Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Αθήνα, 15784

Ειδικές συναρτήσεις και πολυώνυμα

Περιεχόμενα (12 Ιανουαρίου 2020)

- Προβλήματα κυλινδρικής συμμετρίας
  - Συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel.
  - Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1ου και 2ου είδους.
- Προβλήματα σφαιρικής συμμετρίας
  - Πολυώνυμα Legendre 1ου και 2ου είδους.
  - Σφαιρικές αρμονικές.
  - Σφαιρικές συναρτήσεις Bessel.
- Γενική θεωρία ορθογώνιων πολυωνύμων
  - Πολυώνυμα Jacobi.
  - Πολυώνυμα Gegenbauer, Hermite, Laguerre, Chebyshev.
  - Σχέση με υπεργεωμετρική εξίσωση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Θεωρούμε την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Psi = 0 \ . \tag{1}$$

- Λύσεις με χωρισμό μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\Psi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) \ . \tag{2}$$

- Με αντικατάσταση οδηγούμαστε στις εξισώσεις
  - Γωνιακή εξάρτηση

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi \sim e^{\pm i\nu\phi} \ , \qquad \nu \in \mathbb{Z} \ .$$

  - Εξάρτηση κατά μήκος του άξονα συμμετρίας

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \ , \qquad \Longrightarrow \qquad Z \sim e^{\pm kz} \ , \qquad k \in \mathbb{C} \ .$$

  - Το ακτινικό μέρος περιγράφεται απ' την

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0 \ . \tag{3}$$

Συναρτήσεις *Bessel* και *Neumann*

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση με $k \in \mathbb{R}$.

- Οι λύσεις τις $Z(z)$ είναι εκθετικές συναρτήσεις.
- Θέτοντας $x = k\rho$, $y(x) = R(\rho) = R(x/k)$ η ακτινική εξίσωση (3) γράφεται ως
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \ , \tag{4}$$
που είναι η εξίσωση Bessel.
- Το σημείο $x = 0$ είναι σύνηθες ανώμαλο σημείο οπότε έχουμε απειροσειρά της μορφής
$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \ , \tag{5}$$
- Με απλή αντικατάσταση $\lambda = \pm\nu$. Θέτοντας $\lambda = \nu$
$$a_1(2\nu + 1)x^{\nu+1} + \sum_{m=2}^{\infty} [a_m m(2\nu + m) + a_{m-2}]x^{m+\nu} = 0 \ ,$$

- Απ′ αυτήν προκύπτει (αν $\nu \neq -1/2$, περίπτωση που θα σχολιάσω παρακάτω), η αναδρομική σχέση [Άσκηση]

$$a_m m(2\nu + m) + a_{m-2} = 0 \ , \qquad \text{καθώς και } a_1 = 0 \ ,$$

η οποία μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_{2m} συναρτήσει του a_0, ενώ $a_{2m+1} = 0$.

- Επιλύοντάς την και αντικαθιστώντας στην (5) βρίσκουμε

$$y_1(x) = J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \ , \tag{6}$$

όπου $J_\nu(x)$ είναι οι λεγόμενες συναρτήσεις Bessel.

Για την εύρεση της 2ης ανεξάρτητης λύσης της εξίσωσης Bessel διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\nu \notin \mathbb{Z}$ τότε η 2η ανεξάρτητη λύση της εξίσωσης Bessel είναι η

$$y_2(x) = J_{-\nu}(x) \ , \qquad \nu \notin \mathbb{Z} \ , \tag{7}$$

  η οποία προκύπτει θέτοντας $\lambda = -\nu$ και παρόμοια με την παραπάνω διαδικασία.

- Αν $\nu = n \in \mathbb{Z}$ τότε

$$\Gamma(m-n+1) = (m-n)!$$

  και απ' την (6) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+n)} \end{aligned}$$

- Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$k! = \Gamma(k+1) = \infty \ , \qquad \text{για } k = -n, \ldots, -1 \ ,$$

βλέπουμε ότι το άθροισμα

$$\sum_{k=-n}^{-1} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+n)} = 0 \ .$$

- Τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= (-1)^n J_n(x) \ . \end{aligned}$$

Άρα η $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ δεν αποτελεί ανεξάρτητη λύση.

- Η 2η ανεξάρτητη λύση ορίζεται ως

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \ . \qquad (8)$$

και ονομάζεται συνάρτηση Neumann. Αν $\nu \in \mathbb{Z}$ το όριο είναι απροσδιόριστο της μορφής $0/0$. Με τον κανόνα L' Hopital δείχνεται ότι το όριο είναι καλώς ορισμένο [Άσκηση].

Η γενική λύση της ακτινικής εξίσωσης (3) είναι η υπέρθεση

$$R_k(\rho) = A_k J_\nu(k\rho) + B_k Y_\nu(k\rho) \ . \tag{9}$$

- Επιπλέον υπέρθεση προκύπτει αν χρειασθούν τα μηδενικά των $J_\nu(x)$ και $Y_\nu(x)$, όπως θα δούμε αργότερα.
- Αν η αρχή των αξόνων $\rho = 0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού και επιζητούμε πεπερασμένες λύσεις, τότε $B_k = 0$. Αν $\rho = 0$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού, τότε και οι δύο λύσεις πρέπει να χρησιμοποιηθούν.
- Όμως, υπάρχουν περιπτώσεις όπου χρειάζεται συγκεκριμένη ανώμαλη συμπεριφορά που εκφράζει π.χ. όρο πηγής ενέργειας, παρουσία ηλεκτρικού φορτίου κλπ. Τότε $B_k \neq 0$.

Οριακή και ασυμπτωτική συμπεριφορά: Σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται η συμπεριφορά των συναρτήσεων $J_\nu(x)$ και $Y_\nu(x)$:

- Για μικρές τιμές του x έχουμε

$$J_\nu(x) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right) , \qquad n \notin \mathbb{Z}^- ,$$

$$Y_\nu(x) \simeq -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right) , \qquad \nu \neq 0$$

και

$$Y_0(x) \simeq \frac{2}{\pi}(\ln(x/2) + \gamma) ,$$

όπου $\gamma = 0.57721\ldots$ είναι η σταθερά Euler–Mascheroni.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) .$$

- Για μεγάλες τιμές του x

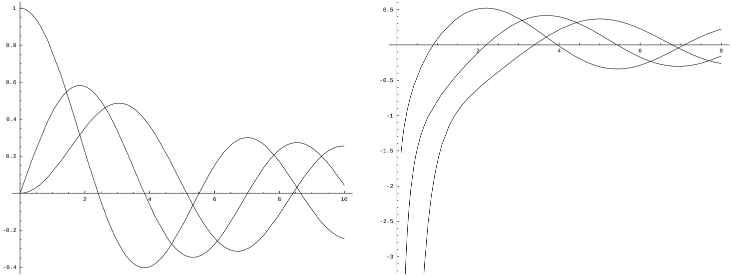
$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) , \qquad x \gg 1$$

και

$$Y_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) , \qquad x \gg 1 .$$

Η συμπεριφορά των συναρτήσεων Bessel και Newmann με θετικούς ακέραιους δείκτες απεικονίζεται παρακάτω:

- Μόνο οι συναρτήσεις Bessel $J_n(x)$ έχουν ομαλή συμπεριφορά για $x \ll 1$.
- Για $x \gg 1$ οι $J_n(x)$ και οι $Y_n(x)$ συμπεριφέρονται ως sin και cos με πλάτος μειούμενο ως $1/\sqrt{x}$.



Σχήμα: α) Γραφικά των συναρτήσεων Bessel $J_n(x)$, $n = 0, 1, 2$ και β) των συναρτήσεων Newmann $Y_n(x)$, $n = 0, 1, 2$.

Γεννήτρια Συνάρτηση: Είναι της μορφής

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \ . \tag{10}$$

Απόδειξη: Αναπτύσσουμε το αριστερό μέλος (AM) χρησιμοποιώντας και την ανάπτυξη σε διώνυμο

$$\begin{aligned}
\mathrm{AM} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \overbrace{\left[\sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(r+s)!}{r!s!}(-1)^s t^{r-s} \delta_{r+s,m}\right]} \\
&= \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} \frac{t^{r-s}}{r!s!} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \underbrace{\left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\right]} \ ,
\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα άλλαξα τον δείκτη άθροισης θέτοντας $r-s=n$. Το άθροισμα στην αγκύλη είναι η συνάρτηση $J_n(x)$.

Η φυσική σημασία της γεννήτριας συνάρτηση μπορεί να δωθεί στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής. Θεωρείστε ελεύθερο σωμάτιο στον $\mathbb{R}^2$ (άπειρο επίπεδο).

- Η Χαμιλτονιανή εναλλάσεται με τους τελεστές ορμής (που γεννούν μετατοπήσεις κατά μήκος των δύο αξόνων)

$$P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a} \ , \quad a = 1,2 \ , \qquad [P_1, P_2] = 0 \ , \tag{11}$$

διότι σε κατάλληλες μονάδες έχουμε ότι

$$H = P_1^2 + P_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad [H, P_{1,2}] = 0 \ . \tag{12}$$

- Άρα οι κοινές ιδιοκαταστάσεις είναι

$$\Psi_{\mathbf{k}}(x_1, x_2) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{ik\rho\cos\phi} \ ,$$

και υπακούουν

$$P_a\Psi_{\mathbf{k}} = k_a\Psi_{\mathbf{k}} \ , \quad a = 1,2 \ , \qquad H\Psi_{\mathbf{k}} = k^2\Psi_{\mathbf{k}} \ .$$

- Ο τελεστής στροφορμής που γεννά στροφές στο επίπεδο είναι

$$J = -i\frac{\partial}{\partial\phi} \quad \Longrightarrow \quad [J, P_1] = P_2 \ , \quad [J, P_2] = -P_1 \ , \tag{13}$$

Οι εναλλάκτες αποδεικνύονται είτε με αναγραφή των P_a σε πολικές συντεταγμένες είτε του J σε Καρτεσιανές [Άσκηση].

- Η εξίσωση Scrhödinger σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} = E\Psi \ , \qquad E = k^2 \ .$$

Με χωρισμό μεταβλητών επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$\Psi_{n,k}(\rho, \phi) = e^{in\phi} J_n(k\rho) \ ,$$

Επειδή

$$[H, J] = 0 \ ,$$

θα πρέπει να είναι δυνατή η ταυτόχρονη διαγωνοποίησή των H και J. Πράγματι οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές υπακούουν

$$J\Psi_{n,k} = n\Psi_{n,k} \ , \qquad H\Psi_{n,k} = k^2\Psi_{n,k} \ .$$

- Η γεννήτρια συνάρτηση (10) για $x = k\rho$ και $t = e^{i\phi}$ γράφεται

$$e^{ik\rho \sin\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} J_n(k\rho) \quad \Longrightarrow \quad \Psi_{\mathbf{k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_{n,k} \ .$$

- Ιδιοκαταστάσεις στροφορμής $\Longrightarrow$ Ιδιοκαταστάσεις ορμής.

Ολοκληρωτική αναπαράσταση: Απ′ τη γεννήτρια συνάρτηση

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \ ,$$

αντιστέφοντας, βρίσκουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dt \ t^{-n-1} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \ , \tag{14}$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε μικρό κύκλο γύρω απ′ το $t = 0$ στο μιγαδικό επίπεδο.

- Θέτοντας $t = e^{i\phi}$ βρίσκουμε την ισοδύναμη σχέση

  $$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \ e^{-in\phi} e^{ix\sin\phi} \ .$$

  Η τελευταία σχέση είναι εξαιρετικά χρήσιμη.
- Όπου εμφανίζονται ολοκληρώματα με sin και cos στον εκθέτη είναι πολύ πιθανόν να μπορούν να εκφρασθούν μέσω συναρτήσεων Bessel.

Ταυτότητες: Με χρήση της γεννήτριας συνάρτησης μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις αναδρομικές σχέσεις

$$\begin{aligned} 2J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \ , \\ \frac{2n}{x} J_n(x) &= J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \ . \end{aligned}$$

π.χ. παραγωγίζοντας τη σχέση (10) για τη γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n'(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(t - \frac{1}{t} \right) t^n J_n(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \right) \ , \end{aligned}$$

απ' την οποία αποδεικνύεται η 1η εκ των παραπάνω σχέσεων. Σημειώνω ότι για τη 2η ισότητα αλλάχθηκε ο δείκτης άθροισης από $n \to n \mp 1$ στους δύο όρους αντίστοιχα.

Απ΄ την ανάπτυξη της συνάρτησης Bessel σε απειροσειρά και παρόμοιες μεθόδους μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x) \ ,$$
$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \left[x^{-n} J_n(x)\right] = (-1)^m x^{-m-n} J_{m+n}(x) \ .$$

Παρατηρήσεις:

- Οι παραπάνω ταυτότητες ισχύουν και για $n \to \nu \notin \mathbb{Z}$.
- Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και ότι $e^{i\nu\pi} = -e^{i(\nu\pm1)\pi}$, αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω ταυτότητες ισχύουν και για τις συναρτήσεις $Y_\nu(x)$.

Προσθετικό θεώρημα: Ισχύει ότι

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y) \ . \tag{15}$$

Απόδειξη: Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τη σχέση για τη γεννήτρια συνάρτηση, με ορίσματα x και y, έχουμε

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)(t-1/t)} = \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} t^{k+m} J_m(x) J_k(y) \ .$$

Το αριστερό μέλος (AM) μέσω της γεννήτριας συνάρτησης είναι

$$\mathrm{AM} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x+y) \ .$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με t^{-n-1} και ολοκληρώντας στο μιγαδικό t-επίπεδο γύρο απ' το $t=0$, αποδεικνύεται η (15).

Σημεία μηδενισμού: Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τα σημεία μηδενισμού των συναρτήσεων Bessel και Neumann

$$J_\nu(x_{\nu,m}) = 0 \ , \qquad Y_\nu(\tilde{x}_{\nu,m}) = 0 \ , \tag{16}$$

των οποίων οι λύσεις είναι άπειρες στο πλήθος.

- Για τις μεγάλες ρίζες χρησιμοποιώντας τις ασυμπτοτικές εκφράσεις των $J_\nu(x)$ και $Y_\nu(x)$ έχουμε

$$x_{\nu,m} \simeq \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{(2m+1)\pi}{2} \ , \qquad m \in \mathbb{Z}^+ \ ,$$

και

$$\tilde{x}_{\nu,m} \simeq \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + m\pi \ , \qquad m \in \mathbb{Z}^+ \ .$$

- Σημειώνω επίσης τις χρήσιμες σχέσεις

$$J'_\nu(x_{\nu,m}) \simeq (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi x_{\nu,m}}} \ , \qquad Y'_\nu(\tilde{x}_{\nu,m}) \simeq (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{\nu,m}}}$$

και $J'_\nu(\tilde{x}_{\nu,m}) \simeq Y'_\nu(x_{\nu,m}) \simeq 0$, στο όριο των μεγάλων ριζών.

Ορθογωνιότητα και πληρότητα: Η εξίσωση Bessel (3) αποτελεί ειδική περίπτωση της εξίσωσης Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(f\frac{d\Phi}{dx}\right)+(Eh+p)\Phi=0\ ,$$

με ($x=\rho$ και $\Phi=R$ στην περίπτωσή μας)

$$f(\rho)=h(\rho)=\rho\ ,\qquad E=k^2\ ,\qquad p(\rho)=-\frac{\nu^2}{\rho}\ .$$

Απ' τη γενική θεωρία στο διάστημα $\rho\in[0,a]$ έχουμε

$$\begin{aligned}(k^2-k'^2)\int_0^a d\rho\rho\ J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) &=\\ a\left[k'J_\nu(ka)J'_\nu(k'a)-kJ_\nu(k'a)J'_\nu(ka)\right]&\ .\end{aligned}$$

Με Dirichlet οριακές συνθήκες

$$J_\nu(ka) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = k_{\nu,m} = \frac{x_{\nu,m}}{a} \ , \quad (\text{ παρόμοια για } k') \ ,$$

που οδηγούν σε κβάντωση του κυματανύσματος.
Τελικά έχουμε:

- Για τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\begin{aligned} \int_0^a d\rho\rho \ J_\nu(x_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(x_{\nu,m'}\rho/a) &= \mathcal{N}_{\nu,m}\delta_{m,m'} \\ &= \frac{a^2}{2}[J'_\nu(x_{\nu,m})]^2 \delta_{m,m'} \ . \end{aligned} \quad (17)$$

- ενώ η σχέση πληρότητας είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\nu(x_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(x_{\nu,m}\rho'/a)}{\mathcal{N}_{\nu,m}} = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \ . \quad (18)$$

Με Neumann οριακές συνθήκες

$$J'_\nu(ka) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = k_{\nu,m} = \frac{y_{\nu,m}}{a} \ , \quad [\text{παρόμοια για } k']$$

επίσης έχουμε κβάντωση των κυματανυσμάτων.
Τελικά έχουμε:

- Για τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu(y_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(y_{\nu,m'}\rho/a)$$
$$= \mathcal{M}_{\nu,m}\delta_{m,m'} = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{y_{\nu,m}^2}\right)[J_\nu(y_{\nu,m})]^2 \delta_{m,m'} \ , \qquad (19)$$

- ενώ η σχέση πληρότητας είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_\nu(y_{\nu,m}\rho/a) J_\nu(y_{\nu,m}\rho'/a)}{\mathcal{M}_{\nu,m}} = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \ . \qquad (20)$$

Γενική παρατήρηση: Στις σχέσεις ορθογωνιότητας και πληρότητας η τάξη ν των συναρτήσεων J_ν και Y_ν είναι σταθερή.

Ορθοκανονικές σχέσεις σε όλο το χώρο: Θεωρούμε το διάστημα $\rho \in [0, \infty)$, οπότε πρέπει να πάρουμε το όριο $a \to \infty$ στις προηγούμενες σχέσεις.

- Επειδή οι επιτρεπόμενες τιμές του κυματανύσματος είναι κβαντισμένες και δίνονται από την $k_{\nu,m} = x_{\nu,m}/a$, το όριο $a \to \infty$ σημαίνει ότι πρέπει να θεωρήσουμε τις μεγάλες ρίζες $x_{\nu,m}$ των Bessel ώστε ο λόγος να είναι πεπερασμένος.
- Το φάσμα είναι συνεχές με πυκνότητα

$$\frac{dk}{dm} \simeq \frac{\pi}{a} \ ,$$

όπου χρησιμοποίησα ότι $k \simeq \pi m +$ σταθερά για τις μεγάλες ρίζες.
- Στο συνεχές όριο

$$\sum_m \to \int dm = \frac{a}{\pi} \int dk$$

και επίσης

$$\delta_{m,m'} \simeq \frac{\delta(k-k')}{dm/dk} \simeq \frac{\pi}{a}\delta(k-k') \ .$$

- Η κανονικοποίηση είναι ανεξάρτητη των οριακών συνθηκών [Άσκηση]

$$\mathcal{N}_{\nu,m} \simeq \mathcal{M}_{\nu,m} \simeq \frac{a}{\pi k} \ .$$

- Τελικά οι σχέσεις ορθογωνιότητας και πληρότητας γίνονται

$$\int_0^\infty d\rho\rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) = \frac{\delta(k-k')}{k} \tag{21}$$

και

$$\int_0^\infty dkk J_\nu(k\rho)J_\nu(k\rho') = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \ . \tag{22}$$

Βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός Hankel της Bessel είναι πάλι μια συνάρτηση Bessel.

Υπολογισμός σταθερών κανονικοποίησης: Θέλουμε να υπολογίσουμε τις σταθερές κανονικοποίησης που εμφανίζονται στα ολοκληρώματα με συναρτήσεις Bessel για Dirichlet και Neumann οριακές συνθήκες. Η βασική σχέση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι

$$(k^2 - k'^2) \int_0^a d\rho\rho \; J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \\ a \left[k' J_\nu(ka) J'_\nu(k'a) - k J_\nu(k'a) J'_\nu(ka) \right] \;,$$

Αυτή απορρέει απ' τη γενική θεωρία προβλημάτων τύπου Sturm–Liouville, εφαρμοσμένη στην περίπτωσή μας.

- Θέλουμε το όριο $k \to k'$.
  - Το αριστερό μέλος είναι

$$(\text{AM}) \simeq 2k'(k - k') \int_0^a d\rho\rho \; J_\nu^2(k'\rho) \;.$$

  - Το δεξί μέλος είναι

$$(\Delta\text{M}) \simeq (k - k') a \left[x J'^2_\nu(x) - J_\nu(x) J'_\nu(x) - x J_\nu(x) J''_\nu(x) \right]_{x = k'a} \;.$$

Εξισώνοντας το δύο μέλη έχουμε τη γενική σχέση για κάθε οριακή συνθήκη που επιβάλλουμε

$$\int_0^a d\rho\rho\ J_\nu^2(k'\rho) = \frac{a}{2k'}\left[xJ_\nu'^2(x) - J_\nu(x)J_\nu'(x) - xJ_\nu(x)J_\nu''(x)\right]_{x=k'a} \quad . \qquad (23)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Την Dirichlet οριακή συνθήκη $J_\nu(k'a) = 0$, οπότε $k' = x_{\nu,m}/a$ και η (23) γίνεται

$$\int_0^a d\rho\rho\ J_\nu^2(x_{\nu,m}\rho/a) = \frac{a^2}{2}[J_\nu'(x_{\nu,m})]^2 \ .$$

- Την Neumann οριακή συνθήκη $J_\nu'(k'a) = 0$, οπότε $k' = y_{\nu,m}/a$ και η (23) γίνεται

$$\begin{aligned}\int_0^a d\rho\rho\ J_\nu^2(y_{\nu,m}\rho/a) &= -\frac{a^2}{2}J_\nu(y_{\nu,m})J_\nu''(y_{\nu,m}) \\ &= \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{y_{\nu,m}^2}\right)J_\nu^2(y_{\nu,m}) \ .\end{aligned}$$

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων: Σε εφαρμογές εμφανίζονται ολοκληρώματα με όρια μηδενικά συναρτήσεων Bessel. Μπορούν να υπολογισθούν με τη βοήθεια αναδρομικών σχέσεων.

Παράδειγμα: Ας υπολογίσουμε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{x_n} dx\, x \left(1 - \frac{x^2}{x_n^2}\right) J_0(x) , \qquad J_0(x_n) = 0 , \\ B_n &= \int_0^{y_n} dx\, x^3 J_0(x) , \qquad J_1(y_n) = 0 . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$xJ_0(x) = (xJ_1(x))'$$

και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες. Βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{x_n^2} \int_0^{x_n} dx\, x^2 J_1(x) , \\ B_n &= -2 \int_0^{y_n} dx\, x^2 J_1(x) . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες

$$x^2 J_1(x) = (x^2 J_2(x))' \ , \qquad J_2(x_n) = \frac{2}{x_n} J_1(x_n) \ ,$$

βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{4}{x_n} J_1(x_n) \ , \qquad J_0(x_n) = 0 \ , \\ B_n &= -2y_n^2 J_2(y_n) \ , \qquad J_1(y_n) = 0 \ . \end{aligned}$$

Ως [Άσκηση] καλείστε να συμπληρώσεται μερικά ενδιάμεσα βήματα, στα οποία γίνεται φανερή η σημασία του γεγονότος ότι τα x_n και y_n είναι ρίζες των $J_0(x)$, $J_1(x)$, αντιστοίχως.

Συναρτήσεις *Hankel*

Στη Φυσική τεράστιο ενδιαφέρον, εξαιτίας και των τεχνολογικών εφαρμογών τους, παρουσιάζουν οι λύσεις εκείνες των εξισώσεων που περιγράφουν ένα φυσικό σύστημα και που παριστάνουν διάδοση κυμάτων (π.χ. Ηλεκτρομαγνητικών, ακουστικών κλπ).

- Ειδικότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν λύσεις οι οποίες συμπεριφέρονται ως κυλινδρικά ή σφαιρικά κύματα σε μεγάλες αποστάσεις από τις πηγές που τα δημιουργούν.
- Στην περίπτωση της εξίσωσης Bessel ορίζουμε έτσι τις συναρτήσεις Hankel:
  - Hankel 1ου είδους

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iY_\nu(x) \ . \tag{24}$$

  - Hankel 2ου είδους

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \ . \tag{25}$$

- Η x είναι το γινόμενο του κυματανύσματος με την ακτινική συντεταγμένη σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.
- Για μικρές αποστάσεις $x \ll 1$ η συμπεριφορά τους είναι ανώμαλη, αλλά αυτό είναι συμβατό με την ύπαρξη πηγών στο φυσικό πρόβλημα.
- Για μεγάλες αποστάσεις έχουμε

$$H_\nu^{(1,2)} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\; e^{\pm i(x-\nu\pi/2-\pi/4)} \;, \qquad x \gg 1 \;. \tag{26}$$

Συνδυάζοντας με χρονική εξάρτηση του τύπου $e^{\pm ivt}$, βλέπουμε συμπεριφορά κύματος με μειούμενο πλάτος.

Τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*

Θεωρούμε τώρα περιπτώσεις όπου η σταθερά διαχωρισμού k της εξίσωσης Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι φανταστική. Τότε έχουμε επίσης τριγωνομετρική συμπεριφορά και για την $Z(z)$. Για λύσεις με χωρισμό μεταβλητών σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\Psi(\rho,\phi,z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) \ . \tag{27}$$

έχουμε τις εξής ΔΕ:

- Γωνιακή εξάρτηση

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi \sim e^{\pm i\nu\phi} \ , \qquad \nu \in \mathbb{R} \ .$$

- Εξάρτηση κατά μήκος του άξονα συμμετρίας

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0 \ , \qquad \Longrightarrow \qquad Z \sim e^{\pm ikz} \ , \qquad k \in \mathbb{R} \ .$$

- Το ακτινικό μέρος περιγράφεται απ' την

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0 \ .$$

- Θέτοντας $x = k\rho$, $y(x) = R(\rho) = R(x/k)$ η ακτινική εξίσωση γίνεται η λεγόμενη τροποποιημένη εξίσωση Bessel

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \ . \qquad (28)$$

  Οι λύσεις της είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel:
  - 1ου είδους

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \qquad (29)$$

  - και 2ου είδους

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right) \ . \qquad (30)$$

- Ο παράγοντας $i^{-\nu}$ εισήχθηκε έτσι ώστε οι συναρτήσεις $I_\nu(x)$ και $K_\nu(x)$ να είναι πραγματικές.

Οριακή και ασυμπτωτική συμπεριφορά:

- Για μικρές τιμές του x έχουμε

$$I_\nu(x) \simeq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right) , \qquad n \notin \mathbb{Z}^-$$

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \left(1 + \mathcal{O}(x^2)\right) , \qquad \nu \neq 0$$

και

$$K_0(x) \simeq -[\ln(x/2) + \gamma] ,$$

$\gamma = 0.57721\ldots$ είναι η σταθερά Euler–Mascheroni.

- Για μεγάλες τιμές του x

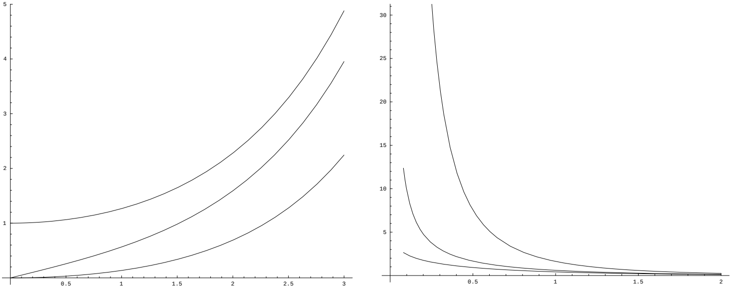
$$I_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x , \qquad x \gg 1$$

και

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\pi}{\sqrt{2x}} e^{-x} , \qquad x \gg 1 .$$

Προσέξτε ότι είναι ανεξάρτητες του δείκτη ν.

Η συμπεριφορά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel με θετικούς ακέραιους δείκτες απεικονίζεται παρακάτω. Οι $I_n(x)$ έχουν ομαλή συμπεριφορά για $x \ll 1$ και οι $K_n(x)$ για $x \gg 1$.



Σχήμα: α) Γραφικά των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel $I_n(x)$, $n = 0, 1, 2$ και β) $K_n(x)$, $n = 0, 1, 2$.

Γεννήτρια συνάρτηση: Στη γεννήτρια συνάρτηση για τις συναρτήσεις Bessel

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) \ ,$$

θέτουμε όπου $x \to ix$ και $t \to -is$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$, παίρνουμε τη γεννήτρια συνάρτηση των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel

$$e^{\frac{x}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^n I_n(x) \ . \tag{31}$$

Ολοκληρωτική αναπαράσταση: Στην ολοκληρωτική αναπαράσταση για την $J_n(x)$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \ e^{-in\phi} e^{ix\sin\phi} \ ,$$

θέτουμε όπου $x \to ix$ και βρίσκουμε ότι

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \ e^{-in\phi} e^{x\cos\phi} \ . \tag{32}$$

Αναδρομικές σχέσεις: Αυτές βρίσκονται απ' τις αντίστοιχες αναδρομικές σχέσεις των συναρτήσεων Bessel. π.χ. [Άσκηση]

$$\begin{aligned} 2I_n'(x) &= I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) \ , \\ \frac{2n}{x} I_n(x) &= I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) \ . \end{aligned} \tag{33}$$

- Έχουν ισχύ και για $n \to \nu \notin \mathbb{Z}$, καθώς επίσης και για τις $K_\nu(x)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Θεωρούμε την εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 \Psi = 0 \ . \tag{34}$$

και υποθέτουμε σφαιρική συμμετρία. Με χωρισμό μεταβλητών

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{35}$$

και αντικατάσταση στην (34) οδηγούμαστε στις εξισώσεις:

- Εξάρτηση απ΄ την γωνία ϕ

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi \sim e^{\pm i\nu\phi} \ ,$$

- Εξάρτηση απ΄ την ακτινική συντεταγμένη r

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} - \ell(\ell+1)\frac{R}{r} = 0 \ , \qquad \Longrightarrow \qquad R \sim r^{\ell} \ , \quad r^{-\ell-1} \ ,$$

όπου $\nu, \ell \in \mathbb{R}$ σταθερές απ΄ το χωρισμό μεταβλητητών.

- Επίσης παίρνουμε και τη ΔΕ για την εξάρτηση απ' τη γωνία θ

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left(\ell(\ell+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \ . \tag{36}$$

- Με αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\theta$ αυτή γράφεται

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 \ . \tag{37}$$

την οποία εν συνεχεία μελετούμε.

Πολυώνυμα *Legendre*

Προς εύρεση λύσεων της (37) εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση με $\nu = 0$ οπότε η (37) ανάγεται στη ΔΕ Legendre

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) + \ell(\ell+1)\Theta = 0 \ , \qquad x = \cos\theta \ . \tag{38}$$

Οι λύσεις της εξαρτώνται:

- Απ΄ το διάστημα στο οποίο η θ παίρνει τιμές.
  Σημειώνω ότι $0 \leqslant \theta \leqslant \pi \ \Rightarrow \ -1 \leqslant x \leqslant 1$, αλλά σε εφαρμογές το διάστημα της θ μπορεί να είναι ακόμα μικρότερο.
- Εαν $\ell \geqslant 0$ και ακέραιος, το οποίο επίσης υποθέτουμε.

Π.χ. για $\ell = 0$, έχουμε η (38) γίνεται

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) = 0 \ ,$$

η οποία έχει δύο λύσεις:

$$\Theta = 1 \ , \qquad \Theta = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \ ,$$

οι οποίες είναι κανονικοποιήσιμες στο διάστημα $x \in [-1, 1]$.
Όμως, εκτός και αν συντρέχουν λόγοι, η 2η λύση είναι απορριπτέα γιατί απειρίζεται στους πόλους για $\theta = 0, \pi$.

- Για ακέραια $\ell > 1$ έχουμε πάντα ως λύση πολυώνυμο τάξεως $\ell + 1$. Η 2η λύση περιέχει όρο με $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.
- Ο λόγος εμφάνισης των λογαρίθμων είναι ότι η εξίσωση Legendre έχει συνήθη ανώμαλα σημεία στα $x = \pm 1$ για τα οποία η χαρακτηριστική εξίσωση έχει λύσεις $\rho_1 = \ell + 1$ και $\rho_2 = -\ell$ [Άσκηση].
  Η διαφορά $\rho_1 - \rho_2 = 2\ell + 1$ είναι ακέραιος, οπότε απ' τη γενική θεωρία ΔΕ, η λύση της (38) θα περιέχει $\ln(1 \pm x)$.

Ορισμός: Ως βάση των πολυωνύμων τάξης $\ell+1$, μπορούμε να πάρουμε την $\{x^m\}$ με $m=0,1,\ldots,\ell+1$, η οποία δεν είναι ορθοκανονική, αλλά μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των Gram–Schmidt. Το αποτέλεσμα είναι τα πολυώνυμα Legendre που ορίζονται απ' τον τύπο του Rodriguez

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \ , \tag{39}$$

όπου η κανονικοποίηση είναι τέτοια ώστε $P_\ell(1)=1$. Μπορεί να δειχθεί ότι τα $P_\ell(x)$ ικανοποιούν την εξίσωση Legendre [Άσκηση].

Εναλλακτική μέθοδος με δυναμοσειρά: Οι λύσεις της εξίσωσης Legendre

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right)+\ell(\ell+1)\Theta=0\ ,$$

μπορούν να βρεθούν με ανάπτυξη σε δυναμοσειρά.

- Το σημείο $x=0$ είναι ομαλό οπότε έχουμε απειροσειρά της μορφής

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\ ,$$

- Με απλή αντικατάσταση παίρνουμε την αναδρομική σχέση

$$a_{m+2}=\frac{m(m+1)-\ell(\ell+1)}{(m+1)(m+2)}a_m\ .$$

  Η απειροσειρά τερματίζεται στον όρο με $m=\ell$.

- Η σταθερά κανονικοποίησης καθορίζεται απ΄ τη σύμβαση ότι ο συντελεστής του όρου x^ℓ στο $P_\ell(x)$ είναι

  $$\frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2 2^\ell} ,$$

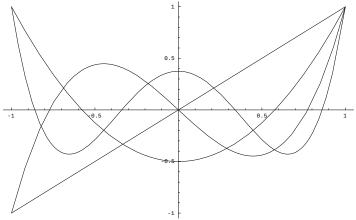
  επιλεγμένος έτσι ώστε το αποτέλεσμα να συμφωνεί με τον ορισμό μέσω του τύπου του Rodriguez, δηλαδή

  $$y(x) = P_\ell(x) .$$

Τα χαμηλότερης τάξης πολυώνυμα Legendre είναι:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \ , \\ P_1(x) &= x \ , \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \ , \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \ , \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \ , \end{aligned}$$

και παρακάτω αναπαρίστανται γραφικά μερικά απ΄ αυτά



Σχήμα: Γραφικά των πολυωνύμων Legendre $P_\ell(x)$, $\ell = 1, 2, 3, 4$

Μετασχηματισμός αρτιότητας: Απ΄ τον ορισμό με τον τύπο του Rodriguez

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \ ,$$

βρίσκουμε ότι

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x) \ . \tag{40}$$

Ορθοκανονικότητα: Απ΄ τον ορισμό και με κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell,\ell'} \ . \tag{41}$$

Απόδειξη: Με χρήση του τύπο του Rodriguez

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell(x) P_{\ell'}(x) &= \frac{1}{2^{\ell+\ell'}\ell!\ell'!}\int_{-1}^{1} dx \left[\frac{d^\ell (x^2-1)^\ell}{dx^\ell}\right]\left[\frac{d^{\ell'} (x^2-1)^{\ell'}}{dx^{\ell'}}\right] \\ &= \frac{(-1)^\ell}{2^{\ell+\ell'}\ell!\ell'!}\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^\ell \left[\frac{d^{\ell+\ell'}}{dx^{\ell+\ell'}}(x^2-1)^{\ell'}\right] \ ,\end{aligned}$$

όπου κάναμε ℓ ολοκληρώσεις κατά μέλη.

- Λόγω των $\ell+\ell'$ παραγώγων σε πολυώνυμο βαθμού $2\ell'$ πρέπει για μη μηδενικό αποτέλεσμα

$$\ell \leqslant \ell' \quad \text{και παρόμοια} \quad \ell' \leqslant \ell \ .$$

Άρα $\ell = \ell'$.

- Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell^2(x) &= \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^\ell \frac{d^{2\ell}(x^2-1)^\ell}{dx^{2\ell}} \\ &= \frac{(-1)^\ell(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^\ell \ .\end{aligned}$$

Υπολογίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^\ell = \sqrt{\pi}\ \frac{(-1)^\ell \ell!}{\Gamma(\ell+3/2)} \ ,$$

βρίσκουμε ότι

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_\ell^2(x) = \frac{2}{2\ell+1} \ .$$

Η σχέση πληρότητας: Αυτή γράφεται ως

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)P_\ell(x)P_\ell(x') = \delta(x-x') \ . \tag{42}$$

Χρησιμοποιώντας την, οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ με $x \in [-1,1]$, αναπτύσσεται ως

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x) \ , \tag{43}$$

με

$$A_\ell = \left(\frac{\ell}{2}+1\right)\int_{-1}^{1} dx\ f(x)P_\ell(x) \ .$$

Ανάπτυξη σε πολυώνυμο: Απ′ τον ορισμό μέσω του τύπου του Rodrigues βρίσκουμε ότι

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\left(\frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}\right)^2 (x-1)^{\ell-k}(x+1)^k \ . \qquad (44)$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον τύπο πολλαπλής παραγώγισης γινομένου

$$\frac{d^\ell[f(x)g(x)]}{dx^\ell} = \sum_{k=0}^{\ell}\frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}\frac{d^k f(x)}{dx^k}\frac{d^{\ell-k}g(x)}{dx^{\ell-k}} \ ,$$

για $f(x) = (x-1)^\ell$ και $g(x) = (x+1)^\ell$ και επίσης ότι

$$\frac{d^k}{dx^k}(x-1)^\ell = \frac{\ell!}{(\ell-k)!}(x-1)^{\ell-k} \ , \qquad \frac{d^{\ell-k}}{dx^{\ell-k}}(x+1)^\ell = \frac{\ell!}{k!}(x+1)^k \ ,$$

αποδεικνύεται η (44) [Έλεγχος].

Η γεννήτρια συνάρτηση και η φυσική της σημασία: Ας θεωρήσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό μοναδιαίου φορτίου στη θέση $\mathbf{R} = (0, 0, 1)$. Για τυχαίο σημείο στο χώρο $\mathbf{r}$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1 - 2r\cos\theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta) \ . \tag{45}$$

Επικεντρώνοντας στον άξονα z με $\theta = 0$ (και επειδή $P_\ell(1) = 1$)

$$\frac{1}{|r-1|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) \ .$$

Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος έχουμε:

- $r < 1: \quad \frac{1}{|r-1|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^\ell \quad \Longrightarrow \quad A_\ell = 1, \quad B_\ell = 0 \ ,$
- $r > 1: \quad \frac{1}{|r-1|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{-\ell-1} \quad \Longrightarrow \quad A_\ell = 0 \ , \quad B_\ell = 1 \ .$

- Το τελικό αποτέλεσμα για το δυναμικό είναι

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+1-2r\cos\theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \ , \qquad (46)$$

όπου $r_<$ ($r_>$) είναι το μικρότερο (μεγαλύτερο) μεταξύ των r και 1. Ο συμβολισμός αυτός είναι συχνότατος στη Φυσική.

- Σε κάθε περίπτωση η σχέση αυτή γράφεται και ως

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1-2tx}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} \ P_\ell(x) \ , \qquad (47)$$

με $t=r$ ή $t=1/r$, έτσι ώστε $t<1$ και $x=\cos\theta$.

- Η ανάπτυξη αυτή ισχύει και για t μιγαδικό. Έτσι το αριστερό της μέλος αποτελεί τη γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre.

Αναδρομικές σχέσεις: Ο ορισμός και η γεννήτρια συνάρτηση οδηγούν σε διάφορες ταυτότητες και αναδρομικές σχέσεις. π.χ.

$$\begin{aligned} (2\ell+1)P_\ell(x) &= P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x) \ , \\ (2\ell+1)xP_\ell(x) &= (\ell+1)P_{\ell+1}(x) + \ell P_{\ell-1}(x) \ . \end{aligned} \tag{48}$$

Απόδειξη: Παραγωγίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση ως προς t

$$\frac{x-t}{(t^2+1-2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_\ell(x) t^{\ell-1} \ .$$

Πολλαπλασιάζουμε με $2t$ και προσθέτουμε τη γεννήτρια

$$\frac{1-t^2}{(t^2+1-2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(x) t^{\ell} \ .$$

Όμως απ' τη γεννήτρια συνάρτηση παραγωγίζοντας ως προς x

$$\frac{t}{(t^2+1-2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P'_\ell(x) t^{\ell} \ .$$

Διαιρώντας ή πολλαπλασιάζοντας με t, αλλάζοντας τον δείκτη άθροισης και αφαιρώντας, βρίσκουμε

$$\frac{1-t^2}{(t^2+1-2tx)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell}[P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x)] \ .$$

Εξισώνοντας, αποδεικνύεται η 1η εκ των (48).

Συναρτήσεις Legendre 2ου είδους: Αποτελούν τη 2η ανεξάρτηση λύση της εξίσωσης Legendre και έχουν την μορφή

$$Q_\ell(x) = \frac{1}{2} P_\ell(x) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{m=1}^{\ell} \frac{1}{m} P_{m-1}(x) P_{\ell-m}(x) \ , \quad \ell = 0, 1, \ldots \ .$$

Τείνουν στο άπειρο στους πόλους της σφαίρας (για $x \to \pm 1$). Μερικές απ' τις $Q_\ell(x)$ χαμηλής τάξεως είναι:

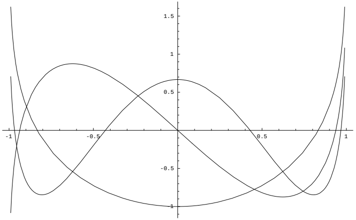
$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ , \\
Q_1(x) &= \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1 \ , \\
Q_2(x) &= \frac{3x^2-1}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2} \ . \\
Q_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{4} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3} \ .
\end{aligned}$$

Οι $Q_\ell(x)$ είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες, $\int_{-1}^{1} dx \ Q_\ell^2(x) < \infty$.

Λόγω της συμπεριφοράς τους για $x = \pm 1$, οι συναρτήσεις $Q_\ell(x)$ απορρίπτονται σε πολλές προβλήματα ως φυσικώς μη αποδεκτές. Όμως πρέπει να συμπεριληφθούν σε δύο γενικές περιπτώσεις:

- Οι πόλοι της σφαίρας δεν περιλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού του φυσικού προβλήματος, δηλαδή $\theta_{\text{min}} > 0$ και $\theta_{\text{max}} < \pi$.
- Στους πόλους υπάρχει όρος πηγής ανάλογος της $\delta(\cos\theta \pm 1)$ ο οποίος μετατρέπει την εξίσωση Laplace σε Poisson.

Συναρτήσεις $Q_\ell(x)$ αναπαρίστανται γραφικά στο σχήμα



Σχήμα: Γραφικά των συναρτήσεων Legendre $Q_\ell(x)$, $n = 1, 2, 3$.

Οι συναρτήσεις $Q_\ell(x)$ υπακούουν τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τα πολυώνυμα Legendre.

Η γενική λύση του αξισυμμετρικού προβλήματος είναι

$$\Psi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta) + \left(C_\ell r^\ell + \frac{D_\ell}{r^{\ell+1}} \right) Q_\ell(\cos\theta) \ . \quad (49)$$

- Οι 4 σταθερές ακολουθίες A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ και D_ℓ προσδιορίζονται απ' τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.
- Αν δεν υπάρχουν όροι πηγής και οι πόλοι της σφαίρας ανήκουν στο πεδίο ορισμού του προβλήματος τότε $C_\ell = D_\ell = 0$.
- Αν η αρχή των αξόνων $r = 0$ ή το $r = \infty$ περιλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού του προβλήματος, τότε οι σταθερές $B_\ell = D_\ell = 0$ και $A_\ell = C_\ell = 0$ (εκτός από $\ell = 0$), αντίστοιχα.

Σφαιρικές αρμονικές

Στην γενικότερη περίπτωση με $\nu \neq m \neq 0$, $\ell \geqslant 0$ και ακέραιους η ΔΕ

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{\nu^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 ,$$

επιδέχεται ως λύσεις τις προσεταιρισμένες συναρτήσεις Legendre.

- Για $m > 0$ ορίζονται ως

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m} . \qquad (50)$$

- Για $m < 0$ οι αντικαθιστούμε $\dfrac{d}{dx} \to \displaystyle\int dx$.
  Όμως μπορεί να δειχθεί ότι

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x) , \qquad (51)$$

οπότε δεν πρόκειται για ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Ορισμός: Οι σφαιρικές αρμονικές ορίζονται ως

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = A_{\ell,m} P_\ell^{|m|}(cos\theta) e^{im\phi} \ , \qquad -\ell \leqslant m \leqslant \ell \ , \tag{52}$$

όπου η σταθερά κανονικοποίησης είναι

$$A_{\ell,m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \ .$$

Αν $|m| > \ell$ τότε $Y_\ell^m = 0$.
Μερικές ιδιότητες είναι:

- Περιορισμός στον άξονα z.

$$Y_\ell^m(0,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \, \delta_{m,0} \ . \tag{53}$$

- Επίσης

$$Y_\ell^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \, P_\ell(\cos\theta) \ . \tag{54}$$

- Οι σφαιρικές αρμονικές αποτελούν βάση της αναπαράστασης της ομάδας συμμετρίας $SU(2)$ με στροφορμή ℓ.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

- Το μιγαδικό συζυγές είναι

$$[Y_\ell^m(\theta,\phi)]^* = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta,\phi) \ . \tag{55}$$

- Κάτω απ' το μετασχηματισμό αρτιότητας

$$Y_\ell^m(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta,\phi) \ . \tag{56}$$

Ο λόγος είναι ότι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$x = r\sin\theta\cos\phi \ , \quad y = r\sin\theta\sin\phi \ , \quad z = r\cos\theta \ ,$$

μετασχηματίζονται ως

$$(x,y,z) \to -(x,y,z) \ ,$$

όπως και αρμόζει σε μετασχηματισμό αρτιότητας.

Ορθοκανονικότητα και πληρότητα: Απ΄ τον ορισμό με κατάλληλες ολοκληρώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \ Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\phi)]^* = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'} \ . \tag{57}$$

Η σχέση πληρότητας γράφεται ως

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta',\phi')]^* = \frac{\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')}{\sin\theta} \ . \tag{58}$$

Μια συνάρτηση $\Phi(\theta,\phi)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σφαιρικές αρμονικές ώς

$$\Phi(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} Y_\ell^m(\theta,\phi) \ . \tag{59}$$

Οι συντελεστές της ανάπτυξης είναι

$$A_{\ell,m} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \ \Phi(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta,\phi)]^* \ . \tag{60}$$

Προσθετικό θεώρημα: Για τις σφαιρικές αρμονικές ισχύει ότι

$$P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta',\phi')]^* \ , \tag{61}$$

όπου

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \ . \tag{62}$$

Απόδειξη: Έστω δύο διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ με σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,ϕ) και (r',θ',ϕ'), αντίστοιχα

$$\mathbf{x} = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \ , \mathbf{x}' = r'(\sin\theta'\cos\phi', \sin\theta'\sin\phi', \cos\theta') \ .$$

- Η μεταξύ τους γωνία είναι γ και δίνεται από την

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{rr'} \ .$$

  Το αποτέλεσμα είναι η (62).
- Χρησιμοποιούμε την ανάπτυξη σε πολυώνυμα Legendre

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}\ P_\ell(\cos\gamma) \ ,$$

  όπου $r_<$ ($r_>$) το μικρότερο (μεγαλύτερο) μεταξύ των r, r'

- Η ίδια ανάπτυξη πρέπει να παίρνει και τη μορφή

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta',\phi')]^* \ .$$

Οι σφαιρικές αρμονικές έχουν εισαχθεί ώστε να υπάρχει συμμετρία ως προς την εναλλαγή των γωνιών $(\theta,\phi) \leftrightarrow (\theta',\phi')$.

- Συγκρίνοντας έχουμε τη σχέση

$$P_\ell(\cos\gamma) = A_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(\theta',\phi')]^* \ , \tag{63}$$

και πρέπει να προσδορίσουμε τις A_ℓ.

- Αν $\theta' = 0$, τότε $\gamma = \theta$, οπότε

$$P_\ell(\cos\theta) = A_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta,\phi)[Y_\ell^m(0,\phi')]^* \ .$$

- Χρησιμοποιώντας τις (53) και (54), έχουμε

$$P_\ell(\cos\theta) = A_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta) \implies A_\ell = \frac{4\pi}{2\ell+1} \ .$$

Αντικαθιστώντας στην (63) προκύπτει η (61).

Γενική λύση εξίσωσης Laplace: Αν οι πόλοι για $\theta = 0, \pi$ είναι ομαλά σημεία στο φυσικό πρόβλημα που μελετούμε, η γενική λύση της εξίσωσης Laplace είναι

$$\Psi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell,m} r^\ell + \frac{B_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_\ell^m(\theta,\phi) \ . \tag{64}$$

Αν οι πόλοι, είτε δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού, είτε αντιστοιχούν σε πηγές, τότε πρέπει να γράψουμε και όρους με τις προσεταιρισμένες συναρτήσεις Legendre $Q_\ell^m(\theta,\phi)$.

Σφαιρικές συναρτήσεις *Bessel*

Θεωρούμε την κυματική εξίσωση

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi \tag{65}$$

και λύσεις της μορφής

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x})e^{i\omega t} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2\Phi + k^2\Phi = 0 \ , \quad k = \frac{\omega}{c} \ , \tag{66}$$

που είναι η εξίσωση Helmholtz. Θεωρώντας λύσεις της μορφής

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = e^{i\omega t} Y_\ell^m(\theta, \phi)\frac{R(r)}{\sqrt{r}} \ , \tag{67}$$

βρίσκουμε ότι η $R(r)$ υπακούει την εξίσωση Bessel [Άσκηση]

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{(\ell+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right)R = 0 \ , \tag{68}$$

με δείκτη $\nu = \ell + \frac{1}{2}$ (ημιακέραιος).

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel ορίζονται ως

$$
\begin{aligned}
j_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) \ , \\
n_\ell(x) &= (-1)^{\ell+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{-\ell-\frac{1}{2}}(x) \ .
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Η γενική μορφή τους είναι

$$
\begin{aligned}
j_\ell(x) &= a_\ell(x)\sin x + b_\ell(x)\cos x \ , \\
n_\ell(x) &= -a_\ell(x)\cos x + b_\ell(x)\sin x \ ,
\end{aligned}
\tag{70}
$$

- Τα a_ℓ και b_ℓ είναι πολυώνυμα δυνάμεων του $1/x$ τάξεως $\ell+1$ και ℓ, αντίστοιχα. Αυτό υπαγορεύεται απ' το γεγονός ότι $J_{1/2} \sim \sin x/\sqrt{x}$, $J_{-1/2} \sim \cos x/\sqrt{x}$.
- Η υψηλότερης τάξης $j_\ell(x)$ γεννώνται μέσω των αναδρομικών σχέσεων.

- Για $x \to 0$, οι j_ℓ είναι πεπερασμένες, ενώ οι n_ℓ τείνουν στο άπειρο.
- Μερικές σφαιρικές συναρτήσεις Bessel είναι οι:

$$
\begin{aligned}
j_0(x) &= \frac{1}{x}\sin x \ , \\
j_1(x) &= \frac{1}{x^2}\sin x - \frac{1}{x}\cos x \ , \\
j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
n_0(x) &= -\frac{1}{x}\cos x \ , \\
n_1(x) &= -\frac{1}{x^2}\cos x - \frac{1}{x}\sin x \ , \\
n_2(x) &= -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x \ .
\end{aligned}
$$

Τροποποιημένες σφαιρικές συναρτήσεις Bessel:
Κατά αναλογία με τις συναρτήσεις $j_\ell(x)$ $n_\ell(x)$ ορίζουμε τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel ως:

- 1ου είδους

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+\frac{1}{2}}(x) = i^{-n} j_n(ix) \ . \tag{71}$$

- 2ου είδους

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{n+\frac{1}{2}}(x) = -i^n h_n^{(1)}(ix) \ , \tag{72}$$

  όπου $h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i n_n(x)$.

- Οι ιδιότητες και η συμπεριφορά των $i_\ell(x)$ και $k_\ell(x)$ βρίσκονται εύκολα μέσω της άμεσης σχέσης τους με τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1ο

Ας αναπτύξουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1\ , & 0 < x < 1 \\ -1\ , & -1 < x < 0 \end{array} \right\} , \tag{73}$$

σε σειρά πολυωνύμων Legendre.

- Γενικά έχουμε ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\ , \qquad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} dx\ f(x) P_n(x)\ . \tag{74}$$

Στην περίπτωσή μας επειδή $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ έχουμε

$$a_n = (2n+1) \int_0^1 dx\ P_n(x)\ , \qquad n = 1, 3, 5 \ldots\ ,$$

και μηδέν εάν n είναι άρτιος.

- Απ′ τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) \ ,$$

παίρνουμε ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^1 dx \ P_n(x) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t-1}{t}$$

$$= \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2n! \ \Gamma(3/2-n)} \ t^{2n-1} \ ,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανάπτυξη σε σειρά Taylor

$$(1+z)^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)}{n!\Gamma(q+1-n)} z^n \ ,$$

για $q = \frac{1}{2}$ και $z = t^2$.
Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως [Άσκηση].

- Συγκρίνοντας παίρνουμε ότι

$$\int_0^1 dx\ P_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{\pi}}{2k!\ \Gamma(3/2-k)} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k k!} \ , & n = 2k-1 \\ 1 \ , & n = 0 \\ 0 \ , & n = 2k \end{array} \right\} ,$$

όπου έχουμε το συμβολισμό

$$n!! = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \cdot 3 \cdots (2k+1) \ , & n = 2k+1 \\ 2 \cdot 4 \cdots (2k) \ , & n = 2k \end{array} \right\} .$$

- Άρα οι μη μηδενικοί συντελεστές της ανάπτυξης (74) σε σειρά πολυωνύμων Legendre είναι

$$a_{2k-1} = (4k-1)\frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k k!} \ , \qquad k = 1, 2, \dots \ .$$

Παράδειγμα 2ο

Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre ας υπολογίσουμε την άπειρη σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\, P_n(x) \ . \tag{75}$$

- Ολοκληρώνουμε ως προς t την γεννήτρια συνάρτηση και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\, P_n(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ . \end{aligned}$$

Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως [Άσκηση].

Παράδειγμα 3ο

Ας υπολογίσουμε τη σταθερά

$$\left.\frac{dP_n(x)}{dx}\right|_{x=1} \equiv P_n'(1) = \frac{1}{2}n(n+1) \ , \qquad (76)$$

με τους ακόλουθους τρόπους:

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Rodrigues' και παραγωγίζοντας ως προς x
$$P_n'(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right] \ .$$
Οι μη μηδενικές συνεισφορές για $x=1$ προέρχονται όταν n παράγωγοι αναγκαστικά να δρούν πάνω στον όρο $(x-1)^n$ και μία στον όρο $(x+1)^n$.
Υπάρχουν $n+1$ τέτοιες δυνατότητες, οπότε
$$P_n'(1) = \frac{n+1}{2^n n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n\right]_{x=1}\left[\frac{d}{dx}(x+1)^n\right]_{x=1} = \ \frac{1}{2}n(n+1) \ .$$

- Απ΄ τη γεννήτρια συνάρτηση παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n'(x) = \frac{t}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} \ ,$$

οπότε για $t<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(1) t^n = \frac{t}{(1-t)^3} = \frac{t}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} \ t^n \ .$$

Συγκρίνοντας, αποδεικνύεται η (76).

Παράδειγμα 4ο

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Rodrigues ας αποδείξουμε ότι

$$I_n[f] = \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}f(x)dx \ . \qquad (77)$$

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Rodrigues έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_n[f] &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx \\ &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f(x)d\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right) \ . \end{aligned}$$

- Ολοκληρώνοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} I_n[f] &= \frac{1}{2^n n!}\left[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} \\ &\quad -\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx \ . \end{aligned}$$

- Ο πρώτος όρος μηδενίζετε και έτσι έχουμε

$$I_n[f] = \frac{(-1)}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n dx \,.$$

- Είναι φανερό ότι μετά από n κατά παράγοντες ολοκληρώσεις, καταλήγουμε στο

$$I_n[f] = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) dx \ ,$$

  που είναι το ζητούμενο.

Ως εφαρμογή του προηγουμένου συμπεράσματος θέτουμε, $f(x) = x^m$, και χρησιμοποιούμε ότι

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = 0 \ , \qquad \text{για} \quad m < n \ .$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$I_{m,n} = I_n[x^m] = \int_{-1}^{1} x^m P_n(x) dx = 0 \ , \qquad \text{για} \quad m < n \ . \tag{78}$$

ΓΕΝΙΚΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Διαφορετικά είδη ορθογωνίων πολυωνύμων μοιράζονται κοινά χαρακτηριστικά. Είναι προτιμότερο λοιπόν να αναπτύξουμε γενικότερα τη σχετική θεωρία.

- Θεωρούμε τη μεταβλητή $x \in [a, b]$ και τη λεγόμενη συνάρτηση βάρους $h(x) \geqslant 0,\ \forall\, x \in [a, b]$.
- Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b dx\ h(x) f(x) g(x)\ , \tag{79}$$

  για δύο συναρτήσεις f και g.
- Μέσω αυτού ορίζεται το μέτρο της συνάρτησης f

$$\| f \| = \langle f, f \rangle^{1/2} > 0\ . \tag{80}$$

  Παρατηρούμε ότι εξ' ορισμού $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.
- Με τους παραπάνω ορισμούς

$$\| 1 \| = \sqrt{\int_a^b dx\ h(x)} < \infty \quad (\text{απαιτείται σύγκλιση})\ . \tag{81}$$

Μέθοδος κατασκευής και ιδιότητες

Η φυσική βάση πολυωνύμων έως τάξη n, είναι τα $1, x, \ldots, x^n$.
Με τη μέθοδο των Gram–Schmidt κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική βάση πολυωνύμων $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$.

- Ορίζουμε το πρώτο πολυώνυμο της σειράς ως
$$P_0(x) = \frac{\mathcal{N}_0^{1/2}}{\|1\|} \ . \tag{82}$$
- Τα μεγαλύτερης τάξης πολυώνυμα ορίζονται απ΄ την αναδρομική σχέση
$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{\langle P_m, xP_n \rangle}{\mathcal{N}_m} P_m(x) \ , \tag{83}$$
όπου $\mathcal{N}_n$ σταθερές κανονικοποίησης.
- Εκ΄ κατασκευής
$$\langle P_n, P_m \rangle = \mathcal{N}_n \delta_{n,m} \tag{84}$$
και επίσης ότι $P_n(x)$ είναι όντως τάξης n πολυώνυμα.

Αναδρομική σχέση: Τα πολυώνυμα υπακούουν αναδρομική σχέση της μορφής

$$xP_n(x) = A_n P_n(x) + B_n P_{n+1}(x) + C_n P_{n-1}(x) \ , \tag{85}$$

με

$$C_n = \frac{\mathcal{N}_n}{\mathcal{N}_{n-1}} B_{n-1} \ . \tag{86}$$

Απόδειξη: Εν γένει θα έχουμε μια σχέση της μορφής

$$xP_n(x) = A_n P_n(x) + B_n P_{n+1}(x) + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n,m} P_m(x) \ .$$

- Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το P_ℓ έχουμε

$$\langle P_\ell, xP_n \rangle = \mathcal{N}_\ell \left(A_n \delta_{n,\ell} + B_n \delta_{n,\ell-1} + C_{n,\ell} \sum_{m=0}^{n-1} \delta_{m,\ell} \right) \ .$$

- Όμως ισχύει ότι

$$\langle P_\ell, xP_n\rangle = \langle P_n, xP_\ell\rangle = \mathcal{N}_n \left(A_\ell \delta_{n,\ell} + B_\ell \delta_{\ell,n-1} + C_{\ell,n} \sum_{m=0}^{\ell-1} \delta_{m,n} \right) .$$

- Εξειδικεύοντας την παραπάνω

$$\begin{aligned} \ell = n+1 : &\qquad \mathcal{N}_{n+1} B_n = C_{n+1,n}\mathcal{N}_n \quad \Longrightarrow \quad C_{n+1,n} = \frac{\mathcal{N}_{n+1}}{\mathcal{N}_n} B_n \\ \ell \geqslant n+2 : &\qquad 0 = C_{\ell,n}\mathcal{N}_n \quad \Longrightarrow \quad C_{\ell,n} = 0 \ . \end{aligned}$$

Η (85) αποδεικνύεται θέτοντας τη σταθερά $C_n = C_{n,n-1}$.

Σχέσεις μεταξύ σταθερών: Οι σταθερές A_n, B_n και C_n στην αναδρομική σχέση (85) σχετίζονται με τους τρείς υψηλότερης τάξης όρους του πολυωνύμου $P_n(x)$. Έστω ότι

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \gamma_{n-2} x^{n-2} + \cdots \ . \tag{87}$$

Αντικαθιστώντας και εξισώνοντας τους όρους τάξεως x^{n+1}, x^n και x^{n-1} παίρνουμε 3 εξισώσεις για τις A_n, B_n και C_n [Άσκηση]

$$\alpha_n = B_n \alpha_{n+1}\ ,\ \beta_{n-1} = A_n \alpha_n + B_n \beta_n\ ,\ \gamma_{n-2} = A_n \beta_{n-1} + B_n \gamma_{n-1} + C_n \alpha_{n-1}\ . \tag{88}$$

με λύση

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\alpha_{n+1}\beta_{n-1} - \alpha_n \beta_n}{\alpha_n \alpha_{n+1}}\ , \\ B_n &= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\ , \\ C_n &= \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n-2} - \alpha_n \gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}\alpha_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1}\beta_{n-1} - \alpha_n \beta_n}{\alpha_{n-1}\alpha_n \alpha_{n+1}} \beta_{n-1}\ . \end{aligned} \tag{89}$$

Απ' την (86) βρίσκουμε το λόγο $\mathcal{N}_n/\mathcal{N}_{n-1}$ και τη σταθερά κανονικοποίησης $\mathcal{N}_n$ (εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθ.).

Ο τύπος των Darboux–Christoffel: Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\mathcal{N}_k} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}_n \mathcal{N}_{n+1}}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \ . \quad (90)$$

Αυτός μπορεί να εννοηθεί και ως μια ατελής μορφή της σχέσης πληρότητας.
Αυτή ισχύει πραγματικά μόνο στο όριο $n \to \infty$.

Στην περίπτωση που $x = y$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα l' Hopital έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{[P_k(x)]^2}{\mathcal{N}_k} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}_n \mathcal{N}_{n+1}}} \left(P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)\right) \ . \quad (91)$$

Πολυωνυμικές Ρίζες: Ένα τυχαίο πολυώνυμο έχει πραγματικές και μιγαδικές ρίζες ακόμα και αν συντελεστές του είναι πραγματικοί αριθμοί.
Όμως για τα ορθογώνια πολυώνυμα όπως τα έχουμε ορίσει μπορεί να αποδειχθεί ότι:

- Όλες οι ρίζες ενός πολυωνύμου $P_n(x)$ είναι πραγματικές, διακριτές και εντός του πεδίου ορισμού του, $x \in [a, b]$.
- Οι ρίζες του $P_n(x)$ είναι μεταξύ αυτών του αμέσως μεγαλυτέρου σε τάξη $P_{n+1}(x)$.

π.χ. Για τα πολυώνυμα Legendre

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; x = -0.775, 0, 0.775 \;.$$

και

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} = 0 \;\Rightarrow\; x = -0.861, -0.340, 0.340, 0.861 \;,$$

τα παραπάνω επαληθεύονται.

Ορθογώνια πολυώνυμα και ΔΕ

Υπό συγκεκριμένες συνθήκες ΔΕ του τύπου Sturm–Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{d\Phi(x)}{dx}\right) + Eh(x)\Phi(x) = 0 \ , \tag{92}$$

έχουν ώς ειδικές λύσεις ορθογώνια πολυώνυμα με συνάρτηση βάρους $h(x)$. Ορίζουμε πρώτα τις συναρτήσεις

$$Q = f/h \ , \quad L = f'/h \quad \Longleftrightarrow \quad f = e^{\int dxL/Q} \ , \quad h = \frac{1}{Q}e^{\int dxL/Q} \ ,$$

οπότε η ΔΕ γράφεται ως

$$Q\Phi'' + L\Phi' + E\Phi = 0 \ . \tag{93}$$

Μια αναγκαία συνθήκη για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις είναι

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \ , \qquad L(x) = \gamma x + \delta \ ,$$

δηλαδή να είναι τετραγωνική και γραμμική συνάρτηση, αντίστοιχα.

Περαιτέρω διακρίνουμε:

- Οι σταθερές $a \neq 0$, $\gamma \neq 0$ και έχουν το ίδιο πρόσημο. Οι ρίζες της $Q(x) = 0$ είναι πραγματικές και διακριτές και η ρίζα της $L(x) = 0$ βρίσκεται μεταξύ των.
  π.χ. τα πολυώνυμα Legendre και οι γενικεύσεις τους τα πολυώνυμα Jacobi.
- Οι σταθερές $a = 0$, $b \neq 0$, $\gamma \neq 0$ και οι ρίζες των $Q(x) = 0$ και $L(x) = 0$ είναι διαφορετικές. Το πρόσημο των b και α είναι ίδιο ή αντίθετο ανάλογα με το αν ρίζα της $Q(x) = 0$ είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη απ' τη ρίζα της $L(x) = 0$.
  π.χ. τα πολυώνυμα Laguerre.
- Οι σταθερές $a = b = 0$, $\gamma \neq 0$ και c και γ έχουν αντίθετα πρόσημα.
  π.χ. τα πολυώνυμα Hermite.

Η συνάρτηση Bessel δεν ανήκει σε καμμία απ' τις ανωτέρω κατηγορίες και δεν έχει πολυωνυμικές λύσεις.

Τύπος του Rodrigues: Ορίζουμε τα γενικευμένα πολυώνυμα

$$P_n(x) = \frac{\mathcal{M}_n}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n} \Big(h(x) [Q(x)]^n \Big) \ , \tag{94}$$

όπου η σταθερά αναλογίας $\mathcal{M}_n$ σχετίζεται με την σταθερά κανονικοποίησης του εσωτερικού γινομένου $\mathcal{N}_n$.

Κβάντωση της ιδιοτιμής E: Απαιτώντας τα πολυώνυμα όπως ορίσθηκαν μέσω του τύπου του Rodrigues να ικανοποιούν τη ΔΕ, βρίσκουμε ότι

$$E_n = -n \left[a(n-1) + \gamma \right] \ , \qquad n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{95}$$

Ο συντομότερος τρόπος να δειχθεί η παραπάνω κβάντωση της σταθεράς E, είναι να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε πολυωνυμική λύση της μορφής $\Psi = a_k x^k + \cdots + a_m x^m$, τότε:

- ο όρος ανώτερης τάξης θα ικανοποιεί την

  $$\left(a x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \gamma x \frac{d}{dx} + E \right) x^k = 0 \implies ak(k-1) + \gamma k + E = 0 \ ,$$

  με λύση

  $$k = \frac{a - \gamma \pm \sqrt{(a-\gamma)^2 - 4aE}}{2a} \ .$$

- Αντίστοιχα για τον όρο κατώτερης τάξης θα έχουμε

  $$c \frac{d^2}{dx^2} x^m = 0 \quad \implies \quad m = 0 \ .$$

- Επειδή η λύση είναι πολυωνυμική θα πρέπει η διαφορά $k - m$ να είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος $n = 0, 1, \ldots$. Επιλύοντας για την E βρίσκουμε την (95).

Πολυώνυμα *Jacobi*

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ του Jacobi

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)y' + Ey = 0 \ , \quad x \in [-1,1] \ . \qquad (96)$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = 1 - x^2 \ , \quad L(x) = \beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x \ ,$$

απ′ τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις για την ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = (1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta} \ , \quad h(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \ ,$$

με τις οποίες η (96) γράφεται στη μορφή Sturm–Liouville. Για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις πρέπει $\alpha, \beta > -1$ για να συγκλίνει το $\int_{-1}^{1} dx \ h(x)$ και

$$E = E_n = n(n+\alpha+\beta+1) \ , \qquad n = 0, 1, \ldots \ .$$

Ορισμός των πολυωνύμων Jacobi απ' τον τύπο του Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] . \qquad (97)$$

- Χρησιμοποιώντας τον βρίσκουμε ότι

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n+\alpha \\ m \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} n+\beta \\ n-m \end{array}\right)(x-1)^{n-m}(x+1)^m .$$

- Με τον παραπάνω ορισμό έχουμε τη σχέση ορθοκανονικότητας

$$\int_{-1}^{1} dx(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x) = \mathcal{N}_n\ \delta_{n,m} ,$$

με τη σταθερά κανονικοποίησης

$$\mathcal{N}_n = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)\Gamma(\beta+1+n)2^{\alpha+\beta+1+n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+1+n)(\alpha+\beta+2+2n)} .$$

Μερικές ιδιότητες είναι:

- Ιδιότητα παραγώγισης

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1+k)}{2^k \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x) \ ,$$

  δηλαδή η παράγωγος μεταβιβάζει σε επόμενη σειρά $((\alpha,\beta) \to (\alpha+k,\beta+k))$ πολυωνύμων ενώ ταυτόχρονα υποβιβάζει την τάξη τους $(n \to n-k)$.

- Αναδρομική σχέση στην τάξη n

$$\begin{aligned}
&2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\
&= [(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2)+(2n+\alpha+\beta)_3 x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\
&-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),
\end{aligned}$$

  όπου $(m)_n$ είναι το σύμβολο Polheimer

$$(m)_n = m(m+1)\dots(m+n-1) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} \ .$$

- Αναδρομική σχέση στους δείκτες (α, β)

$$P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) = \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{1-x} \ .$$

- Με ανάπτυξη του αριστερού μέλους και χρήση του ορισμού αποδεικνύεται ότι η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-t+R)^{-\alpha}(1+t+R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n \ , \tag{98}$$

όπου

$$R = \sqrt{1-2xt+t^2} \ .$$

- Εύκολα αποδεικνύεται ο μετασχηματισμός αρτιότητας

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x) \ . \tag{99}$$

- Τα πολυώνυμα Legendre είναι ειδική περίπτωση των πολυωνύμων Jacobi όταν $\alpha = \beta = 0$, δηλαδή

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) \ .$$

Όλες οι σχέσεις για τα πολυώνυμα Legendre προκύπτουν από αντίστοιχες των πολυωνύμων Jacobi [Άσκηση].

Πολυώνυμα Gegenbauer

Αυτά αποτελούν ειδική περίπτωση των πολυωνύμων Jacobi με $\alpha = \beta \to \alpha - 1/2$ και ορίζονται ως

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\alpha + n)\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha + n + 1/2)} \; P_n^{(\alpha-1/2,\alpha-1/2)}(x) \ . \qquad (100)$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ

$$(1 - x^2)y'' - (2\alpha + 1)xy' + Ey = 0 \ , \quad x \in [-1, 1] \ . \qquad (101)$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = 1 - x^2 \ , \quad L(x) = -(2\alpha + 1)x \ ,$$

απ′ τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις για την ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = (1 - x^2)^{\alpha+1/2} \ , \quad h(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2} \ .$$

- Για πολυωνυμικές λύσεις πρέπει $\alpha > -1/2$ ώστε να συγκλίνει το $\int_{-1}^{1} dx\ h(x)$ και

$$E = E_n = n(n+2\alpha) \ , \qquad n = 0, 1, \dots \ .$$

- Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\frac{1}{(1-2tx+t^2)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x) t^n \ . \tag{102}$$

  - Για $\alpha = 1/2$ παίρνουμε τα πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$.
  - Για $\alpha = 1$ παίρνουμε τα πολυώνυμα Chebyshev 2ου είδους $U_n(x)$.

- Απ΄ τη γεννήτρια συνάρτηση έχουμε για το μετασχηματισμό αρτιότητας

$$C_n^{(\alpha)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\alpha)}(x) \ . \tag{103}$$

- Ιδιότητα για την παράγωγο

$$C_n^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{2\alpha}\frac{dC_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{dx} \ ,$$

δηλαδή η παράγωγος δίνει μας μεταβιβάζει σε επόμενη σειρά ($\alpha \to \alpha+1$) πολυωνύμων ενώ ταυτόχρονα υποβιβάζει την τάξη τους ($n+1 \to n$).

- Πιό γενικά, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$C_n^{(\alpha+m)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2^m\Gamma(\alpha+m)}\frac{d^m C_{n+m}^{(\alpha)}(x)}{dx^m} \ ,$$

- Αναδρομική σχέση

$$(n+1)C_{n+1}^{(\alpha)}(x) = 2(n+\alpha)xC_n^{(\alpha)}(x) - (n+2\alpha-1)C_{n-1}^{(\alpha)}(x) \ .$$

Αυτή μπορεί να αποδειχθεί με χρήση της γεννήτριας συνάρτησης [Άσκηση].

Μερικά πολυώνυμα Gegenbauer

$$\begin{aligned}
C_1^{(\alpha)}(x) &= 2\alpha x \ , \\
C_2^{(\alpha)}(x) &= 2\alpha(\alpha+1)x^2 - \alpha \ , \\
C_3^{(\alpha)}(x) &= \frac{4}{3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)x^3 - 2\alpha(\alpha+1)x \ , \\
C_4^{(\alpha)}(x) &= \frac{2}{3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)x^4 - 2\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)x^2 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1) \ .
\end{aligned}$$

Πολυώνυμα *Hermite*

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ του Hermite

$$y'' - 2xy' + Ey = 0 \ , \qquad -\infty < x < \infty. \tag{104}$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = 1 \ , \quad L(x) = -2x \ ,$$

απ' τις οποίες υπολογίζουμε τις συαρτήσεις της ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = h(x) = e^{-2\int dx x} = e^{-x^2} \ .$$

Για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις πρέπει

$$E = E_n = 2n \ , \qquad n = 0, 1, \ldots \ .$$

Το πολυώνυμα Hermite παίζουν κεντρικό ρόλο στη μελέτη του αρμονικού ταλαντωτή στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής.

Τύπος του Rodrigues που ορίζει τα πολυώνυμα Hermite είναι

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) . \tag{105}$$

Χρησιμοποιώντας τον βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m 2^{n-2m} \frac{n!}{m!(n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= 2^n x^n - 2^{n-2} n(n-1) x^{n-2} + \dots \ . \end{aligned} \tag{106}$$

Με τον παραπάνω ορισμό έχουμε από τη γενική θεωρία για την σταθερά κανονικοποίησης

$$\mathcal{N}_n = \sqrt{\pi} 2^n n! \ ,$$

στις σχέσεις ορθοκανονικότητας

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \ \delta_{n,m} \tag{107}$$

και πληρότητας

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y)}{\sqrt{\pi} 2^n n!} = e^{x^2} \delta(x-y) \ . \tag{108}$$

Μιά συνάρτηση θα αναπτύσσεται ως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \implies a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-x^2} f(x) H_n(x) \ . \tag{109}$$

Μετασχηματισμός αρτιότητας: Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \ . \tag{110}$$

Γεννήτρια συνάρτηση: Με ανάπτυξη του αριστερού μέλους και χρήση του ορισμού αποδεικνύεται ότι

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \ . \tag{111}$$

Αναδρομικές σχέσεις: Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης

$$
\begin{aligned}
H_n'(x) &= 2nH_{n-1}(x) \ , \\
2xH_n(x) &= H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) \ .
\end{aligned}
$$

Μπορεί να επαληθευθεί η 2η εκ των άνω σχέσεων, χρησιμοποιώντας την (89) και την ανάπτυξη (106) [Άσκηση].

Μερικά πολυώνυμα Hermite

$$
\begin{aligned}
H_1(x) &= 2x \ , \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2 \ , \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x \ , \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \ .
\end{aligned}
$$

Οι ιδιότητες που αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούν να ενεγχθούν με χρήση αυτών των πολυωνύμων.

Πολυώνυμα *Laguerre*

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τη ΔΕ του Laguerre

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + Ey = 0 \ , \qquad 0 \leqslant x < \infty. \tag{112}$$

Σύμφωνα με τη γενική θεωρία

$$Q(x) = x \ , \quad L(x) = \alpha + 1 - x \ ,$$

απ΄ τις οποίες υπολογίζουμε τις συναρτήσεις της ΔΕ Sturm–Liouville

$$f(x) = x^{\alpha+1} e^{-x} \ , \qquad h(x) = x^{\alpha} e^{-x} \ .$$

Για να έχουμε πολυωνυμικές λύσεις πρέπει $\alpha > -1$ καθώς και

$$E = E_n = n \ , \qquad n = 0, 1, \ldots \ .$$

Το πολυώνυμα Laguerre παίζουν κεντρικό ρόλο στη μελέτη του ατόμου του υδρογόνου στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής.

- Τύπος του Rodrigues που ορίζει τα πολυώνυμα Laguerre είναι

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right) . \tag{113}$$

- Χρησιμοποιώντας τον βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n+\alpha)!}{(n-m)!(m+\alpha)!} \ \frac{x^m}{m!} \ . \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \ x^n - (-1)^n \frac{n+\alpha}{(n-1)!} \ x^{n-1} \\ &\quad +(-1)^n \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)}{2(n-2)!} \ x^{n-2} + \dots \ . \end{aligned} \tag{114}$$

- Έχουμε απ' τη γενική θεωρία για τη σταθερά κανονικοποίησης

$$\mathcal{N}_n = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)} \ .$$

- Σχέση ορθοκανονικότητας

$$\int_0^\infty dx \ x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)} \ \delta_{n,m} \tag{115}$$

- Σχέση πληρότητας

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y) = x^{-\alpha} e^x \delta(x-y) \ . \qquad (116)$$

- Μιά συνάρτηση θα αναπτύσσεται ως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^\alpha(x) \ , \qquad (117)$$

με τους συντελεστές να δίνονται απ' την

$$a_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \int_0^\infty dx\ x^\alpha e^{-x} f(x) L_n^\alpha(x) \ .$$

- Με ανάπτυξη του αριστερού μέλους και χρήση του ορισμού αποδεικνύεται η γεννήτρια συνάρτηση

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(\frac{tx}{t-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n\ . \tag{118}$$

- Αναδρομικές σχέσεις: Με τη βοήθεια της γεννήτριας συνάρτησης μπορούν να δειχθούν οι

$$\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}-\frac{dL_{n+1}^{\alpha}(x)}{dx}=L_n^{\alpha}(x)\ ,$$
$$\frac{dL_n^{\alpha}(x)}{dx}=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)\ ,$$
$$xL_n^{\alpha}(x)=-(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x)+(2n+\alpha+1)L_n^{\alpha}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)\ .$$

  Ως [Άσκηση] επαληθεύστε την 3η των άνω σχέσεων, χρησιμοποιώντας την (89) και την ανάπτυξη (114).

- Σημειώνω επίσης την ενδιαφέρουσα αναδρομική σχέση

$$\sum_{m=0}^{n}L_m^{k}(x)=L_n^{k+1}(x)\ . \tag{119}$$

Οριακές περιπτώσεις: Ισχύουν τα ακόλουθα όρια για τα πολυώνυμα Laguerre:

Σχέση με τα πολυώνυμα Jacobi

$$L_n^\alpha(x) = \lim_{\beta\to\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - 2\frac{x}{\beta}\right) . \tag{120}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την ΔΕ Jacobi

$$(1-z^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)z)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0 .$$

- Αντικαθιστούμε $z = 1 - 2x/\beta$ διαιρούμε με β και παίρνουμε

  $$\left(x - \frac{x^2}{\beta}\right)y'' + \left(1 + \alpha - \frac{\alpha+2+\beta}{\beta}x\right)y' + \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{\beta}y = 0 ,$$

  όπου η παράγωγος είναι ως προς x.
- Στο όριο $\beta \to \infty$ αυτή γίνεται η (112) η ΔΕ των πολυωνύμων Lagguerre. Επίσης $0 \leqslant x < \infty$.
- Άρα η σχέση (120) ισχύει εκτός ίσως από μιά πολλαπλασιαστική σταθερά.

- Θεωρούμε τον τύπο του Rodrigues των πολυωνύμων Jacobi
$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{\alpha+n}(1+z)^{\beta+n}\right] .$$
Αντικαθιστώντας $z = 1 - 2x/\beta$ και χρησιμοποιώντας ότι
$$\lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{\beta+n} = e^{-x} , \qquad \lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{-\beta} = e^{x} ,$$
βρισκουμε τον τύπο του Rodrigues των πολυωνύμων Laguerre (113) και αποδεικνύεται η (120).

Σχέση με τις συναρτήσεις Bessel

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\alpha}L_n^{\alpha}\left(\frac{x}{n}\right)\right] = x^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{x}) . \tag{121}$$

Απόδειξη: Αντικαθιστούμε στην (114) $x \to x/n$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling
$$(n+a)! \simeq e^{-n}n^{n+a} ,$$
βρίσκουμε ότι για $n \gg 1$
$$L_n^{\alpha}\left(\frac{x}{n}\right) \simeq n^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{(m+\alpha)!m!} = n^{\alpha}x^{-\frac{\alpha}{2}}J_\alpha(2\sqrt{x}) .$$

Μερικά πολυώνυμα Laguerre:

$$\begin{aligned}
L_1^{(\alpha)}(x) &= 1+\alpha-x\ , \\
L_2^{(\alpha)}(x) &= \frac{x^2}{2}-(\alpha+2)\ x+\frac{\alpha^2+3\alpha+2}{2}\ , \\
L_3^{(\alpha)}(x) &= -\frac{x^3}{6}+\frac{\alpha+3}{2}\ x^2-\frac{\alpha^2+5\alpha+6}{2}\ x+\frac{\alpha^3+6\alpha^2+11\alpha+6}{6}\ .
\end{aligned}$$

Πολυώνυμα Chebyshev

Τα πολυώνυμα Chebyshev 1ου είδους $T_n(x)$ είναι ειδική περίπτωση των πολυωνύμων Jacobi με $\alpha = \beta = -1/2$

$$T_n(x) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) \ . \qquad (122)$$

- Η αντίστοιχη ΔΕ εξίσωση είναι

  $$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \ , \quad n = 0, 1, \dots \ , \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \ ,$$

  απ΄ την οποία εύκολα βρίσκουμε τις συναρτήσεις

  $$f(x) = (1-x^2)^{1/2} \ , \qquad h(x) = (1-x^2)^{-1/2} \ , \qquad (123)$$

  της ισοδύναμης Sturm–Liouville ΔΕ.

- Η παραπάνω ΔΕ έχει ως 2η ανεξάρτητη λύση τις συναρτήσεις $\sqrt{1-x^2}U_n(x)$, όπου $U_n(x)$ τα πολυώνυμα Chebyshev 2ου είδους.
- Τα πολυώνυμα $U_n(x)$ υπακούουν επίσης τη ΔΕ

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0\ , \quad n = 0, 1, \dots\ , \quad -1 \leqslant x \leqslant 1\ , \tag{124}$$

απ′ την οποία εύκολα βρίσκουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = (1-x^2)^{3/2}\ , \qquad h(x) = (1-x^2)^{1/2}\ . \tag{125}$$

της ισοδύναμης Sturm–Liouville ΔΕ.

Τύπος του Rodriguez: Έχουμε

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right] \tag{126}$$

και

$$U_n(x) = (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{1-x^2}(2n+1)!!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} \right] \ . \tag{127}$$

Γεννήτριες συναρτήσεις: Έχουμε

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n \ , \tag{128}$$

και

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n \ . \tag{129}$$

Μερικά από τα πολυώνυμα Chebyshev είναι:

$$T_0(x) = 1 \ , \quad T_1(x) = x \ , \quad T_2(x) = -1 + 2x^2 \ , \quad T_3(x) = -3x + 4x^3 \ ,$$
$$U_0(x) = 1 \ , \quad U_1(x) = 2x \ , \quad U_2(x) = -1 + 4x^2 \ , \quad U_3(x) = -4x + 8x^3$$

Σχέση με τριγωνομετρικές συναρτήσεις: Ορίζουμε τη γωνία

$$\theta = \cos^{-1} x \ , \qquad \theta \in [0, \pi] \ .$$

- Για τα πολυώνυμα Chebyshev 1ου είδους ισχύει ότι

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n\theta) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \binom{n}{2m} x^{n-2m}(1-x^2)^m \ . \\ &= 2^{n-1}x^n - 2^{n-3}nx^{n-2} + \dots \ . \end{aligned} \tag{130}$$

- Με χρήση στοιχειώδους τριγωνομετρίας αποδεικνύεται ότι

$$T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x)) = T_{nm}(x) = T_{mn}(x) \ . \tag{131}$$

- Παρομοίως για πολυώνυμα Chebyshev 2ου είδους ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
U_n(x) &= \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \begin{pmatrix} n+1 \\ 2m+1 \end{pmatrix} x^{n-2m}(1-x^2)^m \\
&= 2^n x^n - 2^{n-2}(n-1)x^{n-2} + \dots \ . \qquad (132)
\end{aligned}
$$

- Επειδή

$$
\theta(x) = \cos^{-1} x \quad \Longrightarrow \quad \theta'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sin\theta} \ ,
$$

  έχουμε την ταυτότητα

$$
T'_n(x) = nU_{n-1}(x) \ , \qquad U'_n(x) = 2C^{(2)}_{n-1}(x) \ , \qquad (133)
$$

  όπου $C^{(\alpha)}_n(x)$ το πολυώνυμο Gegenbauer.

Η συμπλήρωση των αναγκαίων βημάτων προς απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων αφήνεται ως [Άσκηση].

Αναδρομικές σχέσεις: Είτε μέσω της γεννήτριας συνάρτησης, είτε με την παραπάνω ανάπτυξη και τη γενική θεωρία

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) \ ,$$

με μια ίδια σχέση για για τα $U_n(x)$ [Άσκηση]. Επίσης από τριγωνομετρικές ταυτότητες βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T_n(x) &= U_n(x) - xU_{n-1}(x) \ , \\ (1-x^2)U_{n-1}(x) &= xT_n(x) - T_{n+1}(x) \ . \end{aligned}$$

Σταθερά κανονικοποίησης: Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή $\theta = \cos^{-1} x$ βρίσκουμε ότι

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) = \mathcal{N}_n \, \delta_{n,m} \ , \qquad \mathcal{N}_0 = \pi \ , \quad \mathcal{N}_{n\geqslant 1} = \frac{\pi}{2}$$

και

$$\int_{-1}^{1} dx \, \sqrt{1-x^2} \, U_n(x) U_m(x) = \mathcal{N}_n \, \delta_{n,m} \ , \qquad \mathcal{N}_n = \frac{\pi}{2} \ .$$

Εκτός απ΄ τη χρήση τους σε θεωρητικά προβλήματα, τα πολυώνυμα Chebyshev είναι χρησιμότατα και στην ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων γιατί έχουν εν γένει γρηγορότερες ιδιότητες σύγκλισης απ΄ τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Υπεργεωμετρική εξίσωση και υπεργεωμετρική συνάρτηση

Τα παραπάνω ορθογώνια πολυώνυμα και οι ΔΕ που υπακούουν αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της υπεργεωμετρικής εξίσωσης

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \ , \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \tag{134}$$

και των λύσεων της

- Απ' τη γενική θεωρία των ΔΕ 2ης τάξης αυτή έχει τρία συνήθη ανώμαλα σημεία στα $x = 0, 1$ και ∞.
  Απόδειξη: Η ΔΕ (134) είναι της μορφής

  $$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \ .$$

  με

  $$p(x) = \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)} \ , \qquad q(x) = -\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}$$

- Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \gamma \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 0 \ ,$$
$$\lim_{x\to 1} (x-1)p(x) = \alpha+\beta+1-\gamma \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 1} (x-1)^2 q(x) = 0 \ ,$$
$$\lim_{x\to \infty} xp(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x\to \infty} x^2 q(x) = 0 \ ,$$

  που αποδεικνύουν το ζητούμενο.

Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά: Αναπτύσσοντας γύρω απ' το σημείο $x = 0$ σε δυναμοσειρά

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \tag{135}$$

παίρνουμε την αναδρομική σχέση [Άσκηση]

$$a_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} \ a_n .$$

- Επιλύοντάς τη [Άσκηση] βρίσκουμε τη 1η ανεξάρτητη λύση

$$y_1(x) = {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) \ , \tag{136}$$

όπου

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} x^n \ , \tag{137}$$

είναι η Υπεργεωμετρική συνάρτηση.

  - Η κανονικοποίηση είναι τέτοια ώστε

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1 \ .$$

  - Ισχύει η ιδιότητα συμμετρίας

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = {}_2F_1(\beta, \alpha, \gamma, x) \ .$$

Η 2η ανεξάρτητη λύση βρίσκεται με ανάπτυξη της μορφής

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ . \tag{138}$$

Αυτή μέσω της υπεργεωμετρικής συνάρτησης είναι

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \ . \tag{139}$$

Παρατηρήσεις:

- Οι χαρακτηριστικοί εκθέτες της υπεργεωμετρικής εξίσωσης στα σημεία $x = 0, 1$ και ∞ είναι: $(0, 1-\gamma)$, $(0, \gamma-\alpha-\beta)$ και (α, β), αντίστοιχα [Άσκηση].
- Αν είτε η παράμετρος α είτε η β ισούται με αρνητικό ακέραιο $-n$, η Υπεργεωμετρική συνάρτηση είναι απλά ένα πολυώνυμο τάξεως n.

  Συγκεκριμένες σχέσεις με τα ειδικά πολυώνυμα που έχουμε μελετήσει θα δοθούν αργότερα.
- Η παραπάνω λύση δεν ισχύει για όλες τις τιμές των σταθερών α, β και γ. Ήδη απ' τον ορισμό αν $\gamma = -n$, $n = 0, 1, \ldots$ η ανάπτυξη σε σειρά δεν είναι καλώς ορισμένη. Σημειώστε επίσης την ιδιότητα

  $$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} . $$

  Αν $\gamma = -n$ ή $\gamma - \alpha - \beta = -n$, $n = 0, 1, \ldots$, τότε η ανάπτυξη σε σειρά (137) δεν ισχύει.

Ολοκληρωτική αναπαράσταση: Μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 dt\ t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha} \ ,
$$
$$
\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\beta) > 0 \ , \qquad (140)
$$

καθώς και μια αντίστοιχη αναπαράσταση με $\alpha \longleftrightarrow \beta$.
Μετασχηματισμοί και αναλυτική επέκταση: Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ολοκληρωτική αναπαράσταση μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x) \ ,
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-b)}{}_2F_1(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x) \\
&+(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x) \ ,
\end{aligned}
$$

Αυτοί και άλλοι παρόμοιοι μετασχηματισμοί απεικονίζουν την περιοχή εντός του μοναδιαίου δίσκου στον εαυτό της.

Άλλοι μετασχηματισμοί όπως ο

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\ x^{-\alpha} \\
&\quad \times\ {}_2F_1(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1,1-1/x) \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\ x^{\alpha-\gamma} \\
&\quad \times\ {}_2F_1(\gamma-\alpha,1-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,1-1/x)
\end{aligned}
$$

απεικονίζουν το εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου στο εξωτερικό του και αντιστρόφως.
Οι παραπάνω σχέσεις είναι μετασχηματισμοί αναλυτικής επέκτασης.
Περιπτώσεις όπου $\gamma = \alpha + \beta + m$ ή $\beta = \alpha + m$, $m \in \mathbb{Z}$: Στις περιπτώσεις αυτές η Υπεργεωμετρική συνάρτηση δεν είναι πια αναλυτική στη γειτονιά του $x = 1$ και του $x = 0$ αλλά έχει μια καλώς ορισμένη έκφραση που δεν θα αποτυπώσουμε εδώ.

Απ' τα προηγούμενα είναι προφανές ότι οι λύσεις εξαρτώνται απ' τις σταθερές α, β και γ. Προσεκτική ανάλυση οδηγεί σε διάφορες περιπτώσεις:

- Ουδεμία απ' τις γ, $\gamma - \alpha - \beta$ και $\alpha - \beta$ είναι ακέραιος. Τότε οι δύο ανεξάρτητες λύσεις είναι:

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \chi, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) $$

  και

$$ \begin{aligned} & x^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \\ & \qquad = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x) \end{aligned} $$

- Μία εκ' των γ, $\gamma - \alpha - \beta$ και $\alpha - \beta$ είναι ακέραιος. Τότε μια εκ' των παραπάνω ανεξάρτητων λύσεων τερματίζεται και η αντίστοιχη λύση είναι της μορφής

$$ x^a (1-x)^b P_n(x) \ , \tag{141} $$

  όπου $P_n(x)$ πολυώνυμο βαθμού n.

Συρρέουσα υπεργεωμετρική εξίσωση και συνάρτηση

Η συρρέουσα υπεργεωμετρική εξίσωση

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 \ , \qquad \alpha, \gamma \in \mathbb{C} \ . \tag{142}$$

αποτελεί οριακή περίπτωση της υπεργεωμετρικής εξίσωσης στο όριο $\beta \to \infty$ ως εξής (οι λεπτομέρειες αφήνονται ως [Άσκηση]):

- Πρώτα στην υπεργεωμετρική εξίσωση

  $$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0 \ ,$$

  θέτουμε $z = x/\beta$.
- Μετά παίρνουμε το όριο $\beta \to \infty$.

Η ΔΕ (142) είναι της μορφής

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \ .$$

με

$$p(x) = \frac{\gamma - x}{x} \ , \qquad q(x) = -\frac{\alpha}{x}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \gamma \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 0 \ ,$$
$$\lim_{x\to \infty} xp(x) = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to \infty} x^2 q(x) = \infty \ (\text{στο μιγαδικό επίπεδο}) \ ,$$

που αποδεικνύουν ότι:

- Το $x = 0$ είναι σύνηθες ανώμαλο σημείο (με χαρακτηριστικούς εκθέτες $\rho = 0$ και $1 - \gamma$ [Άσκηση])
- Το $x = \infty$ είναι ουσιώδες ανωμαλό σημείο.

Λύσεις και συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση: Παίρνοντας το παραπάνω όριο $\beta \to \infty$ βρίσκουμε ότι το όριο την Υπεργεωμετρικής συνάρτησης είναι καλώς ορισμένο.
Απόδειξη: Απ΄ την αναπαράσταση σε σειρά της υπεργεωμετρικής συνάρτησης

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n \ , $$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling για $\beta \gg 1$

$$ \Gamma(\beta+n) \simeq e^{-\beta}\beta^{\beta+n} \ , $$

βρίσκουμε ότι στο όριο $\beta \to \infty$ παίρνουμε

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma,x) = \lim_{\beta\to\infty} {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)n!} x^n \qquad (143) $$

και εξ΄ ορισμού είναι η συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση.

- Η απειροσειρά εκφυλίζεται σε πολυώνυμο αν $a = -n, n = 0, 1, \ldots$.
- Οι ανεξάρτητες λύσεις της (142) είναι οι

$$y_1(x) = {}_1F_1(\alpha, \gamma, x) \ , \qquad y_2(x) = x^{1-\gamma}{}_1F_1(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) \ . \quad (144)$$

Ολοκληρωτική αναπαράσταση: Στο ίδιο όριο βρίσκουμε ότι

$$_1F_1(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 dt \ e^{xt} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \ . \quad (145)$$

Απόδειξη: Απ΄ τη σχέση

$$_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x/\beta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 dt \ t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1 - tx/\beta)^{-\beta} \ , \quad (146)$$

τον τύπο του Stirling και το όριο

$$\lim_{\beta \to \infty} (1 - tx/\beta)^{-\beta} = e^{xt} \ , \quad (147)$$

αποδεικνύεται η ζητούμενη.

Διάφορες συναρτησιακές σχέσεις:

- Απ΄ την ολοκληρωτική αναπαράσταση ή χρησιμοποιώντας το παραπάνω όριο

$$ {}_1F_1(\alpha,\gamma,x) = e^x\, {}_1F_1(\gamma-\alpha,\gamma,-x)\ , $$

η οποία συνδέει τις συμπεριφορές στα δύο άκρα της πραγματικής ευθείας.

- Επίσης απ΄ τη αναπαράσταση με σειρά βρίσκουμε

$$ \frac{d\, {}_1F_1(\alpha,\gamma,x)}{dx} = \frac{\alpha}{\gamma}\, {}_1F_1(\alpha+1,\gamma+1,x)\ . $$

Σχέσεις ειδικών και υπεργεωμετρικών συναρτήσεων

Οι διάφορες ειδικές συναρτήσεις και πολυώνυμα που έχουμε μελετήσουμε σχετίζονται με υπεργεωμετρικές συναρτήσεις:

- Πολυώνυμα Legendre

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right) .$$

- Συναρτήσεις Legendre 2ου είδους

$$Q_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}n!}{2^{n+1}\Gamma(n+3/2)} x^{-n-1}\ {}_2F_1\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{2n+3}{2}, \frac{1}{x^2}\right) .$$

- Πολυώνυμα Jacobi

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-1)^n\Gamma(n+1+\beta)}{n!\Gamma(1+\beta)} {}_2F_1\left(n+\alpha+\beta+1, -n, 1+\beta, \frac{1+x}{2}\right) . \\ &= \frac{(-1)^n\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\Gamma(1+\alpha)} {}_2F_1\left(n+\alpha+\beta+1, -n, 1+\alpha, \frac{1-x}{2}\right) . \end{aligned}$$

- Πολυώνυμα Gegenbauer

$$
\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha+n)}{n!\Gamma(2\alpha)}\ {}_2F_1\left(-n, 2\alpha+n, \alpha+1/2, \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \frac{2^n\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha)} x^n\ {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-\alpha-n, \frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}
$$

- Πολυώνυμα Hermite

$$
\begin{aligned}
H_{2n}(x) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\ {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right) \ , \\
H_{2n+1}(x) &= (-1)^n 2\frac{(2n+1)!}{n!} x\ {}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right) \ ,
\end{aligned}
$$

- Πολυώνυμα Laguerre

$$
L_n^{\alpha}(x) = \frac{(n+\alpha)!}{n!\alpha!}\ {}_1F_1(-n, \alpha+1, x) \ ,
$$

- Πολυώνυμα Chebyshev

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) \ .$$

Γενική παρατήρηση: Στις περιπτώσεις των πολυωνύμων (Legendre, Jacobi, Gegenbauer, Hermite, Laguerre και Chebyshev) η σταθερά α ή η β είναι πράγματι αρνητικός ακέραιος, όπως και πρέπει για να τερματίζεται η άπειρη σειρά.