

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,  
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,  
Αθήνα, 15784

Ολοκληρώματα

**Περιεχόμενα** (19 Δεκεμβρίου 2017)

- ▶ Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με χρήση συμμετριών
- ▶ Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με μιγαδική ανάλυση

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με χρήση συμμετριών

Στη Φυσική πολλές φορές εμφανίζονται ολοκληρώματα τα οποία μπορούν να απλοποιηθούν με χρήση συμμετριών.

**Παράδειγμα 1ο:** θεωρούμε ολοκληρώματα της μορφής

$$I_{ij}(k) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} f(r; k) x_i x_j, \quad i = 1, 2, \dots, 3, \quad (1)$$

όπου  $\mathbf{k}$  σταθερό διάνυσμα και  $r$  το μέτρο του  $\mathbf{x}$ .

- ▶ Αναγκαστικά

$$I_{ij}(k) = F(k) k_i k_j.$$

- ▶ Πολλαπλασιάζοντας με  $\delta_{ij}$  και αθροίζοντας στα  $i, j$

$$F(k) = \frac{1}{k^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} f(r; k) r^2 = \frac{4\pi}{k^2} \int_0^\infty dr r^4 f(r; k),$$

όπου χρησιμοποίησα ότι  $d^3\mathbf{x} = d\Omega dr r^2$ , σε σφαιρικές συντεταγμένες. Το (2) είναι ένα μονοδιάστατο ολοκλήρωμα, ευκολότερο να υπολογισθεί.

**Παράδειγμα 2ο:** Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα συμμετρίας θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}
 I_i &= \int d\Omega n_i , \\
 I_{ij} &= \int d\Omega n_i n_j , \\
 I_{ijk} &= \int d\Omega n_i n_j n_k , \\
 I_{ijkl} &= \int d\Omega n_i n_j n_k n_l ,
 \end{aligned} \tag{2}$$

όπου  $n_i = x_i/r$ ,  $i = 1, 2, 3$  είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος

$$n_1 = \sin \theta \cos \phi , \quad n_2 = \sin \theta \sin \phi , \quad n_3 = \cos \theta \tag{3}$$

και  $d\Omega = d\phi d\theta \sin \theta$  η στερεά γωνία.

- ▶ Λόγω συμμετρίας **αρτιότητας** (σε κάθε άξονα ξεχωριστά) έχουμε ότι

$$I_i = \int d\Omega n_i = 0 , \quad I_{ijk} = \int d\Omega n_i n_j n_k = 0 . \tag{4}$$

- Λόγω συμμετρίας **αρτιότητας** ως προς κάθε άξονα ξεχωριστά έχουμε ότι  $I_{ij} = A\delta_{ij}$ . Πολλαπλασιάζουμε με  $\delta_{ij}$  και αθροίζουμε τους δείκτες, οπότε  $3A = \int d\Omega = 4\pi$ . Άρα

$$I_{ij} = \int d\Omega n_i n_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} . \quad (5)$$

- Λόγω συμμετρίας κατόπιν **εναλλαγής** οποιωνδήποτε δύο δεικτών έχουμε

$$I_{ijkl} = B(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{kj}\delta_{il} + \delta_{lj}\delta_{ki}) .$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $\delta_{ij}$  και αθροίζοντας ως προς  $i, j$

$$\delta_{ij} I_{ijkl} = \int d\Omega n_k n_l = \frac{4\pi}{3} \delta_{kl} = 5B\delta_{kl} ,$$

οπότε  $B = 4\pi/15$ . Άρα

$$I_{ijkl} = \int d\Omega n_i n_j n_k n_l = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{kj}\delta_{il} + \delta_{lj}\delta_{ki}) . \quad (6)$$

Στη γενική περίπτωση έχουμε το ολοκλήρωμα

$$J_{i_1 i_2 \dots i_N} = \int d\Omega n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_N} . \quad (7)$$

Αν  $N$  είναι **περιττό** τότε είναι μηδέν λόγω αρτιότητας.

- ▶ Γενικά λόγω συμμετρίας λόγω **εναλλαγής** δύο δεικτών οποιωνδήποτε έχουμε

$$J_{i_1 i_2 \dots i_{2N}} = A_N (\delta_{i_1, i_2} \delta_{i_3, i_4} \dots \delta_{i_{2N-1}, i_{2N}} + \dots) , \quad (8)$$

όπου με τις τελείες υπονοούμε όλους τους δυνατούς όρους εναλλαγής των  $i_m$  και  $i_n$ .

- ▶ Αν εκλέξουμε  $i_m = 3, \forall m = 1, 2, \dots, 2N$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \underbrace{J_{33 \dots 3}}_{2N} &= \int d\Omega \cos^{2N} \theta = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^{2N} \theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 dx x^{2N} = \frac{4\pi}{2N+1} . \end{aligned}$$

- ▶ Αλλά

$$J_{\underbrace{33\dots 3}_{2N}} = A_N B_N ,$$

όπου  $B_N$  είναι ο αριθμός  $N$  διακριτών ζευγών που μπορούμε να φτιάξουμε με  $2N$  αντικείμενα.

- ▶ Ισχύουν η αναδρομική και οριακή σχέση

$$B_{N+1} = B_N + 2NB_N = (2N + 1)B_N , \quad B_1 = 1 ,$$

με λύση

$$B_N = (2N - 1)!! .$$

- ▶ Άρα

$$\frac{4\pi}{2N + 1} = A_N (2N - 1)!! \implies A_N = \frac{4\pi}{(2N + 1)!!} .$$

**Παράδειγμα 3ο:** Θα δείξουμε ότι η σφαίρα  $S^n$  μοναδιαίας ακτίνας στον  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n : \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1, \quad (9)$$

έχει όγκο

$$V_{S^n} = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}. \quad (10)$$

Ειδικά

$$V_{S^1} = 2\pi, \quad V_{S^2} = 4\pi, \quad V_{S^3} = 2\pi^2, \quad V_{S^4} = 8\pi^2/3, \quad V_{S^5} = \pi^3.$$

Επίσης:

- ▶ Ο όγκος της  $V_{S_{-1}}$  πρέπει να είναι μηδέν. Πράγματι

$$V_{S^{n-1}} \rightarrow n, \quad n \rightarrow 0.$$

- ▶ Επίσης

$$V_{S^0} = 2.$$

Η  $S^0$  είναι το όριο ευθύγραμμου τμήματος. Το όριο αυτό αποτελείται από 2 σημεία όσα και ο όγκος της  $S^0!$

Απόδειξη: Ας ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση

$$f(r) = e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n+1}^2} = e^{-r^2}, \quad (11)$$

σε όλο το χώρο  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ο στοιχειώδης όγκος είναι

$$dV_{n+1} = dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} = dV_{S^n} dr^n. \quad (12)$$

► Άρα, σε Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} dV_{n+1} f(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n+1} e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n+1}^2} \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right]^{n+1} = \pi^{\frac{n+1}{2}}, \end{aligned} \quad (13)$$

όπου χρησιμοποίησα ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$



- ▶ Σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+1}} dV_{n+1} f(r) &= V_{S^n} \int_0^\infty dr r^n e^{-r^2} \\ &= \frac{1}{2} V_{S^n} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).\end{aligned}\quad (14)$$

- ▶ Εξισώνοντας τις (13) και (14) βρίσκουμε την (10).

Μια χρήσιμη σχέση είναι η

$$dV_{S^n} = \sin^{n-1} \theta dV_{S^{n-1}}. \quad (15)$$

Για να δείξουμε ότι ισχύει ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της

$$\begin{aligned}V_{S^n} &= V_{S^{n-1}} \int_0^\pi d\theta \sin^{n-1} \theta \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},\end{aligned}$$

που ισχύει. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως **[Άσκηση]**.

**Παράδειγμα 4ο:** Η σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας  $B^{n+1}$  που περιλαμβάνεται από την  $S^n$

$$B^{n+1} : \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leq 1, \quad (16)$$

έχει όγκο

$$V_{B^{n+1}} = V_{S^n} \int_0^1 dr r^n = \frac{V_{S^n}}{n+1} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} + 1)}. \quad (17)$$

Ειδικά,

$$V_{B^2} = \pi, \quad V_{B^3} = 4\pi/3, \quad V_{B^4} = \pi^2/2, \quad V_{B^5} = 8\pi^2/15.$$

Επίσης

- ▶ Η  $B^0$  είναι ένα σημείο και αυτό δίνεται απ' τον όγκος της

$$V_{B^0} = 1.$$

- ▶ Ο όγκος της  $B^1$  είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $x \in [-1, 1]$

$$V_{B^1} = 2.$$

Παράδειγμα 5ο: Το ολοκλήρωμα

$$J_{i_1 i_2 \dots i_N} = \int dV_{S^n} n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_N}, \quad (18)$$

όπου  $n_i$  οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος στην  $S^n$  είναι μηδέν για  $N$  περιττό και

$$J_{i_1 i_2 \dots i_{2N}} = A_N (\delta_{i_1, i_2} \delta_{i_3, i_4} \dots \delta_{i_{2N-1}, i_{2N}} + \dots), \quad (19)$$

όπου με τις τελείες υπονοούμε όλους τους δυνατούς όρους εναλλαγής των  $i_m$  και  $i_n$  και

$$A_N = \frac{2\pi^{n/2} \Gamma(N + \frac{1}{2})}{\Gamma[(n+1)/2 + N] (2N-1)!!}. \quad (20)$$

Απόδειξη: Αν εκλέξουμε  $i_m = 3, \forall m = 1, 2, \dots, 2N$ , έχουμε:

- Χρησιμοποιώντας την (15) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \underbrace{J_{33 \dots 3}}_{2N} &= \int dV_{S^n} \cos^{2N} \theta = V_{S^{n-1}} \int_0^\pi d\theta \sin^{n-1} \theta \cos^{2N} \theta \\ &= V_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{n/2-1} x^{2N} = \frac{2\pi^{n/2} \Gamma(N + \frac{1}{2})}{\Gamma[(n+1)/2 + N]}. \end{aligned}$$

Οι λεπτομέρειες των ενδιάμεσων βημάτων αφήνονται ως [Άσκηση].

- ▶ Αλλά

$$J_{\underbrace{33\dots3}_{2N}} = A_N B_N ,$$

όπου  $B_N$  είναι ο αριθμός  $N$  διακριτών ζευγών που μπορούμε να φτιάξουμε με  $2N$  αντικείμενα.

- ▶ Από προηγούμενο παράδειγμα

$$B_N = (2N - 1)!! .$$

- ▶ Άρα

$$\frac{2\pi^{n/2}\Gamma(N + \frac{1}{2})}{\Gamma[(n+1)/2 + N]} = A_N(2N - 1)!! ,$$

απ' όπου υπολογίζουμε την  $A_N$ , όπως στην (20).

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με μεθόδους μιγαδικής ανάλυσης

Η χρήση μεθόδων της **μιγαδικής ανάλυσης** είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Πρίν την ανάπτυξη των διάφορων μεθόδων χρειάζονται οι ορισμοί:

- ▶ Μια συνάρτηση είναι **αναλυτική** στο σημείο  $z_0$  αν η ανάπτυξη σε δυναμοσειρά στην γειτονιά του σημείου συγκλίνει στην τιμή την συνάρτησης στο σημείο αυτό.
- ▶ Ένα σημείο  $z_0$  στο οποίο η συνάρτηση  $f(z)$  δεν είναι αναλυτική, αλλά είναι αναλυτική σε γειτονικά σημεία λέγεται **απομονωμένο ανώμαλο σημείο**.
- ▶ Μια συνάρτηση είναι **μερομορφική** σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}$  αν είναι παντού αναλυτική εκτός από πεπερασμένο αριθμό σημείων.

Θεωρίστε την ανάπτυξη κατά **Laurent**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n . \quad (21)$$

Οι συντελεστές  $a_n$  δίνονται απ' το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} ,$$

όπου η  $C$  είναι κύκλος που περιλαμβάνει μόνο το  $z_0$ .

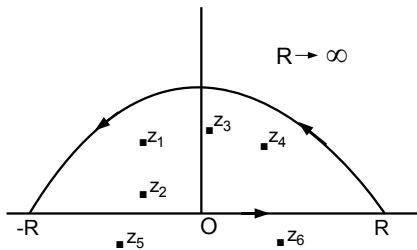
- ▶ Το σημείο  $z_0$  θα είναι **πόλος τάξης  $m$**  αν  $a_n = 0$  για  $n < -m$  και  $a_{-m} \neq 0$ .
- ▶ Αν  $a_{-1} \neq 0$  ο **πόλος** είναι **απλός**.
- ▶ Αν η άθροιση εκτείνεται στο άπειρο ο πόλος είναι μια **ουσιώδης ανωμαλία**.
- ▶ Αν  $z_0$  είναι ένα απομονωμένο ανώμαλο σημείο ο συντελεστής  $a_{-1}$  ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** της  $f(z)$  στο  $z_0$ .

Ολοκληρώματα στην πραγματική ευθεία

Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) .$$

Έστω ότι η  $f(z)$  με  $z \in \mathbb{C}$  είναι αναλυτική στο πάνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου, εκτός από πεπερασμένο αριθμό σημείων  $z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , όπου έχει είτε πόλους είτε ουσιώδεις ανωμαλίες.



**Σχήμα:** Δρόμος ολοκλήρωσης για ολοκληρώματα στην πραγματική ευθεία. Οι εντός της καμπύλης πόλοι είναι στα σημεία  $z_k$ , για  $k = 1, 2, 3, 4$  και οι εκτός για  $k = 5, 6$ .

Με χρήση της θεωρίας των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n R_k ,$$

όπου  $R_k$  τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα εντός ημικυκλίου  $C$  μεγάλης ακτίνας  $R \rightarrow \infty$ . Επίσης υποθέσαμε ότι  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , το λιγότερο όσο γρήγορα όσο η  $1/|z|^m$ , με  $m > 1$ . Τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 2\pi i \sum_{k=1}^n R_k . \quad (22)$$



Ολοκληρώματα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις

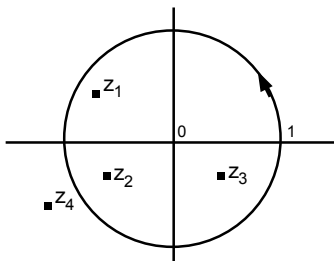
Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{2\pi} d\theta F(\cos \theta, \sin \theta) . \quad (23)$$

Έστω ο μετασχηματισμός

$$z = e^{i\theta} \implies d\theta = \frac{dz}{iz} .$$

Το  $z$  διαγράφει το μοναδιαίο κύκλο



**Σχήμα:** Δρόμος ολοκλήρωσης μοναδιαίου κύκλου. Οι εντός της καμπύλης πόλοι είναι στα  $z_k$ , για  $k = 1, 2, 3$  και οι εκτός για  $k = 4$ .

Οπότε

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\theta F(\cos\theta, \sin\theta) &= \oint_C \frac{dz}{iz} F\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right) \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n R_k, \end{aligned} \quad (24)$$

όπου  $R_k$  είναι τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα εντός του μοναδιαίου κύκλου.

## Σημεία διακλάδωσης και υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Θεωρίστε το  $z$  που διαγράφει τον μοναδιαίο κύκλο από  $e^{0i} = 1$ , έως  $e^{2\pi i} = 1$ . Άρα συναρτήσεις όπως οι  $z^2$ ,  $1/z^3$ ,  $\sin z$ , επιστρέφουν στην αρχική τους τιμή μετά από ένα πλήρη κύκλο. Όμως για πλειότιμες συναρτήσεις, χρειάζεται προσοχή. Π.χ. η  $z^{1/2}$  και η  $\ln z$  γίνονται  $-z^{1/2}$  και  $\ln z + 2\pi i$  μετά από ένα πλήρη κύκλο.

- ▶ Σημεία γύρω από τα οποία μια συνάρτηση είναι **πλειότιμη**, ονομάζονται σημεία **διακλάδωσης**.
- ▶ Για να τα αποφύγουμε χαράσουμε μια γραμμή που ενώνει τα σημεία αυτά χωρίζοντας το μιγαδικό επίπεδο και τέτοια ώστε η  $f(z)$  να έχει διαφορετική τιμή εκατέρωθεν αυτής. Συνήθως οι δύο αυτές τιμές διαφέρουν με μια φάση.
- ▶ Η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

## Παράδειγμα 1ο

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_n = \int_0^{\infty} dx \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}, \quad n = 1, 2, \quad a > 0.$$

**Λύση** Τα ολοκληρώματα γράφονται ως

$$I_n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{iax}}{(1+x^2)^n}.$$

α) Θεωρούμε τό ημικύκλιο άπειρης ακτίνας στο μιγαδικού επιπέδου, όπου έχουμε ένα απλό πόλο εντός του ημικυκλίου στο  $z_1 = i$  και έναν εκτός στο  $z_2 = -i$ . Άρα

$$\oint dz \frac{e^{iaz}}{1+z^2} = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a},$$

Η μόνη συνεισφορά στο αριστερό μέλος είναι αυτή κατά μήκος του πραγματικού άξονα, με αποτέλεσμα

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\cos ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a} .$$

β) Θεωρούμε το ίδιο ημικύκλιο οπότε έχουμε ένα διπλό πόλο εντός του στο  $z_1 = i$ , αλλά και ένα διπλό εκτός στο  $z_2 = -i$ . Υπολογίζουμε

$$\oint dz \frac{e^{iaz}}{(1+z^2)^2} = 2\pi i \left. \frac{d}{dz} \frac{e^{iaz}}{(z+i)^2} \right|_{z=i} = \frac{\pi}{2} (1+a) e^{-a} .$$

Για το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει βρίσκουμε παρόμοια με πριν

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4} (1+a) e^{-a} . \quad (25)$$

## Παράδειγμα 2ο

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I_1 = \int_0^{\infty} dx \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} .$$

## Λύση

Επεκτείνουμε πρώτα το ολοκλήρωμα σε όλη την πραγματική ευθεία

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{ix}}{x^2 + a^2}$$

και θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C dz \frac{z e^{iz}}{z^2 + a^2} ,$$

με δρόμο ολοκλήρωσης  $C$  το μεγάλης ακτίνας ημικύκλιο του σχήματος. Αυτός περικλείει τον πόλο στο  $z = i|a|$ , ενώ ο δεύτερος πόλος στο  $z = -i|a|$  βρίσκεται εκτός.

Η μόνη συνεισφορά στο αριστερό μέλος είναι απ' την πραγματική ευθεία με αποτέλεσμα

$$I = 2\pi i \cdot i|a| \cdot \frac{e^{-|a|}}{2i|a|} = i\pi e^{-|a|} .$$

Άρα

$$I_1 = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} .$$

## Παράδειγμα 3ο

Να υπολογιστεί τα ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\Gamma - \Omega} . \quad (26)$$

## Λύση

Θεωρίστε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{e^{izt}}{z - i\Gamma - \Omega} , \quad \Gamma > 0 , \quad \Omega > 0 .$$

- ▶ Αν  $t > 0$  επιλέγουμε ως  $C$  το ημικύκλιο άπειρης ακτίνας στο πάνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου, το οποίο περικλείει τον απλό πόλο στο σημείο  $z = i\Gamma + \Omega$ . Το αποτέλεσμα είναι  $e^{-\Gamma t + i\Omega t}$ .
- ▶ Αν  $t < 0$  θεωρούμε ως  $C$  το ημικύκλιο άπειρης ακτίνας στο κάτω μέρος του μιγαδικού επιπέδου, στο οποίο η συνάρτηση είναι αναλυτική. Το αποτέλεσμα είναι 0.



- ▶ Επειδή η συνεισφορά στο ολοκλήρωμα από το κυκλικό μέρος της περιφέρειας του ημικυκλίου είναι μηδενική.
- ▶ Έχουμε τελικά ότι

$$I = e^{-\Gamma t + i\Omega t} \Theta(t),$$

όπου

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

η συνάρτηση βήματος.

- ▶ Ολοκληρώματα του τύπου (26) εμφανίζονται σε προβλήματα σχετιζόμενα με **διάδοση κυμάτων**, σε διαδότες σε **Θεωρίες Πεδίου** κλπ. Η εμφάνιση της  $\Theta(t)$  σχετίζεται με την αρχή της **αιτιότητας** (το αποτέλεσμα έπεται της αιτίας που το δημιούργισε) η οποία είναι μια φυσική απαίτηση.

## Παράδειγμα 4ο

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^{2n}}{x^4 - 2 \cos 2\theta x^2 + 1}, \quad 0 < \theta < \pi, \quad n = 0, 1,$$

αποδεικνύοντας ταυτόχρονα ότι  $I_0 = I_1$ .

## Λύση

Θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\oint_C dz \frac{z^{2n}}{z^4 - 2 \cos 2\theta z^2 + 1}, \quad n = 0, 1,$$

όπου  $C$  το ημικύκλιο στο πάνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου και ο πραγματικός άξονας. Οι (απλοί) πόλοι της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης δίνονται από της ρίζες της

$$z^4 - 2 \cos 2\theta z^2 + 1 = 0 \implies z = e^{\pm i\theta}, \quad -e^{\pm i\theta}.$$

Επειδή  $0 < \theta < \pi$ , εντός της  $C$  βρίσκονται οι ρίζες  $e^{i\theta}$  και  $-e^{-i\theta}$ .  
Τότε απ' τη γενική θεωρία

$$\begin{aligned} I_n &= 2\pi i \left[ \frac{z^{2n}}{(z - e^{-i\theta})(z + e^{i\theta})(z + e^{-i\theta})} \Big|_{z=e^{i\theta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^{2n}}{(z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta})(z + e^{i\theta})} \Big|_{z=-e^{-i\theta}} \right] \\ &= \dots = \frac{\pi \cos(2n-1)\theta}{2 \sin \theta \cos \theta}, \quad n = 0, 1. \end{aligned}$$

Άρα

$$I_0 = I_1 = \frac{\pi}{2 \sin \theta}.$$

## Παράδειγμα 5ο

Να υπολογιστεί τα ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^\pi \frac{q d\theta}{q^2 + \sin^2 \theta}, \quad q \in \mathbb{R} \text{ και } n > 1.$$

## Λύση

Θεωρούμε ως δρόμο ολοκλήρωσης  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο τον μοναδιαίο κύκλο. Με την αλλαγή μεταβλητών

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = iz d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right),$$

το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{q d\theta}{q^2 + \sin^2 \theta} = 2iq \int_C \frac{dz}{z^4 - 2(2q^2 + 1)z^2 + 1}.$$

- ▶ Οι πόλοι του παρονομαστή ως προς  $z^2$  είναι θετικές πραγματικές ποσότητες, έστω  $r_{\pm}^2$  με

$$r_{\pm}^2 = 2q^2 + 1 \pm \sqrt{(2q^2 + 1)^2 - 1}.$$

- ▶ Ισχύει ότι  $r_+^2 r_-^2 = 1$  οπότε  $r_-^2 < 1$  και  $r_+^2 > 1$ . Άρα οι μόνοι πόλοι εντός του δρόμου ολοκλήρωσης είναι  $z = \pm|r_-|$ .
- ▶ Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} I &= 2iq \cdot 2\pi i \cdot \left( \lim_{z \rightarrow |r_-|} (z - |r_-|) \frac{z}{(z^2 - r_+^2)(z^2 - r_-^2)} \right. \\ &\quad \left. + \text{παρομοίως για } z = -|r_-| \right) \\ &= \frac{\pi \operatorname{sign}(q)}{\sqrt{q^2 + 1}}. \end{aligned}$$

## Παράδειγμα 6ο

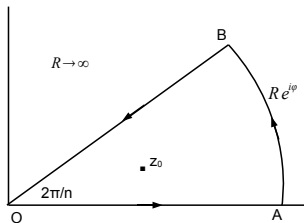
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \quad n \in \mathbb{R}.$$

## Λύση

Θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$J_n = \oint_C \frac{dz}{1+z^n},$$

όπου  $C$  η καμπύλη ανοιχτής κόγχης γωνίας  $2\pi/n$ .

Σχήμα: Ο δρόμος ολοκλήρωσης OABO για το παράδειγμα 6.

- ▶ Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση έχει μόνο ένα απλό πόλο εντός της  $C$  στο σημείο  $z_0 = e^{i\pi/n}$ . Έτσι έχουμε

$$J_n = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\pi/n}.$$

- ▶ Από την άλλη, κατά μήκος των δρόμων:

- ▶  $OA$ :  $z = x \Rightarrow J_n = I_n,$

- ▶  $BO$ :  $z = xe^{2\pi i/n} \Rightarrow J_n = -e^{2\pi i/n} I_n.$

- ▶ Τόξο  $AB$ :  $z = Re^{i\varphi}, \text{ με } R \rightarrow \infty \Rightarrow J_n = 0.$

- ▶ Άρα τελικά

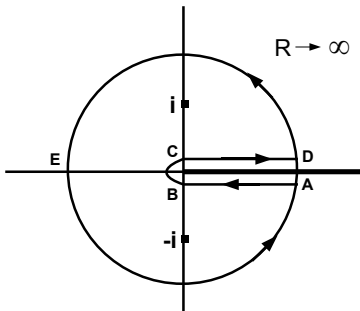
$$I_n = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n}.$$

## Παράδειγμα 7ο

Θεωρούμε τα μιγαδικά ολοκληρώματα

$$J_n = \oint_C dz \frac{\ln^n z}{1+z^2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (27)$$

με περίγραμμα ολοκλήρωσης όπως στην εικόνα



**Σχήμα:** Δρόμος ολοκλήρωσης του παραδείγματος 7. Τα σημεία διακλάδωσης στο  $0$  και στο  $\infty$  ενώνονται με την παχιά γραμμή.



καθώς και τα πραγματικά ολοκληρώματα

$$I_n = \int_0^{\infty} dx \frac{\ln^n x}{1+x^2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

- ▶ Με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων υπολογίστε τις τιμές των  $J_n$ .
- ▶ Χρησιμοποιώντας το  $J_2$  δείξτε ότι  $I_1 = 0$ . Γενικότερα, δείξτε με στοιχειώδη τρόπο (άνευ χρήσεως μιγαδικής ανάλυσης) ότι

$$I_n = 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

- ▶ Χρησιμοποιώντας το  $J_3$  δείξτε ότι

$$I_2 = \frac{\pi^3}{8}.$$

## Λύση

- Εντός της  $C$  έχουμε τους απλούς πόλους στα σημεία  $z = e^{i\pi/2} = i$  και  $z = e^{3i\pi/2} = -i$  και έχουμε

$$\begin{aligned} J_n &= 2\pi i \left[ \frac{(\ln e^{\pi i/2})^n}{z^2 + 1} (z - i) \Big|_{z=i} + \frac{(\ln e^{3\pi i/2})^n}{z^2 + 1} (z + i) \Big|_{z=-i} \right] \\ &= \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^n - \left( \frac{3}{2} \right)^n \right] \pi^{n+1} i^n . \end{aligned}$$

Σημειώνω ότι, λόγω της ύπαρξης των σημείων διακλάδωσης, **δεν θέσαμε**  $-i = e^{-i\pi/2}$  εντός του λογαρίθμου.

- ▶ Ο δρόμος  $CD$  συνεισφέρει στο  $J_2$  κατά  $I_2$ , το μικρό ημικύκλιο γύρω απ' την αρχή των αξόνων μηδέν και το ίδιο και ο μεγάλος κύκλος στο άπειρο. Κατά μήκος του δρόμου  $AB$  έχουμε  $z = e^{2\pi i} x$ , με  $x$  να μικραίνει από το  $\infty$  στο  $0$ , οπότε

$$\ln^2 z = (\ln x + 2\pi i)^2 = \ln^2 x - 4\pi^2 + 4\pi i \ln x .$$

- ▶ Αθροίζοντας τις διάφορες συνεισφορές και χρησιμοποιώντας το στοιχειώδες ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2 ,$$

συμπεραίνουμε ότι  $I_1 = 0$ .

Για την απόδειξη του γενικότερου αποτελέσματος αλλάζουμε πρώτα μεταβλητή ως  $x = 1/y$  και παίρνουμε την ταυτότητα

$$I_n = (-1)^n I_n ,$$

απ' την οποία συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

- ▶ Ο δρόμος  $CD$  συνεισφέρει στο  $J_3$  κατά  $I_3$ , ο μικρός κύκλος  $0$  και το ίδιο και ο μεγάλος κύκλος στο άπειρο. Κατά μήκος του δρόμου  $AB$  έχουμε  $z = e^{2\pi i} x$ , με  $x$  να μικραίνει από το  $\infty$  στο  $0$ , οπότε

$$\ln^3 z = \ln^3 x - 8\pi^3 i + 6\pi i \ln^2 x - 12\pi^2 \ln x .$$

Αθροίζοντας τις διάφορες συνεισφορές, συμπεραίνουμε ότι

$$I_2 = \frac{\pi^3}{8} .$$

## Παράδειγμα 8ο

Θα δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$J(x) = \int_0^{\infty} dt \frac{t^x}{1+t^2} = \frac{\pi}{2 \cos(\pi x/2)}, \quad |x| < 1. \quad (28)$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$J_n = \int_0^{\infty} dt \frac{\ln^n t}{1+t^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (29)$$

Θα δώσουμε τη γενική έκφραση μέσω των αριθμών Euler.

## Λύση

Θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\zeta(x) = \oint_C dz \frac{z^x}{1+z^2},$$

με περίγραμμα ολοκλήρωσης όπως στην εικόνα του προηγούμενου παραδείγματος.

- ▶ Καθώς η ακτίνα  $R \rightarrow \infty$  και το μικρό ημι-κύκλιο γύρω από το μηδέν συρρικνώνεται, η μόνη μη μηδενική συνεισφορά είναι από

$$\zeta(x) = \int_{CD} + \int_{AB} = J(x)(1 - e^{2\pi ix}).$$

- ▶ Εντός της καμπύλης έχουμε δύο απλούς πόλους στο  $z_1 = e^{i\pi/2}$  και  $z_2 = e^{3i\pi/2}$ . Οπότε

$$\begin{aligned} \zeta(x) = J(x)(1 - e^{2\pi ix}) &= 2\pi i \left( \frac{e^{i\pi x/2}}{2i} - \frac{e^{3i\pi x/2}}{2i} \right), \\ &= -2\pi i e^{i\pi x} \sin(\pi x/2), \end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε το αποτέλεσμα (28).

- ▶ Χρησιμοποιώντας ότι  $t^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / n! \ln^n t$ , έχουμε

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} J_n = \frac{\pi}{2 \cos(\pi x/2)}.$$

► Όμως

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2 \cos(\pi x/2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}, \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{16} x^2 + \frac{5\pi^5}{768} x^4 + \frac{61\pi^7}{92160} x^6 + \mathcal{O}(x^8).\end{aligned}$$

► Συγκρίνοντας  $J_n(x) = 0$  αν το  $n$  είναι περιττός ενώ για αν είναι άρτιος

$$J_0 = \frac{\pi}{2}, \quad J_2 = \frac{\pi^3}{8}, \quad J_4 = \frac{5\pi^5}{32}, \quad J_6 = \frac{61\pi^7}{128}.$$

Η γενική έκφραση είναι μέσω των αριθμών του Euler:

- ▶ Ορίζουμε τα πολυώνυμα του Euler απ' την ανάπτυξη

$$2 \frac{e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} . \quad (30)$$

- ▶ Οι αριθμοί του Euler ορίζονται ως

$$E_n = 2^n E_n \left( \frac{1}{2} \right) , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

και είναι όλοι ακέραιοι, με

$$E_0 = 1 , \quad E_2 = -1 , \quad E_4 = 5 , \quad E_6 = -61 , \quad \text{κλπ}$$

και  $E_{2n+1} = 0$ .

- ▶ Τότε

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E_{2n}|}{(2n)!} z^{2n} .$$

- ▶ Άρα

$$J_{2n} = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{2n+1} |E_{2n}| . \quad (31)$$



## Παράδειγμα 9ο

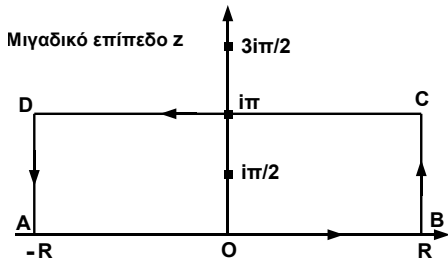
Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ax}}{\cosh^n x}, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad n = 1, 2, \dots, \quad a < n. \quad (32)$$

Σημειώνω ότι ισχύει  $I_n(-a) = I_n(a)$ .

**Λύση:** Θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$J_n(a) = \oint_C dz \frac{e^{az}}{\cosh^n z}. \quad (33)$$



**Σχήμα:** Δρόμος ολοκλήρωσης  $C$  του παραδείγματος 9.

- ▶ Επειδή  $n = 1, 2, \dots$ , η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση έχει μόνο πόλους στα σημεία

$$z_m = i\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Μόνο το σημείο  $z_0 = i\pi/2$  είναι εντός της  $C$ .

- ▶ Οι συνεισφορές στο ολοκλήρωμα από τα 4 τμήματα είναι:

$$AB: \quad z = x \in (-\infty, \infty), \quad J_n(a) = I_n(a),$$

$$CD: \quad z = x + i\pi, \quad x \in (\infty, -\infty), \quad J_n(a) = -(-1)^n e^{i\pi a} I_n(a),$$

$$BC: \quad z = R + iy, \quad y \in (0, \pi), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} J_n(a) = 0,$$

$$DA: \quad z = -R + iy, \quad y \in (\pi, 0), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} J_n(a) = 0,$$

όπου χρησιμοποίησα ότι  $\cosh(x + i\pi) = -\cosh x$ .

- ▶ Άρα

$$J_n(a) = \left[1 - (-1)^n e^{i\pi a}\right] I_n(a). \quad (34)$$

- ▶ Για να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο  $z_0 = i\pi/2$  αλλάζουμε μεταβλητή ως

$$z = \zeta + i\pi/2 \implies J_n(a) = (-i)^n e^{i\pi a/2} \oint_C d\zeta \frac{e^{a\zeta}}{\sinh^n \zeta},$$

όπου χρησιμοποίησα ότι  $\cosh(\zeta + i\pi/2) = i \sinh \zeta$ . Ο δρόμος  $C$  είναι ένας μικρός κύκλος γύρω από το  $\zeta = 0$ .

- ▶ Άρα αρκεί να αναπτύξουμε την συνάρτηση

$$\frac{e^{a\zeta}}{\sinh^n \zeta},$$

σε σειρά γύρω απ' το  $\zeta = 0$  και να βρούμε το συντελεστή του  $1/\zeta$  όρου, δηλαδή το ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $R_n(a)$ . Μερικές τιμές είναι:

$$R_1(a) = 1, \quad R_2(a) = a, \quad R_3(a) = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad R_4(a) = \frac{a(a^2 - 4)}{6}.$$

- ▶ Τελικά

$$J_n(a) = 2\pi(-i)^{n-1} e^{i\pi a/2} R_n(a). \quad (35)$$

- ▶ Εξισώνοντας τις (34) και (35) βρίσκουμε ότι

$$I_n(a) = 2\pi(-i)^{n-1} \frac{R_n(a)}{e^{-i\pi a/2} - (-1)^n e^{i\pi a/2}} . \quad (36)$$

- ▶ Μερικά παραδείγματα είναι:

$$I_1(a) = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)} , \quad a < 1 ,$$

$$I_2(a) = \frac{\pi a}{\sin(\pi a/2)} , \quad a < 2 ,$$

$$I_3(a) = \frac{\pi(1 - a^2)}{2 \cos(\pi a/2)} , \quad a < 3 ,$$

$$I_4(a) = \frac{\pi a(4 - a^2)}{6 \sin(\pi a/2)} , \quad a < 4 .$$

Αφήνεται ως [Άσκηση] ναδειχθεί ότι οι παραπάνω συναρτήσεις είναι θετικές όπως πρέπει.

- ▶ Αν  $n \in \mathbb{R}$  και  $n > 1$  η απάντηση μπορεί να βρεθεί μέσω υπεργεωμετρικών συναρτήσεων.