

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,  
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,  
Αθήνα, 15784

Διαφορικές εξισώσεις

**Περιεχόμενα** (10 Νοεμβρίου 2020)

- ▶ Ορισμοί, ταξινόμηση
- ▶ Λύσεις σε κλειστή μορφή
- ▶ Λύσεις σε μορφή δυναμοσειράς
- ▶ Απλές προσεγγιστικές μέθοδοι
- ▶ Ενδεικτικά παραδείγματα

## Χρήσιμοι ορισμοί

- ▶ **Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (ΔΕ)**, τάξεως  $n$  ονομάζεται οποιαδήποτε αλγεβρική σχέση της μορφής

$$F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (1)$$

(με  $y^{(0)} = y$ ) μεταξύ μιας ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ , μιας εξαρτημένης μεταβλητής  $y(x)$  και παραγώγων αυτής.

- ▶ Η ΔΕ έχει **επιλυθεί ή ολοκληρωθεί** αν έχει βρεθεί η  $y = y(x)$  ή εν γένει η συναρτησιακή σχέση των  $x$  και  $y$ .
- ▶ Έστω ότι η ΔΕ μπορεί να γραφτεί σε **ρητή μορφή**, δηλαδή με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορεί να γραφτεί ως πολυώνυμο των  $x$  και  $y(x)$  και των παραγώγων:  
Αν  $y^{(n)}$  είναι η υψηλότερης τάξης παράγωγος στη ΔΕ, ο συντελεστής  $n$  ονομάζεται τάξη της ΔΕ.

- ▶ Η ΔΕ είναι **Γραμμική**  $n$ -οστής τάξεως, αν με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορεί να γραφτεί ως πολυώνυμο ως εξής

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(i)} = Q(x) , \quad (2)$$

και **μή Γραμμική** σε κάθε άλλη περίπτωση.

- ▶ Αν  $Q(x) = 0$ , τότε η ΔΕ λέγεται **ομογενής** γραμμική ΔΕ.

## Απλές τεχνικές επίλυσης

Αν για μία ΔΕ 1ης τάξης της μορφής

$$y'(x)B(x, y) + A(x, y) = 0 \Leftrightarrow A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

ισχύει ότι

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (4)$$

τότε η εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί.

- ▶ Ίσως χρειασθεί να πολλαπλασιάσουμε την (3) με έναν **ολοκληρωτικό παράγοντα**. Εύχρηστοι κανόνες [Άσκηση]:

- ▶ Αν

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = Bf(x) \text{ ή } Af(y), \quad (5)$$

ο ολοκληρωτικός παράγοντας εξαρτάται απ' το  $x$  ή το  $y$ .

- ▶ Αν

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = (xA - yB)f(xy), \quad (6)$$

τότε ο ολοκληρωτικός παράγοντας εξαρτάται απ' το  $xy$ .

- ▶ Θεωρείστε την 1ης τάξεως ΔΕ

$$y' + f(x)y = g(x) . \quad (7)$$

Σ' αυτήν τη περίπτωση ο ολοκληρωτικός παράγων είναι

$$\lambda(x) = e^{\int dx f(x)} .$$

Τότε η λύση της (7) είναι

$$y(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \left( \int dx g(x)\lambda(x) + C \right) . \quad (8)$$

- ▶ Μερικές φορές χρειάζεται ένας μετασχηματισμός για να γραμμικοποιηθεί μια ΔΕ. Π.χ η εξίσωση Bernoulli

$$y' + f(x)y = g(x)y^n , \quad (9)$$

γραμμικοποιείται αλλάζοντας μεταβλητή ως  $u = y^{1-n}$ . Τότε παίρνουμε μια ΔΕ της μορφής (7) με

$$f(x) \rightarrow (1-n)f(x) , \quad g(x) \rightarrow (1-n)g(x) . \quad (10)$$

- ▶ Μια συνάρτηση  $n$  μεταβλητών  $f(x)$  ονομάζεται **ομογενής βαθμού  $r$**  αν

$$f(ax) = a^r f(x) . \quad (11)$$

- ▶ Μια ΔΕ της μορφής (3) στην οποία οι συναρτήσεις  $A$  και  $B$  είναι ομογενής του ίδιου βαθμού ονομάζεται **ομογενής ΔΕ**.
- ▶ Αν αντικαταστήσουμε

$$y(x) = xu(x)$$

και χρησιμοποιήσουμε ότι

$$A(x, xu) = x^r A(1, u) , \quad B(x, xu) = x^r B(1, u) ,$$

παίρνουμε την

$$\frac{du}{dt} = -u - \frac{A(1, u)}{B(1, u)} , \quad x = e^t , \quad (12)$$

που είναι 1ης τάξης μη γραμμική, εν γένει, ΔΕ.

- Μια γενίκευση είναι η **ισοβαρής ΔΕ** αν

$$A(ax, a^m y) = a^r A(x, y), \quad B(ax, a^m y) = a^{r-m+1} B(x, y). \quad (13)$$

- Αντικαθιστώντας

$$y = x^m u,$$

και χρησιμοποιώντας ότι

$$A(x, x^m u) = x^r A(1, u), \quad B(x, x^m y) = x^{r-m+1} B(1, u),$$

παίρνουμε την

$$\frac{du}{dt} = -mu - \frac{A(1, u)}{B(1, u)}, \quad x = e^t, \quad (14)$$

που είναι 1ης τάξης μη γραμμική, εν γένει, ΔΕ.

Ψάχνοντας για όλες τις λύσεις μιας ΔΕ πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ώστε να μην χάσουμε τις **μή προφανείς** εξ' αυτών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η **εξίσωση Clairaut**

$$y - xy' = f(y') . \quad (15)$$

- ▶ Αν την παραγωγίσουμε έχουμε

$$y''[f'(y') + x] = 0 .$$

- ▶ Η πρώτη δυνατότητα

$$y'' = 0 \implies y = ax + f(a) , \quad (16)$$

όπου  $a$  είναι σταθερά ολοκλήρωσης και όπου η δεύτερη τέτοια σταθερά προσδιορίστηκε αντικαθιστώντας τη λύση στην (15).



- ▶ Μια δεύτερη απομονωμένη λύση βγαίνει αν

$$f'(y') + x = 0 . \quad (17)$$

Απαλοίφοντας απ' αυτή και την (15) την  $y'$ , βρίσκουμε μια απομονωμένη λύση με μη αυθαίρετες σταθερές.

- ▶ Ως παράδειγμα θεωρούμε την  $f(z) = z^2$  οπότε έχουμε να επιλύσουμε την

$$y - xy' = y'^2 .$$

- ▶ Η λύση που αντιστοιχεί στην (16) είναι

$$y(x) = ax + a^2 .$$

- ▶ Απ' την (17) έχουμε ότι  $y' = -x/2$ , οπότε απ' την (15) η απομονωμένη λύση είναι η

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} .$$

Σχόλια για ΔΕ 2ης τάξης

- ▶ Η ΔΕ 2ης τάξης της μορφής

$$y'' = f(x, y'), \quad (18)$$

με τον μετασχηματισμό  $u = y'$ , υποβιβάζεται σε 1ης τάξης

$$u' = f(x, u).$$

- ▶ Πιο σύνθετες είναι οι περιπτώσεις ΔΕ 2ης τάξης της μορφής

$$y'' = f(y, y'). \quad (19)$$

Υποβιβάζονται σε 1ης τάξης με το μετασχηματισμό  $u = y'$ . Η εξάρτηση απ' το  $x$  είναι μέσω του  $y$  και έχουμε

$$\frac{du}{dx} = f(y, u) = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}.$$

Οπότε

$$u \frac{du}{dy} = f(y, u).$$

- Θεωρούμε τη γραμμική ΔΕ 2ης τάξης

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \forall x. \quad (20)$$

Αλλάζοντας μεταβλητή ως

$$z = \int dx q^{1/2}(x),$$

αυτή μετασχηματίζεται στην

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{q'(x) + 2p(x)q(x)}{2q^{3/2}(x)} \frac{dy}{dz} + y = 0.$$

Άρα αν

$$q'(x) + 2p(x)q(x) = \text{σταθερά} \times q^{3/2}(x),$$

τότε παίρνουμε μια ΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Π.χ. Η παραπάνω σχέση επαληθεύεται αν  $p(x) = 2/x$  και  $q(x) = 1/x^2$ .

- ▶ Θεωρούμε τη μη ομογενή γραμμική ΔΕ 2ης τάξης

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = \phi(x) . \quad (21)$$

Αλλάζοντας μεταβλητή ως

$$y(x) = u(x)p(x) ,$$

παίρνουμε

$$u'' + \left(2\frac{p'}{p} + f\right) u' + \frac{p'' + fp' + gp}{p} u = \frac{\phi}{p} .$$

- ▶ Αν  $p(x)$  είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης στην (21), τότε ο τελευταίος όρος στο αριστερό μέλος υποβιβάζοντας την τάξη της εξίσωσης, σε 1ης τάξης στην  $u'$ .
- ▶ Αν εκλέξουμε

$$p(x) = e^{-\frac{1}{2} \int dx f(x)} ,$$

ο όρος  $u'$  απαλοίφεται και έχουμε εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα εξαρτόμενη απ' το  $x$ , καθώς και εξωτερική δύναμη. Αν αυτή μεταβάλλεται αργά μπορούμε να εφαρμόσουμε προσεγγιστικές μεθόδους.

ΔΕ 2ης τάξης και εξίσωση του *Schrödinger*

- ▶ Στην **Κβαντική Μηχανική** η μονοδιάστατη εξίσωση του *Schrödinger* για **στατικά δυναμικά** παίρνει τη μορφή

$$-\frac{d^2\Psi}{dz^2} + V\Psi = E\Psi, \quad (22)$$

Απ' αυτήν μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τη **μορφή της λύσης** και του **ενεργειακού φάσματος**  $E$  ακόμα και αν δεν τη λύσουμε επακριβώς.

- ▶ Με κατάλληλους μετασχηματισμούς η γενική μορφή κάθε 2ης τάξης ΔΕ γράφεται ως

$$\frac{d}{dx} \left( f \frac{d\Phi}{dx} \right) + (Eh + p)\Phi = 0, \quad (23)$$

όπου  $f$ ,  $h$  και  $p$  είναι συναρτήσεις του  $x$  και  $E$  σταθερά,

- ▶ Ορίζουμε

$$F = fh, \quad H = \frac{f}{h}$$

και αλλάζουμε μεταβλητές ως

$$dx = H^{1/2} dz, \quad \Phi = F^{-1/4} \Psi.$$

- ▶ Η (23) μετασχηματίζεται στην εξίσωση του Schrödinger (22) με δυναμικό

$$V = -\frac{p}{h} + F^{-1/4} \frac{d^2 F^{1/4}}{dz^2} = -\frac{p}{h} + \frac{H^{1/2}}{F^{1/4}} \frac{d}{dx} \left( H^{1/2} \frac{d}{dx} F^{1/4} \right)$$

και ενέργεια  $E$ . Το δυναμικό μπορεί να εκφρασθεί άμεσα ως συνάρτηση του  $z$  μόνο αν η  $\Delta E$

$$\frac{dx}{dz} = H^{1/2}(x),$$

μπορεί να επιλυθεί και η λύσης της να γραφτεί ως  $x = x(z)$ .

Γραμμικές ομογενείς ΔΕ  $n$ -οστής τάξης

Στη Φυσική γραμμικές ΔΕ της μορφής (2) παίζουν πρωτεύοντα ρόλο για την κατανόηση πραγματικών συστημάτων ή και ως πρώτη προσέγγιση στην αντιμετώπιση μή γραμμικών προβλημάτων. Εξετάζουμε πρώτα την ομογενή εξίσωση

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i}(x) \frac{d^i y}{dx^i} = 0, \quad (24)$$

- ▶ Υποθέτουμε ότι  $a_0(x) \neq 0$  ταυτοτικά, άρα μπορούμε να θέσουμε  $a_0(x) = 1$ .
- ▶ Η λύση γραμμικών ΔΕ είναι μοναδική για ομαλές αρχικές συνθήκες για την  $y$  και τις παραγώγους της έως τάξης  $n - 1$ .

- ▶ Η πιο γενική λύση της (24) είναι ο γραμμικός συνδυασμός  $n$  γραμμικώς ανεξαρτήτων λύσεων  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Δηλαδή

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i . \quad (25)$$

Οι σταθερές  $c_i$  προσδιορίζονται απ' τις αρχικές συνθήκες.

- ▶ Σημαντικό ρόλο στην κατανόηση γραμμικών ΔΕ παίζει η **Wronskian**. Για  $n$  συναρτήσεις  $y_i(x)$ , είναι η ορίζουσα

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} . \quad (26)$$



- ▶ Κάνοντας χρήση κανόνων παραγώγισης οριζουσών αποδεικνύεται ότι αν οι  $y_i$  επιλύουν την (24) ισχύει ότι

$$W(x) = W_0 e^{-\int a_1(x) dx} . \quad (27)$$

που είναι το **θεώρημα του Liouville**.

- ▶ Στην πράξη η σταθερά  $W_0$  προσδιορίζεται απ' την ορίζουσα σε κάποια ασυμπτωτική περιοχή, όπου ο υπολογισμός της είναι εύκολος.
- ▶ Αν οποιεσδήποτε απ' τις  $y_i$  είναι γραμμικώς εξαρτημένες τότε  $W = 0$ . Επίσης, αν οι  $y_i$  είναι λύσεις της γραμμικής ΔΕ (24) και  $W = 0$ , τότε αυτές είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

- ▶ Εφαρμογή των παραπάνω σε 2ης τάξης ομογενής ΔΕ είναι ότι απ' τον ορισμό και το θεώρημα του Liouville έχουμε ότι

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' \sim e^{-\int a_1(x) dx} . \quad (28)$$

Άν έχουμε βρεί μια λύση (π.χ. την  $y_1$ ) αμέσως με απλή ολοκλήρωση βρίσκουμε και την δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση (την  $y_2$ ). Το αποτέλεσμα είναι

$$y_2(x) \sim y_1(x) \int^x dx' \frac{e^{-\int^{x'} a_1(x'') dx''}}{y_1^2(x')} \quad (29)$$

Γραμμικές μη ομογενείς ΔΕ  $n$ -οστής τάξης

Για την πιο γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i}(x) \frac{d^i y}{dx^i} = Q(x) , \quad (30)$$

προκύπτει αν απλώς προσθέτουμε μια μερική λύση της  $y_p(x)$  στη γενική λύση της ομογενούς με  $Q(x) = 0$ .

- ▶ Η πιο γενική και ασφαλής μέθοδος είναι η μέθοδος των **μεταβαλλόμενων παραμέτρων**. Γράφουμε

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) y_i(x) , \quad (31)$$

όπου  $y_i(x)$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Ό σκοπός είναι να προσδιορίσουμε τους **μή σταθερούς** συντελεστές  $v_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- ▶ Αντικαθιστώντας στην (30) βρίσκουμε τελικά το σύστημα

$$\begin{aligned}
 v'_1 y_1 + v'_2 y_2 + \cdots + v'_n y_n &= 0, \\
 v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 + \cdots + v'_n y'_n &= 0, \\
 &\vdots \\
 v'_1 y_1^{(n-2)} + v'_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + v'_n y_n^{(n-2)} &= 0, \\
 v'_1 y_1^{(n-1)} + v'_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + v'_n y_n^{(n-1)} &= Q(x),
 \end{aligned} \tag{32}$$

Το σύστημα για τις  $v'_i$  έχει μοναδική λύση γιατί η Wronskian του συστήματος  $W \neq 0$ .

- ▶ Η μέθοδος αυτή συνήθως απαιτεί αρκετές αλγεβρικές πράξεις και τελικά  $n$  απλές ολοκληρώσεις. Για αυτό, όπως θα δούμε, για γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές  $a_i$  έχουν αναπτυχθεί άλλες μέθοδοι.

Γραμμικές ΔΕ  $n$ -οστής τάξης με σταθερούς συντελεστές

- ▶ Αν οι συντελεστές  $a_i(x)$  της ομογενούς ΔΕ (24) είναι **σταθερές**, τότε η γενική λύση της βρίσκεται αντικαθιστώντας την

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{m_i x} \quad (33)$$

και προσδιορίζοντας τα  $m_i$  ως λύσεις της

$$\sum_{i=1}^n a_{n-i} m^i = 0 . \quad (34)$$

- ▶ Το παραπάνω είναι σωστό αν **όλες οι λύσεις είναι διαφορετικές**. Αν μία λύση, π.χ. η  $m_1$ , εμφανίζεται  $k \geq 2$  φορές τότε η (33) δεν είναι σωστή γιατί περιέχει μόνο  $n - k + 1 < n$  γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις.

- ▶ Παίρνοντας κατάλληλα όρια, κατά τα οποία οι ρίζες αυτές γίνονται τελικά ίσες, ότι τότε αντίστοιχοι  $k$  όροι στην (33) αντικαθίστανται από το

$$\left( \sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i \right) e^{m_1 x} . \quad (35)$$

**Απόδειξη:** Ας θεωρήσουμε την απλούστερη των περιπτώσεων με  $k = 2$ . Ας υποθέσουμε ότι αρχικά οι αντίστοιχες ρίζες είναι διαφορετικές. Ο σχετικός όρος στη λύση είναι

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} .$$

- ▶ Έστω ότι  $m_2 = m_1 + \epsilon$ . Αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor για μικρό  $\epsilon$

$$(c_1 + c_2) e^{m_1 x} + c_2 x \epsilon e^{m_1 x} + \mathcal{O}(\epsilon^2) .$$

- ▶ Αν θέσουμε  $c_1 + c_2 \rightarrow c_1$  και κρατήσουμε σταθερό  $c_2 \epsilon \rightarrow c_2$  στο όριο  $\epsilon \rightarrow 0$  παίρνουμε

$$(c_1 + c_2 x) e^{m_1 x} .$$

**Άλλες μέθοδοι εύρεσης της μερικής λύσης:** Για να βρούμε τη μερική λύση  $y_p$  μπορούμε φυσικά να χρησιμοποιήσουμε τη γενική μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Σε πολλές περιπτώσεις όμως είναι πρακτικότερη η χρήση άλλων πιά εύχρηστων μεθόδων ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης  $Q(x)$  στην (30).

- ▶ Αν

$$Q(x) = e^{ax} p_N(x) (c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x) , \quad (36)$$

όπου  $p_N(x)$  πολυώνυμο  $N$ -οστού βαθμού, δοκιμάζουμε τη λύση

$$y_p = e^{ax} \sin \beta x \sum_{i=0}^N b_i x^i + e^{ax} \cos \beta x \sum_{i=0}^N d_i x^i . \quad (37)$$

- ▶ Αντικαθιστώντας στην (30) δεν αναπαράγονται νέοι όροι. Οι διάφοροι συντελεστές βρίσκονται ώστε να ικανοποιείται η ΔΕ.

### Ομαλά και ανώμαλα σημεία: Ορισμοί και ταξινόμηση

Σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται να βρούμε τη λύση μιας γραμμικής ΔΕ στη γειτονιά ενός σημείου με ανάπτυξή της σε απειροσειρά γύρω απ' αυτό. Η συμπεριφορά της λύσης εξαρτάται από αυτή των συντελεστών της ΔΕ στο σημείο αυτό.

- ▶ Θα επικεντρωθούμε σε γραμμικές ΔΕ 2ης τάξης

$$\frac{d^2 Y}{dz^2} + p(z) \frac{dY}{dz} + q(z) Y = 0 . \quad (38)$$

- ▶ Σε εφαρμογές η μεταβλητή  $z$  είναι συνήθως πραγματική, αλλά την επεκτείνουμε σε όλο το μιγαδικό επίπεδο.
- ▶ Οι συναρτήσεις  $p(z)$  και  $q(z)$  είναι συνήθως πραγματικές.



**Συνήθη σημεία:** Ένα σημείο  $z_0$  ονομάζεται σύννηθες της (38) αν οι  $p(z)$  και  $q(z)$  είναι αναλυτικές στο  $z = z_0$  και στη γειτονιά του. Στα συνήθη σημεία η λύση της ΔΕ είναι μονότιμη και αναλυτική οπότε μπορεί να εκφρασθεί ως

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n . \quad (39)$$

Οι συντελεστές  $a_n$  προσδιορίζονται με:

- ▶ Αντικατάσταση στην (38).
- ▶ Με παράλληλη ανάπτυξη των  $p(z)$  και  $q(z)$  σε δυναμοσειρά και τελικά θέτοντας στο μηδέν τους συντελεστές των δυνάμεων του  $z - z_0$ .

**Ανώμαλα σημεία:** Ένα σημείο  $z_0$  ονομάζεται ανώμαλο της (38) αν τουλάχιστον μία εκ των  $p(z)$  και  $q(z)$  είναι μη αναλυτική σε αυτό. Υπάρχουν δύο ανεξάρτητες λύσεις:

- ▶ η πρώτη εκ των οποίων της μορφής

$$Y_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (40)$$

- ▶ και η δεύτερη:

- ▶ Αν

$$\text{αν } \rho_1 - \rho_2 \neq \text{μη-αρνητικός ακέραιος} = s, \quad (41)$$

τότε

$$Y_2(z) = (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n,$$

## ▶ (συνέχεια)



$$\text{αν } \rho_1 - \rho_2 = \text{μη-αρνητικός ακέραιος} = s, \quad (42)$$

τότε

$$Y_2(z) = gY_1(z) \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n,$$

- ▶ Οι συντελεστές  $\rho_1, \rho_2, c_n, b_n, g$  προσδιορίζονται με αντικατάσταση στη ΔΕ και σύγκριση των δυνάμεων του  $(z - z_0)^n$ .
- ▶ Παρατηρείστε ότι γενικά η λύση δίνεται σε σειρά Laurent.

- ▶ Υπό συγκεκριμένες συνθήκες οι παραπάνω σειρές Laurent περιέχουν **πεπερασμένο αριθμό** όρων με αρνητικές δυνάμεις.
  - ▶ Τότε απειράθροισμα αρχίζει με τον όρο  $n = 0$  καθότι η μικρότερη αρνητική δύναμη μπορεί να συνδυαστεί με τους παράγοντες  $(z - z_0)^p$ .
  - ▶ Αν  $s = 0$  τότε το άθροισμα στην  $Y_2$  μπορεί να αρχίζει με τον όρο  $n = 1$ .
- ▶ Λύσεις αυτού του είδους ονομάζονται ομαλές. Η απαραίτητη και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε ομαλές λύσεις στη γειτονιά ενός σημείου  $z = z_0$  είναι οι συναρτήσεις

$$(z - z_0)p(z) \quad \text{και} \quad (z - z_0)^2q(z), \quad (43)$$

να είναι αναλυτικές στο  $z = z_0$  και στη γειτονιά του.

- ▶ Ένα ανώμαλο σημείο που ικανοποιεί τη (43) ονομάζεται **κανονικό ανώμαλο σημείο**, ειδικά ουσιαστικά **ουσιώδες ανώμαλο σημείο**.

### Συμπεριφορά στο άπειρο

Η συμπεριφορά στο  $z = \infty$  χρήζει ιδιαίτερης αντιμετώπισης. Θέτοντας  $t = 1/z$ , αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά στο  $t = 0$ . Τότε η (38) παίρνει την ίδια μορφή, αλλά με παραγώγους ως προς  $t$  και με τις συναρτήσεις  $p(z)$  και  $q(z)$  να αντικαθίστανται απ' τις

$$\tilde{p}(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} p\left(\frac{1}{t}\right), \quad \tilde{q}(t) = \frac{1}{t^4} q\left(\frac{1}{t}\right). \quad (44)$$

- ▶ Ένα ανώμαλο σημείο στο άπειρο θα είναι κανονικό αν

$$zp(z) \quad \text{και} \quad z^2q(z) \quad \text{είναι αναλυτικές στο} \quad z \rightarrow \infty. \quad (45)$$

- ▶ Επίσης ένα σημείο στο άπειρο θα είναι σύνηθες αν

$$p(z) = \frac{2}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad q(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^4}\right). \quad (46)$$

Εξισώσεις τύπου *Fuchsian*

Μιά εξίσωση με όλα τα ανώμαλα σημεία της κανονικά ονομάζεται τύπου **Fuchsian**. Έστω ότι αυτά είναι στα σημεία  $z = a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  και  $z = \infty$ .

- ▶ Η γενική μορφή των συντελεστών είναι

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - a_i} , \\ q(z) &= \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(z - a_i)^2} + \frac{C_i}{z - a_i} . \end{aligned} \quad (47)$$

- ▶ Επειδή  $z = \infty$  είναι κανονικό ανώμαλο σημείο έχουμε απ' την (45), ότι

$$\sum_{i=1}^n C_i = 0 . \quad (48)$$

- ▶ Δεν μπορούμε να προσθέσουμε στο δεξί μέλος των (47) μια αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$ .
  - ▶ Επειδή το  $z = \infty$  είναι κανονικό ανώμαλο σημείο αυτή θα πρέπει να πλησιάζει το 0 στο  $z = \infty$ .
  - ▶ Όμως τότε απ' το θεώρημα του Liouville έχουμε  $f(z) = 0$ .
- ▶ Σε ένα κανονικό ανώμαλο σημείο οι παράμετροι της σειράς  $\rho_{1,2}$  αποτελούν λύσεις της 2ο-βάθμιας εξίσωσης η οποία καθορίζεται απ' τους πύο ανώμαλους όρους της και ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση**

$$\rho^2 + (A_i - 1)\rho + B_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (49)$$

- ▶ Στο άπειρο η αντίστοιχη εξίσωση είναι

$$\rho^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^n A_i\right) \rho + \sum_{i=1}^n (B_i + a_i C_i) = 0. \quad (50)$$

της οποίας οι λύσεις αναφέρονται στον εκθέτη του  $t = 1/z$  στην μετασχηματισμένη εξίσωση.

Ισχύουν οι ακόλουθες γενικές παρατηρήσεις

- ▶ Το άθροισμα των ριζών των (49) και (50) είναι  $n - 1$ .
- ▶ Αν  $z = \infty$  είναι ένα σύνθητες σημείο τότε οι ακόλουθες συνθήκες πρέπει να υπακούονται:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n A_i &= 2 , \\ \sum_{i=1}^n C_i &= 0 , \\ \sum_{i=1}^n (B_i + a_i C_i) &= 0 , \\ \sum_{i=1}^n (2a_i B_i + a_i^2 C_i) &= 0 .\end{aligned}\tag{51}$$



### ΔΕ με τρία κανονικά ανώμαλα σημεία

Η συνηθέστερη κατηγορία ΔΕ που εμφανίζεται σε φυσικά προβλήματα είναι αυτές με τρία κανονικά ανώμαλα σημεία.

- ▶ Έστω  $a, b, c$  τα σημεία αυτά τα οποία είναι διάφορα μεταξύ των και του απείρου το οποίο θεωρείται ότι είναι σύνηθες σημείο.
- ▶ Η ΔΕ είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dz^2} + \left[ \frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{z - a} + \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{z - b} + \frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2}{z - c} \right] \frac{dY}{dz} \\ + \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_2 (a - b)(a - c)}{z - a} + \frac{\beta_1 \beta_2 (b - c)(b - a)}{z - b} \right. \\ \left. + \frac{\gamma_1 \gamma_2 (c - a)(c - b)}{z - c} \right] \frac{Y}{(z - a)(z - b)(z - c)} = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

- ▶ Οι εκθέτες των ανεξάρτητων λύσεων είναι  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $(\beta_1, \beta_2)$  και  $(\gamma_1, \gamma_2)$ .

- Επειδή το άπειρο είναι σύνηθες σημείο έχουμε ότι

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1 . \quad (53)$$

- Αν κάνουμε το μετασχηματισμό

$$x = \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)} , \quad Y(z) = \left( \frac{z-a}{z-c} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z-b}{z-c} \right)^{\beta_1} F(x) , \quad (54)$$

τότε η συνάρτηση  $F(x)$  ικανοποιεί την **υπεργεωμετρική εξίσωση**

$$x(1-x) \frac{d^2 F}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0 , \quad (55)$$

με παραμέτρους

$$\alpha = \gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 , \quad \beta = \gamma_2 + \alpha_1 + \beta_1 , \quad \gamma = 1 + \alpha_1 - \alpha_2 .$$

Αυτή έχει τρία κανονικά ανώμαλα σημεία, τα  $z = 0, 1, \infty$ , με αντίστοιχους εκθέτες  $(0, 1 - \gamma)$ ,  $(0, \gamma - \alpha - \beta)$  και  $(\alpha, \beta)$ .

- ▶ Αν κάποια απ' τις παραμέτρους είναι άπειρη, π.χ.  $\eta = c = \infty$  τότε η (52) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dz^2} + \left[ \frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2}{z - a} + \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{z - b} \right] \frac{dY}{dz} \\ + \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_2 (a - b)}{z - a} + \frac{\beta_1 \beta_2 (b - a)}{z - b} + \gamma_1 \gamma_2 \right] \\ \times \frac{Y}{(z - a)(z - b)} = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

- ▶ Τότε έχουμε τρία κανονικά ανώμαλα σημεία  $a, b$  και  $\infty$ , δηλαδή το  $z = \infty$  δεν είναι πιά σύνηθες σημείο.
- ▶ Το ανάλογο του μετασχηματισμού (54) που θα δώσει **υπεργεωμετρική εξίσωση** είναι

$$x = \frac{z - a}{b - a}, \quad Y(z) = (z - a)^{\alpha_1} (z - b)^{\beta_1} F(x). \quad (57)$$

- ▶ Οι συντελεστές της υπεργεωμετρικής εξίσωσης δίδονται από

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 - \beta_2 + 1 , \\ \alpha\beta &= \gamma_1\gamma_2 + (\alpha_1 + \beta_1)(1 - \alpha_2 - \beta_2) , \\ \gamma &= 1 + \alpha_1 - \alpha_2 . \end{aligned} \tag{58}$$

- ▶ Η λύση παίρνει τη μορφή (55) αρκεί να ικανοποιείται η (53).
- ▶ Τα ζεύγη των χαρακτηριστικών εκθετών στα σημεία  $a, b$  και  $\infty$  είναι  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $(\beta_1, \beta_2)$  και  $(\gamma_1, \gamma_2)$ .

### Συρρέουσα Υπεργεωμετρική εξίσωση

Όταν δύο ανώμαλα σημεία μιας  $\Delta E$  πλησιάσουν και εντέλει ταυτιστούν το αποτέλεσμα είναι μια  $\Delta E$  με ένα λιγότερο ανώμαλο σημείο, με ιδιότητες τυπικά πιό σύνθετες στο κοινό σημείο.

Η περίπτωση της υπεργεωμετρικής εξίσωσης (55) είναι τυπικό παράδειγμα. Έστω ότι:

- ▶ Κάνουμε την αλλαγή  $x \rightarrow x/\beta$  και διαιρούμε την (55) με  $\beta$ .
- ▶ Παίρνουμε το όριο  $\beta \rightarrow \infty$ .

Το αποτέλεσμα είναι:

$$x \frac{d^2 Y}{dx^2} + (\gamma - x) \frac{dY}{dx} - \alpha Y = 0, \quad (59)$$

που είναι η **συρρέουσα υπεγεωμετρική εξίσωση**.

Αυτή έχει:

- ▶ Ένα κανονικό ανώμαλο σημείο στο  $x = 0$ , ίδιο με αυτό της αρχικής εξίσωσης, με εκθέτες, απ' την (49), τους  $\rho = 0$  και  $1 - \gamma$ .
- ▶ Ένα μη κανονικό σημείο στο  $x = \infty$ , ως αποτέλεσμα του ορίου, των δύο αρχικών συνήθων ανώμαλων σημείων για  $x = 1, \infty$ .
- ▶ Η υπεργεωμετρική και η συρρέουσα υπεργεωμετρική εξίσωση αντιστοιχούν, με κατάλληλες εκλογές των παραμέτρων σε πολλές γνωστές ΔΕ, π.χ. Legendre, Jacobi, Hermite, Laguerre, κλπ.

## Παράδειγμα 1ο

Θα βρούμε τη γενική λύση της ΔΕ

$$(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = (1-x)^2, \quad y = y(x). \quad (60)$$

**Λύση:** Γράφουμε την ΔΕ στην μορφή

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = \phi(x), \quad (61)$$

με

$$f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad \phi(x) = 1-x.$$

Η  $y = x$  αποτελεί λύση της ομογενούς ΔΕ. Επομένως, η αλλαγή μεταβλητής

$$y(x) = xv(x),$$

οδηγεί στην 1ης τάξης ως προς την παράγωγο  $v'(x)$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left( \frac{2}{x} + \frac{x}{1-x} \right) \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} - 1.$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ολοκληρωτικών παραγόντων

$$\frac{dv}{dx} = c \frac{1-x}{x^2} e^x + \frac{x^2-1}{x^2},$$

όπου  $c$  σταθερά. Με απλή ολοκλήρωση

$$y(x) = -ce^x + c_1x + x^2 + 1, \quad (62)$$

όπου  $c_1$  η δεύτερη σταθερά ολοκλήρωσης.

Οι ενδιάμεσα υπολογισμοί αφήνονται ως [Άσκηση].



## Παράδειγμα 2ο

Θα βρούμε τη γενική λύση της ΔΕ

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + n^2 xy = \sin \omega x, \quad y = y(x). \quad (63)$$

όπου  $\omega$  και  $n$  είναι πραγματικές σταθερές.

**Λύση:** Γράφουμε τη ΔΕ στη μορφή (61) με

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad g(x) = n^2, \quad \phi(x) = \frac{\sin \omega x}{x}.$$

Η αλλαγή

$$y(x) = \frac{v(x)}{x},$$

οδηγεί στην

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + n^2 v = \sin \omega x.$$

Η λύση της ομογενούς  $v_h$  είναι προφανής και η μερική λύση είναι

$$v_p(x) = \frac{\sin \omega x}{n^2 - \omega^2}, \quad (64)$$

αν  $\omega \neq n$  και

$$v_p(x) = -\frac{x \cos nx}{2n}, \quad (65)$$

αν  $\omega = n$ . Η γενική λύση δίνεται από το άθροισμα  $v = v_h + v_p$ .  
Οι ενδιάμεσα υπολογισμοί αφήνονται ως [Άσκηση].

## Παράδειγμα 3ο

Θεωρούμε τη ΔΕ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}, \quad y = y(x). \quad (66)$$

Βρείτε μερικούς όρους μιας προσεγγιστικής λύσης που να εκφράζει την  $y(x)$  για  $x \gg 1$ .

**Λύση:**

- ▶ Υποθέτοντας ότι η  $y(x)$  παραμένει πεπερασμένη για  $x \gg 1$ , μπορούμε γράψουμε προσεγγιστικά

$$\frac{d^2y}{dx^2} \simeq \frac{1}{x^4} \implies y(x) \simeq \frac{1/6}{x^2}.$$

Εκ' του αποτελέσματος, η υπόθεση ήταν σωστή.

- ▶ Για να υπολογίσουμε διορθώσεις γράφουμε

$$y(x) = \frac{1/6}{x^2} + h(x) ,$$

όπου η συνάρτηση  $h(x) \ll 1/x^2$  για  $x \gg 1$ .

- ▶ Αντικαθιστούμε στη ΔΕ και αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor παίρνοντας

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{1}{18x^{10}} + h'' \right) + \left( -\frac{1}{432x^{16}} + \frac{2h}{3x^8} \right) \\ &+ \left( \frac{1}{11664x^{22}} - \frac{h}{18x^{14}} + \frac{2h^2}{x^6} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{x^{28}} \right) . \end{aligned}$$

- ▶ Η  $h$  θα είναι άθροισμα όρων αντίστροφων δυνάμεων του  $x$  με ανάπτυξη της μορφής

$$h(x) = \frac{a_1}{x^8} + \frac{a_2}{x^{14}} + \frac{a_3}{x^{20}} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{x^{26}} \right) .$$

- Αντικαθιστώντας βρίσκουμε το αλγεβρικό σύστημα

$$\frac{1}{x^{10}} : \quad \frac{1}{18} + 72a_1 = 0 ,$$

$$\frac{1}{x^{16}} : \quad -\frac{1}{432} + \frac{2a_1}{3} + 210a_2 = 0 ,$$

$$\frac{1}{x^{22}} : \quad \frac{1}{11664} - \frac{a_1}{18} + 2a_1^2 + \frac{2a_2}{3} + 420a_3 = 0 ,$$

η λύση του οποίου είναι

$$a_1 = -\frac{1}{1296} , \quad a_2 = \frac{11}{816480} , \quad a_3 = -\frac{4079}{12345177600} .$$

## Παράδειγμα 4ο

Θεωρούμε τη ΔΕ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y^2 - e^{2y}, \quad y = y(x). \quad (67)$$

- ▶ Εντοπίστε την περιοχή στην οποία η λύση της (67) είναι αρμονική ταλάντωση και δείξτε ότι η απάντηση ανάγεται στη λύση της υπερβατικής εξίσωσης

$$a^2 = e^{2a}. \quad (68)$$

Δικαιολογήστε ότι η μοναδική λύση της τελευταίας είναι τέτοια ώστε  $-1 < a < 0$ .

- ▶ Δείξτε ότι η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων κοντά στην περιοχή αυτή είναι

$$\omega^2 = 2(a - 1)a. \quad (69)$$

## Λύση:

- ▶ Γύρω από ένα σημείο ισορροπίας  $y = a$  η παράγωγος της  $y$  είναι μηδέν. Άρα προκύπτει η (68). Από αυτή παίρνουμε δύο λύσεις διότι  $e^a = \pm a$ :
  - ▶ Επειδή η συνάρτηση  $f_+(a) = e^a - a$  έχει ελάχιστο 1 στο  $a = 0$ , είναι αδύνατο να ικανοποιήσουμε την  $f_+ = 0$ .
  - ▶ Η  $f_-(a) = e^a + a$  είναι μονοτόνως αύξουσα και έχουμε  $f_-(0) = 1$  και  $f_-(-1) = -1 + 1/e > -1$ . Άρα προκύπτει η ανισότητα  $-1 < a < 0$ .
  - ▶ Η αριθμητική λύση της  $e^a + a = 0$  είναι  $a \simeq -0.567$ .
- ▶ Θέτουμε

$$z = a + q(x), \quad q(x) \ll a, \quad \forall x,$$

αντικαθιστούμε και αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor κρατώντας τον γραμμικό όρο στο  $q(x)$ .

- ▶ Βρίσκουμε την ΔΕ

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + 2a(a-1)q = 0 ,$$

που περιγράφει αρμονικές ταλαντώσεις, από την οποία προκύπτει η ζητούμενη συχνότητα.

Είναι δε θετική λόγω της ανισότητας  $-1 < a < 0$  και αριθμητικά  $\omega \simeq 1.333$ .

- ▶ Γενικότερα αν το δεξί μέλος της ΔΕ (67) είχε μια συνάρτηση  $f(y)$ , τότε:
  - ▶ Το  $a$  θα δινόταν από την  $f(a) = 0$  και  $\omega^2 = -f'(a)$ .
  - ▶ Θα είχαμε αρμονική κίνηση και ευστάθεια μόνο αν  $f'(a) < 0$ .
  - ▶ Στην αντίθετη περίπτωση η λύση στο σημείο  $z = a$  κρίνεται ως **ασταθής** διότι η διαταραχή  $q(x)$  αυξάνεται με το  $x$ .



## Παράδειγμα 5ο

Βρείτε τη λύση της ΔΕ Riccati

$$\frac{x}{2} y' + xy^2 + y = 1, \quad y = y(x), \quad x \geq 0 \quad (70)$$

και μελετήστε τη συμπεριφορά της.

**Λύση:**

- ▶ Αντικαταθιστούμε όπου

$$y = \frac{z'}{2z}, \quad z = z(x),$$

οπότε έχουμε τη ΔΕ

$$xz'' + 2z' - 4z = 0.$$

- ▶ Θεωρούμε κατόπιν το μετασχηματισμό

$$z(x) = x^\alpha f(\eta) , \quad \eta = \gamma x^\beta$$

και προσδιορίζουμε τις σταθερές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  έτσι ώστε η  $f(\eta)$  να ικανοποιεί μια γνωστή, εάν δυνατόν, ΔΕ.

- ▶ Έχουμε για τις παραγώγους

$$z' = \alpha x^{\alpha-1} f + \beta \gamma x^{\alpha+\beta-1} \dot{f} ,$$

και

$$\begin{aligned} z'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}f + \beta\gamma(2\alpha+\beta-1)x^{\alpha+\beta-2}\dot{f} \\ &\quad + \beta^2\gamma^2x^{\alpha+2\beta-2}\ddot{f} , \end{aligned}$$

όπου η τελεία παριστάνει παραγώγιση ως προς  $\eta$ .

- ▶ Τότε η (71) γράφεται

$$\beta^2\gamma^2x^{2\beta}\frac{d^2f}{d\eta^2} + \beta\gamma(2\alpha+\beta+1)x^\beta\frac{df}{d\eta} + (\alpha^2+\alpha-4x)f = 0 .$$

- ▶ Συγκρίνοντας με την ΔΕ τροποποιημένης Bessel 1ης τάξης

$$\eta^2 \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \eta \frac{df}{d\eta} - (\eta^2 + 1)f = 0 ,$$

παίρνουμε

$$\alpha = -\frac{1}{2} , \quad \beta = \frac{1}{2} , \quad \gamma = 4 .$$

- ▶ Άρα η γενική λύση για την  $z(x)$  είναι

$$z(x) = x^{-1/2} [c_1 I_1(4\sqrt{x}) + c_2 K_1(4\sqrt{x})] ,$$

- ▶ Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$I_1'(4\sqrt{x}) = \frac{1}{4\sqrt{x}} I_1(4\sqrt{x}) + I_2(4\sqrt{x}) ,$$

$$K_1'(4\sqrt{x}) = \frac{1}{4\sqrt{x}} K_1(4\sqrt{x}) - K_2(4\sqrt{x}) ,$$

βρίσκουμε ότι η γενική λύση της (70) είναι

$$y(x) = x^{-1/2} \frac{I_2(4\sqrt{x}) - cK_2(4\sqrt{x})}{I_1(4\sqrt{x}) + cK_1(4\sqrt{x})} , \quad c = c_2/c_1 .$$

- ▶ Λόγω του ότι

$$I_{1,2}(\eta) \sim \eta^{1,2}, \quad K_{1,2}(\eta) \sim \frac{1}{\eta^{1,2}}, \quad \text{όταν } \eta \rightarrow 0,$$

πρέπει  $c = 0$  για να είναι η λύση πεπερασμένη στο  $x = 0$ .

- ▶ Άρα καλώς συμπεριφερόμενη λύση είναι

$$y(x) = x^{-1/2} \frac{I_2(4\sqrt{x})}{I_1(4\sqrt{x})}. \quad (71)$$

Έχουμε τη συμπεριφορά:

- ▶ Για μικρά  $x$

$$y(x) \simeq 1 - \frac{2x}{3} + \mathcal{O}(x^2),$$

- ▶ Επίσης λόγω του ότι  $I_{1,2}(\eta) \sim e^\eta / \sqrt{2\pi\eta}$ , για  $\eta \gg 1$ ,

$$y(x) \simeq x^{-1/2} \rightarrow 0, \quad \text{όταν } x \rightarrow \infty.$$