

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Αθήνα, 15784

Συναρτήσεις Green και εφαρμογές

Περιεχόμενα (19 Δεκεμβρίου 2017)

- ▶ Κατασκευή συναρτήσεων Green.
 - ▶ Μέθοδος υπολογισμού με συρραφή λύσεων.
 - ▶ Μέθοδος υπολογισμού με ιδιοσυναρτήσεις.
- ▶ Ενδεικτικά παραδείγματα.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ GREEN

Ορισμός και χρήση στην επίλυση ΔΕ

Έστω ότι ζητείται η λύση ΔΕ της μορφής

$$L_x y(x) = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (\text{μπορεί να είναι ανοιχτό}), \quad (1)$$

όπου L_x είναι **διαφορικός τελεστής** και $f(x)$ δοθείσα συνάρτηση. Η γενική της λύση είναι

$$y(x) = y_h(x) + \int_a^b dx' G(x, x') f(x'), \quad (2)$$

όπου $y_h(x)$ η λύση της **ομογενούς**

$$L_x y_h(x) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (3)$$

και η $G(x, x')$ είναι η λεγόμενη **συνάρτηση Green** που ικανοποιεί την ΔΕ **Green**

$$L_x G(x, x') = \delta(x - x'), \quad x \in [a, b]. \quad (4)$$

Μέθοδος υπολογισμού με συρραφή λύσεων

Έστω ότι επιζητούμε τη συνάρτηση Green για τον τελεστή

$$L_x G(x, x') = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \right) + q(x) G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (5)$$

Για $x \neq x'$ η **συνεχής** λύση στο $x = x'$ είναι

$$G(x, x') = A \left\{ \begin{array}{l} y_L(x)y_R(x'), \quad x \leq x' \\ y_R(x)y_L(x'), \quad x \geq x' \end{array} \right\}, \quad (6)$$

όπου $y_{L,R}$ επιλύουν την **ομογενή** ΔΕ εκατέρωθεν του x' και ικανοποιούν τις **συνοριακές συνθήκες** στα άκρα:

- ▶ Στο αριστερό άκρο για $x = a$ χρησιμοποιούμε την $y_L(x)$.
- ▶ Στο δεξί άκρο για $x = b$ χρησιμοποιούμε την $y_R(x)$.

Λόγω της παρουσίας της $\delta(x - x')$ στην εξίσωση Green η πρώτη παράγωγος της $G(x, x')$ δεν μπορεί να είναι συνεχής.

- ▶ Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της (5) στο διάστημα $x \in [x' - \epsilon, x' + \epsilon]$

$$\begin{aligned} & \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dG(x, x')}{dx} \right) + \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx q(x) G(x, x') \\ &= \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} dx \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (7)$$

όπου ϵ το ήμισυ του εύρους του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Τελικά θα πάρουμε το όριο $\epsilon \rightarrow 0$.

- ▶ Ο 1ος όρος του αριστερού μέλους είναι **ολική παράγωγος**.
 - ▶ Ο 2ος όρος του αριστερού μέλους **τείνει στο μηδέν** όταν $\epsilon \rightarrow 0$ λόγω του πεπερασμένου των $q(x)$ και $G(x, x')$.
 - ▶ Το δεξί μέλος είναι απλά 1.
- ▶ Τελικά απ' την **ασυνέχεια** της πρώτης παραγώγου έχουμε

$$p(x') \left(\frac{dG}{dx} \Big|_{x=x'+\epsilon} - \frac{dG}{dx} \Big|_{x=x'-\epsilon} \right) = 1, \quad (8)$$

- ▶ Αντικαθιστώντας την παραπάνω λύση έχουμε

$$A [y'_R(x')y_L(x') - y'_L(x')y_R(x')] = \frac{1}{\rho(x')} .$$

- ▶ Όμως η έκφραση στην παρένθεση στο αριστερό μέλος είναι η Wronskian W και ως εκ τούτου $\rho(x)W(x) = \text{σταθερά}$, απ' τη γενική θεωρία ΔΕ (να δειχθεί και ώς **[Άσκηση]**).
- ▶ Άρα η σταθερά A δεν εξαρτάται απ' το σημείο x' και μπορεί να υπολογισθεί σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in [a, b]$

$$A = \frac{1}{W(x_0)\rho(x_0)} .$$

- ▶ Βλέπουμε ότι η Green υπακούει την ιδιότητα συμμετρίας

$$G(x, x') = G(x', x) .$$

- ▶ Τελικά η λύση της $L_x y = f(x)$ είναι της μορφής

$$y(x) = y_h(x) + A \left[y_R(x) \int_a^x dx' y_L(x') f(x') + y_L(x) \int_x^b dx' y_R(x') f(x') \right] ,$$

όπου $y_h(x)$ η λύση της ομογενούς **[Άσκηση]**

Μέθοδος υπολογισμού με ιδιοσυναρτήσεις

Έστω ότι ήδη έχουμε επιλύει το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$L_x \psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x), \quad x \in [a, b], \quad (9)$$

με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες στα άκρα του διαστήματος.

- ▶ Αν ισχύει για τις ιδιοτιμές $\lambda_n \neq 0, \forall n$, τότε η συνάρτηση Green έχει την εξής έκφραση

$$G(x, x') = \sum_n \frac{\psi_n(x) \psi_n^*(x')}{\lambda_n}. \quad (10)$$

- ▶ Χρησιμοποιώντας και τη σχέση πληρότητας

$$\sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') = \delta(x - x'), \quad (11)$$

εύκολα επαληθεύεται η εξίσωση Green (4).

- ▶ Σε περίπτωση συνεχούς φάσματος το προηγούμενο άθροισμα αντικαθίσταται ή συνοδεύεται και με ολοκλήρωμα.

Μηδενικές ιδιοτιμές και τροποποιημένη συνάρτηση Green: Αν έστω και μια ιδιοσυνάρτηση αντιστοιχεί σε μηδενική ιδιοτιμή η (10) δεν ισχύει. Ορίζουμε την **τροποποιημένη συνάρτηση Green**

$$G_{\text{mod}}(x, x') = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\lambda_n}, \quad (12)$$

που υπακούει την ΔΕ **[Άσκηση]**

$$L_x G_{\text{mod}}(x, x') = \delta(x - x') - \sum_{\lambda_n=0} \psi_n(x)\psi_n^*(x'). \quad (13)$$

Πόλοι, ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις: Ας υποθέσουμε ότι η ιδιοτιμή λ_0 μηδενίζεται για συγκεκριμένες επιλογές παραμέτρων και έστω ψ_0 η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση.

Η συνάρτηση Green συμπεριφέρεται ως

$$G(x, x') \simeq \psi_0(x)\psi_0^*(x')/\lambda_0, \quad \lambda_0 \rightarrow 0. \quad (14)$$

Άρα γνωρίζοντας την συνάρτηση Green μπορούμε να υπολογίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις μηδενικής ιδιοτιμής.

Με μικρή μετατροπή του παραπάνω συλλογισμού μπορούμε να βρούμε όλες τις ιδιοσυναρτήσεις μέσω της εξίσωσης Green

$$(L_x - \lambda)G_\lambda(x, x') = \delta(x - x') , \quad x \in [a, b] . \quad (15)$$

που εξαρτάται από την **φασματική παράμετρο** λ . Μέσω των ιδιοσυναρτήσεων έχει λύση

$$G_\lambda(x, x') = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} . \quad (16)$$

Είναι προφανές ότι:

- ▶ Οι **πόλοι** της $G_\lambda(x, x')$ ως συνάρτηση του λ αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_n .
- ▶ Κοντά στους πόλους η $G_\lambda(x, x')$ είναι ανάλογη του γινομένου της αντίστοιχης **ιδιοσυνάρτησης** στα σημεία x, x' .

$$G_\lambda(x, x') \simeq \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} , \quad \lambda \rightarrow \lambda_n . \quad (17)$$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1ο

Ας επιλύσουμε τη ΔΕ για τη συνάρτηση Green

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x-x'), \quad G = G(x, x'), \quad 0 \leq x, x' \leq 1,$$

με οριακές συνθήκες

$$G|_{x=0} = G|_{x=1} = 0.$$

Εκατέρωθεν του x' η λύση που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες είναι της μορφής

$$G(x, x') = \left\{ \begin{array}{ll} Ax, & x \leq x' \\ B(x-1), & x \geq x' \end{array} \right\}.$$

Η **συνέχεια** στο $x = x'$ δίνει τη συνθήκη

$$Ax' = B(x' - 1) \implies A = C(x' - 1), \quad B = Cx',$$

όπου C μια νέα σταθερά.

Η ασυνέχεια της παραγώγου δίνει

$$\left. \frac{dG}{dx} \right|_{x \rightarrow x'^+} - \left. \frac{dG}{dx} \right|_{x \rightarrow x'^-} = 1 \implies C = 1 .$$

Οπότε

$$G(x, x') = x_{<} (x_{>} - 1) , \quad (18)$$

όπου $x_{<}$ ($x_{>}$) το μικρότερο (μεγαλύτερο) των x, x' . Η παραπάνω λύση γράφεται και ως

$$G(x, x') = \frac{1}{2}|x - x'| + xx' - \frac{1}{2}(x + x') . \quad (19)$$

- ▶ Ο όρος $\frac{1}{2}|x - x'|$ είναι η συνάρτηση Green στην πραγματική ευθεία $-\infty < x, x' < \infty$ [Άσκηση]. Ο όρος $xx' - \frac{1}{2}(x + x')$ επιλύει την ομογενή ΔΕ και είναι αναγκαίος για να ικανοποιηθούν οι οριακές συνθήκες στα σημεία $x = 0$ και 1 .
- ▶ Η παραπάνω παρατήρηση είναι χαρακτηριστική όλων των προβλημάτων συναρτήσεων Green.

Διαφορετικές οριακές συνθήκες: Ας υποθέσουμε τις

$$G|_{x=0} = \frac{dG}{dx}|_{x=1} = 0 .$$

Επαναλαμβάνοντας τους ίδιους με πριν συλλογισμούς και με παρόμοιες πράξεις [Άσκηση].

$$G(x, x') = -x_{<} = \left\{ \begin{array}{ll} -x, & x \leq x' \\ -x', & x \geq x' \end{array} \right\} . \quad (20)$$

Κατά αναλογία με την (19) η παραπάνω λύση γράφεται και ως

$$G(x, x') = \frac{1}{2}|x - x'| - \frac{1}{2}(x + x') .$$

Παράδειγμα 2ο

Ας επιλύσουμε τη ΔΕ για τη συνάρτηση Green

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - k^2 G = \delta(x-x'), \quad G = G(x, x'), \quad 0 \leq x, x' \leq 1,$$

με οριακές συνθήκες

$$G|_{x=0} = G|_{x=1} = 0.$$

Η λύση είναι της μορφής

$$G(x, x') = \left\{ \begin{array}{ll} A \sinh kx, & x \leq x' \\ B \sinh k(x-1), & x \geq x' \end{array} \right\}.$$

Η **συνέχεια** στο $x = x'$ δίνει τη συνθήκη

$$A \sinh kx' = B \sinh k(x' - 1) \Rightarrow A = C \sinh k(x' - 1), \quad B = C \sinh kx',$$

όπου C μια νέα σταθερά.

Η ασυνέχεια της παραγώγου δίνει

$$C = \frac{1}{k \sinh k} .$$

Οπότε

$$G(x, x') = \frac{1}{k \sinh k} \sinh kx_{<} \sinh k(x_{>} - 1) . \quad (21)$$

Σημειώστε ότι στο όριο $k \rightarrow 0$ παίρνουμε την (18).

Πόλοι και ιδιοσυναρτήσεις: Ας θεωρήσουμε τους πόλους $G(x, x')$ ως συνάρτηση της παραμέτρου k . Η φασματική παράμετρος $\lambda = k^2$. Από την (21) βρίσκουμε ότι οι πόλοι είναι στα σημεία

$$k_n = i\pi n , \quad n = 1, 2, \dots , \quad (22)$$

όπου χρησιμοποίησα ότι $\sinh ix = i \sin x$. Ας υποθέσουμε ότι η k τείνει στο πόλο k_n . Στο όριο έχουμε

$$G(x, x') \simeq \frac{-2 \sin n\pi x \sin n\pi x'}{n^2 \pi^2 + k^2} , \quad k \rightarrow k_n \quad (23)$$

Συγκρίνοντας με την (17) (επαναλαμβάνεται για ευκολία)

$$G_\lambda(x, x') \simeq \frac{\psi_n(x) \psi_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} , \quad \lambda \rightarrow \lambda_n = k_n^2 , \quad (24)$$

βρίσκουμε ότι:

- ▶ Οι ιδιοσυναρτήσεις και ιδιοτιμές του τελεστή d^2/dx^2 είναι οι

$$\psi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad \lambda_n = -n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

- ▶ Ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες $\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0$, ίδιες με την συνάρτηση Green.

Διαφορετικές οριακές συνθήκες: Ας υποθέσουμε τις

$$G|_{x=0} = \frac{dG}{dx}|_{x=1} = 0.$$

Με παρόμοια διαδικασία και πράξεις **[Άσκηση]**

$$G(x, x') = -\frac{1}{k \cosh k} \sinh kx_{<} \cosh k(x_{>} - 1).$$

Στο όριο $k \rightarrow 0$ παίρνουμε την (20).

Σε αυτή την περίπτωση οι πόλοι της συνάρτησης Green είναι στα σημεία $k_n = i(n + 1/2)\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ως **[Άσκηση]** δείξτε ότι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\psi_n \sim \sin(n + 1/2)\pi x$.

Παράδειγμα 3ο

Ας υπολογίσουμε τη συνάρτηση Green απ' τη ΔΕ

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 2\gamma \frac{d}{dx} + m^2\right) G(x, x') = \delta(x - x'), \quad -\infty < x < \infty, \quad (26)$$

με $\gamma, m \geq 0$, έτσι ώστε η $G(x, x')$ και οι παράγωγοί της να είναι πεπερασμένοι για $|x|, |x'| \rightarrow \infty$.

Μέθοδος 1η: Για $x \neq x'$ έχουμε 2ης τάξης γραμμική ΔΕ με σταθερούς συντελεστές.

- ▶ Η λύση είναι [Έλεγχος]

$$G(x, x') = e^{-\gamma x} \left(A e^{\sqrt{\gamma^2 + m^2} x} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 + m^2} x} \right), \quad x < x'$$

και

$$G(x, x') = e^{-\gamma x} \left(C e^{\sqrt{\gamma^2 + m^2} x} + D e^{-\sqrt{\gamma^2 + m^2} x} \right), \quad x > x'.$$

- ▶ Η απαίτηση για πεπερασμένες τιμές για $|x| \rightarrow \infty$ δίνει $B = C = 0$.
- ▶ Η συνάρτηση Green είναι συνεχής στο $x = x'$ οπότε

$$G(x, x') = E e^{-(\gamma(x-x') + \sqrt{\gamma^2 + m^2}|x-x'|)} .$$

- ▶ Από την ασυνέχεια της παραγώγου στο $x = x'$

$$\left. \frac{dG}{dx} \right|_{x \rightarrow x' - \epsilon} - \left. \frac{dG}{dx} \right|_{x \rightarrow x' + \epsilon} = 1 \implies E = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 + m^2}} .$$

- ▶ Τελικά η συνάρτηση Green είναι

$$G(x, x') = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 + m^2}} e^{-(\gamma(x-x') + \sqrt{\gamma^2 + m^2}|x-x'|)} . \quad (27)$$

Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα $G(x, x') = G(x', x)$. Ο λόγος είναι ότι η ΔΕ γράφεται μεν όπως η (5) με $p(x) = e^{2\gamma x}$ και $q(x) = -m^2 e^{2\gamma x}$ αλλά με δεξιό μέλος ίσο με $-e^{-2\gamma x'} \delta(x - x')$.

Διακρίνουμε τις εξής **οριακές** περιπτώσεις:

- ▶ Θέτοντας $\gamma = 0$ στην (27) έχουμε

$$G(x, x') = \frac{1}{2m} e^{-m|x-x'|} .$$

- ▶ Θέτοντας $m = 0$ στην (27) έχουμε

$$G(x, x') = \frac{1}{2\gamma} \left\{ \begin{array}{ll} e^{-2\gamma(x-x')} , & x > x' \\ 1 , & x < x' \end{array} \right\} . \quad (28)$$

Αυτή δεν είναι η πιό γενική πεπερασμένη λύση για $|x|, |x'| \rightarrow \infty$ γιατί δεν χρειάζεται να πάρουμε τη σταθερά C ίση με μηδέν.

Αυτή η σταθερά μπορεί να προστεθεί στην (28) μιας και αποτελεί λύση της ομογενούς στην (26).

Μέθοδος 2η: Αναπτύσσουμε σε ολοκλήρωμα Fourier

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} G_k(x')$$

και βρίσκουμε ότι

$$G_k(x') = \frac{e^{ikx'}}{k^2 + 2i\gamma k + m^2} ,$$

οπότε [Άσκηση]

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik(x'-x)}}{k^2 + 2i\gamma k + m^2} .$$

Οι πόλοι είναι στα σημεία $k_{\pm} = (-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + m^2})i$. Αν $x > x'$ ($x < x'$) θεωρούμε ως περίγραμμα ολοκλήρωσης το ημικύκλιο στο κάτω (πάνω) μέρος του μιγαδικού επιπέδου που περικλείει το k_- (k_+) και βρίσκουμε το αποτέλεσμα (27) [Άσκηση].

Παράδειγμα 4ο

Ας υπολογίσουμε την συνάρτηση Green του τελεστή

$$L_x = \frac{d^2}{dx^2}, \quad x \in [0, 1],$$

μέσω των ιδιοσυναρτήσεων του και με οριακές συνθήκες μηδενισμού στα άκρα.

- ▶ Οι ιδιοσυναρτήσεις που ικανοποιούν $\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0$ είναι

$$\psi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

με ιδιοτιμή $E_n = -\pi^2 n^2$.

- ▶ Ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_0^1 dx \psi_n^*(x) \psi_m(x) = 2 \int_0^1 dx \sin n\pi x \sin m\pi x = \delta_{n,m}.$$

- ▶ Χρησιμοποιώντας ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \delta(x), \quad -\pi < x < \pi,$$

μπορεί να δειχθεί ότι ικανοποιούν και τη σχέση πληρότητας
[Άσκηση]

$$\sum_n \psi_n^*(x) \psi_n(x') = \delta(x-x').$$

- ▶ Έχουμε

$$\begin{aligned} G(x, x') &= -\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi x'}{n^2} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi(x+x')}{n^2} - \frac{\cos n\pi(x-x')}{n^2} \end{aligned}$$

- ▶ Χρησιμοποιώντας τη απειροσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi z}{2} + \frac{z^2}{4}, \quad 0 \leq z \leq 2\pi,$$

- ▶ έχουμε τελικά

$$G(x, x') = \frac{1}{2}|x - x'| + xx' - \frac{1}{2}(x + x').$$

Η τελευταία έκφραση δεν είναι παρά η (19), δηλαδή αυτή που βρήκαμε με συρραφή των λύσεων.

Η συμπλήρωση των αναγκαίων βημάτων στους παραπάνω υπολογισμούς αφήνεται ως [Άσκηση].

Παράδειγμα 5ο

Η εξίσωση Green για τον τελεστή Laplace στον **τριδιάστατο ελεύθερο χώρο** είναι

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (29)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace είναι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} ,$$

με ιδιοτιμή $-k^2$. Αυτές είναι ήδη κανονικοποιημένες έτσι ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \quad (30)$$

Για την συνάρτηση Green έχουμε

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= 4\pi \int d^3\mathbf{k} \frac{\Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}')}{k^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikR \cos\theta}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησα σφαιρικές συντεταγμένες και διάλεξα τον άξονα z στη διεύθυνση του \mathbf{R} .

- ▶ Το ολοκλήρωμα ως προς ϕ δίνει ένα παράγοντα 2π , η δε ολοκλήρωση ως προς θ είναι

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikR \cos\theta} = \int_{-1}^1 d\alpha e^{ikR\alpha} = \frac{2}{kR} \sin kR,$$

όπου άλλαξα τη μεταβλητή ολοκλήρωσης σε $\alpha = \cos\theta$.

- ▶ Η τελική ολοκλήρωση ως προς k είναι

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{2}{\pi R} \int_0^\infty dk \frac{\sin kR}{k} \\ &= \frac{1}{R}, \end{aligned} \tag{31}$$

Στα πλαίσια του ηλεκτρομαγνητισμού είναι το πεδίο μοναδιαίου σημειακού φορτίου στον ελεύθερο χώρο

Ας θεωρήσουμε την ίδια ΔΕ Green (29) αλλά στον ημιχώρο $z > 0$ και με οριακή συνθήκη $G|_{z=0} = 0$.

- ▶ Οι κατάλληλες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k_1x+k_2y)} \sin k_3z ,$$

με ιδιοτιμή $-k^2$ και $-\infty < k_1, k_2 < \infty, 0 < k_3 < \infty$. Η κανονικοποίησή τους είναι όπως στην (30).

- ▶ Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία μπορεί να δειχθεί [Άσκηση] ότι

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} .$$

- ▶ Στα πλαίσια του ηλεκρομαγνητισμού αυτό είναι το δυναμικό μοναδιαίου σημειακού φορτίου πάνω από γειωμένο απείρων διαστάσεων αγωγό στο $z = 0$ και ο 2ος όρος είναι το πεδίο του ειδώλου του.

Τι θα άλλαζε αν η οριακή συνθήκη στο $z = 0$ ήταν $\partial_z G|_{z=0} = 0$;

- ▶ Σ' αυτήν τη περίπτωση οι κατάλληλες ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k_1 x + k_2 y)} \cos k_3 z ,$$

με ιδιοτιμή $-k^2$ και $-\infty < k_1, k_2 < \infty$, $0 < k_3 < \infty$. Η κανονικοποίησή τους είναι όπως στην (30).

- ▶ Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία μπορεί να δειχθεί [Άσκηση] ότι

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} .$$

- ▶ Στη Φυσική αυτή μπορεί να παριστάνει τη θερμοκρασία σταθερής κατάστασης στον ημχώρο $z > 0$ εξαιτίας σημειακής πηγής θερμότητας πάνω από απείρων διαστάσεων μονωτή στο $z = 0$.

Παράδειγμα 6ο

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση Green στον **τριδιάστατο ελεύθερο χώρο**

$$(\nabla^2 - m^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (32)$$

Για την συνάρτηση Green έχουμε

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= 4\pi \int d^3\mathbf{k} \frac{\Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}')}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikR \cos \theta} , \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησα τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace (30), σφαιρικές συντεταγμένες και διάλεξα τον άξονα z στη διεύθυνση του $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$.

- ▶ Το ολοκλήρωμα ως προς ϕ και θ είναι όπως και πριν και δίνουν τον παράγοντα

$$4\pi \frac{\sin kR}{kR} .$$

- ▶ Η τελική ολοκλήρωση ως προς k είναι

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{2}{\pi R} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + m^2} \sin kR \\ &= \frac{e^{-mR}}{R}. \end{aligned} \quad (33)$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με μεθόδους μιγαδικής ανάλυσης.

- ▶ Η εξίσωση Green που επιλύσαμε εμφανίζεται σε θεωρίες πεδίου στις οποίες οι φορείς των αλληλεπιδράσεων είναι σωματίδια μάζας m .

Π.χ. τα σωματίδια W^\pm και Z των ασθενών αλληλεπιδράσεων, εν αντιθέσει με το φωτόνιο τον ηλεκτρομαγνητικών.

- ▶ Το αντίστοιχο δυναμικό είναι της μορφής (33) και ονομάζεται **δυναμικό Yukawa**.
- ▶ Χαρακτηριστική είναι η **εκθετική πτώση** του δυναμικού με σταθερά $1/m$. Για μικρές αποστάσεις συμπεριφέρεται ως δυναμικό Coulomb.

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης της εξίσωσης Green: Θεωρούμε σφαιρικά συμμετρική λύση εξαρτούμενη απ' την μεταβλητή R , της μορφής

$$G(R) = \frac{F(R)}{R}. \quad (34)$$

- ▶ $F(R)$ πρέπει να είναι μια ομαλή συνάρτηση του R και να ικανοποιεί $F(0) = 1$.
- ▶ Η $1/R$ εξάρτηση για $R \rightarrow 0$, εγγυάται την εμφάνιση της δ -συνάρτησης στο δεξί μέλος της (32).
- ▶ Για σφαιρικά συμμετρικές λύσεις και αντικαθιστώντας την (34), η (32) γράφεται:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dG}{dR} \right) - m^2 G = 0 \quad \implies \quad \frac{d^2 F}{dR^2} - m^2 F = 0.$$

Η φυσικώς αποδεκτή λύση της τελευταίας είναι η $F = e^{-mR}$.

Παράδειγμα 7ο

Θεωρούμε την εξίσωση Green στον **διδιάστατο ελεύθερο χώρο**

$$(\nabla^2 - m^2)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2\pi\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (35)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace είναι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\pi} ,$$

με ιδιοτιμή $-k^2$. Αυτές είναι ήδη κανονικοποιημένες έτσι ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{x} \Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}) = \delta^{(2)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \quad (36)$$

Η συνάρτηση Green είναι (με χρήση πολικών συντεταγμένων)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -2\pi \int d^2\mathbf{k} \frac{\Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}')}{k^2 + m^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + m^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikR \cos \phi} , \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' . \end{aligned}$$

- ▶ Το ολοκλήρωμα ως προς ϕ δίνει

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{ikR \cos \phi} = 2\pi J_0(kR) ,$$

όπου $J_0(x)$ η συνάρτηση Bessel.

- ▶ Η τελική ολοκλήρωση ως προς k είναι

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= - \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + m^2} J_0(kR) \\ &= -K_0(mR) , \end{aligned} \tag{37}$$

όπου $K_0(x)$ η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel 2ου είδους.

- ▶ Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της $K_0(x)$:

- ▶ Για μικρές αποστάσεις βρίσκουμε

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \simeq \ln(mR) , \quad \text{για } mR \ll 1 ,$$

που είναι η λύση της εξίσωσης Green στον ελεύθερο διδιάστατο χώρο.

- ▶ Παρατηρούμε την εκθετική πτώση πτώση τύπου Yukawa

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \simeq -\sqrt{\frac{\pi}{2mR}} e^{-mR} , \quad \text{για } mR \gg 1 ,$$

όπου επισημαίνουμε και στο προηγούμενο προαόδειγμα

Εναλλακτικός τρόπος επίλυσης της εξίσωσης Green: Θεωρούμε σφαιρικά συμμετρική λύση $G(R)$. Τότε έχουμε

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dG}{dR} \right) - m^2 G = \frac{\delta(R)}{R}$$

Θέτοντας $mR = x$ και χρησιμοποιώντας ότι $\delta(x/m) = m\delta(x)$,

$$xG'' + G' - xG = \delta(x) .$$

- ▶ Αυτή είναι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel με δείκτη $\nu = 0$, με τη διαφορά ότι το δεξί μέλος της έχει $\delta(x)$. Οι λύσεις της είναι $I_0(x)$ και $K_0(x)$, εκ των οποίων η δεύτερη είναι ανάλογη του $\ln x$, για $x \ll 1$.
- ▶ Η λύση με φθίνουσα συμπεριφορά για $mR \gg 1$ είναι ανάλογη της $K_0(mR)$.
- ▶ Λόγω του ότι $K_0(mR) \simeq -\ln(mR)$, για $mR \ll 1$ και πρέπει να έχουμε $G \simeq \ln(mR)$, η σταθερά αναλογίας πρέπει να είναι -1 . Το αποτέλεσμα είναι η (37).