Σημειώνω ότι $L_\pm^\dagger = L_\mp$ και $L_\pm^* \neq L_\mp$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι:

- Αλγεβρα της στροφορμής ικανοποιείται

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \ , \qquad \text{και κυκλικά σε } x, y, z \ .$$

- Το μέτρο της τροχιακής στροφορμής είναι

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 \right) \ .$$

Σφαιρικές αρμονικές: Αλγεβρική κατασκευή

Επειδή $[\mathbf{L}^2, L_z] = 0$, μπορούμε να τους διαγωνοποιήσουμε. Έστω $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ οι ιδιοκαταστάσεις.

- Απ' την αλγεβρική ανάλυση έχουμε

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell,m} = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta \sin\theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\phi^2 \right) Y_{\ell,m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell,m} \ .$$

  και

$$L_z Y_{\ell,m} = -i\hbar \partial_\phi Y_{\ell,m} = \hbar m Y_{\ell,m} \ , \qquad |m| \leqslant \ell \ .$$

- Λόγω του ότι οι $\mathbf{L}^2$ και L_z είναι Ερμιτιανοί οι $Y_{\ell,m}$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό πλήρες σύνολο.

- Δηλαδή

$$\int d\Omega Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) Y_{\ell',m'}(\theta,\phi) = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$$

και

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi) Y_{\ell,m}(\theta',\phi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi-\phi') \ .$$

- Η ΔΕ $L_z Y_{\ell,m} = \cdots$ δίνει

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = Y_{\ell,m}(\theta,0)e^{im\phi} \ .$$

Απ΄ την αλγεβρική ανάλυση

$$L_+ Y_{\ell,\ell}(\theta,\phi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d}{d\theta} - \ell\cot\theta\right) Y_{\ell,\ell}(\theta,0) = 0 \ ,$$

με λύση τελικά

$$Y_{\ell,\ell}(\theta,\phi) = c_\ell e^{i\ell\phi}(\sin\theta)^\ell \ .$$

Η σταθερά κανονικοποίησης ικανοποιεί

$$2\pi|c_\ell|^2 \int_0^\pi d\theta \ (\sin\theta)^{2\ell+1} = 1 \ .$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα και επιλέγοντας την αυθαίρετη φάση $(-1)^\ell$ έχουμε

$$c_\ell = \frac{(-1)^\ell}{\ell! 2^{\ell+1}}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{\pi}} \ .$$

Δρώντας με τον τελεστή L_- κατασκευάζουμε και τις καταστάσεις $Y_{\ell,m}$, με $m = \ell - 1, \ldots$. π.χ.

$$Y_{\ell,\ell-1}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}} L_- Y_{\ell,\ell}(\theta,\phi) = -\sqrt{2\ell} c_\ell e^{i(\ell-1)\phi} (\sin\theta)^{\ell-1} \cos\theta \ .$$

Τελικά [Άσκηση]

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \mathcal{N}_{\ell,m} \frac{e^{im\phi}}{(\sin\theta)^m} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{\ell-m} (\sin\theta)^{2\ell} \ ,$$

όπου

$$\mathcal{N}_{\ell,m} = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \ .$$

Ιδιότητες σφαιρικών αρμονικών:

- Περιορισμός στον άξονα z.

$$Y_{\ell,m}(0,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,\delta_{m,0}\ .$$

- Επίσης

$$Y_{\ell,0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,P_\ell(\cos\theta)\ ,$$

όπου $P_\ell(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre.

- Το μιγαδικό συζυγές είναι

$$[Y_{\ell,m}(\theta,\phi)]^* = (-1)^m Y_{\ell,-m}(\theta,\phi)\ .$$

- Κάτω απ΄ το μετασχηματισμό αρτιότητας

$$(x,y,z)\to-(x,y,z) \quad\Longleftrightarrow\quad (r,\theta,\phi)\to(r,\pi-\theta,\phi+\pi)\ .$$

Τότε

$$Y_{\ell,m}(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\ .$$

Διαχωρισμός κινητικής ενέργειας

Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^2 &= (\epsilon_{ijk}x_j p_k)(\epsilon_{imn}x_m p_n) = x_j p_k x_j p_k - x_j \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} p_j \\ &= r^2 p^2 + 2i\hbar(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) - x_j \mathbf{r}\cdot\mathbf{p} p_j \\ &= r^2 p^2 + i\hbar(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})^2 \ ,\end{aligned}$$

Αλλά επειδή $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ και $[p_i, r] = -i\hbar\frac{x_i}{r}$ έχουμε

$$(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})^2 = r^2(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p})^2 - i\hbar r\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p} \ ,$$

Άρα

$$\mathbf{L}^2 = r^2p^2 + 2i\hbar r(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}) - r^2(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p})^2 \ .$$

Ορίζουμε τον ακτινικό τελεστή ορμής

$$\boxed{p_r = \frac{1}{r}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) r} \ .$$

Μπορεί να γραφτεί ως

$$p_r = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) - i\hbar \frac{1}{r} \ ,$$

οπότε

$$p_r^2 = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})^2 - \frac{\hbar^2}{r^2} - i\hbar \left((\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) \frac{1}{r} + \frac{1}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) \right) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})^2 - 2i \frac{\hbar}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})$$

Τελικά

$$p^2 = p_r^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2}} \ .$$

Προφανώς $[p_r, L_i] = 0, i = 1, 2, 3.$